

INTRODUCTION À L'ANALYSE p -ADIQUE

EXERCICE 9

Exercice 1. Montrer que $X \in \Theta(\mathbf{Z}_p^d)$ commute avec ∂_d si et seulement si X ne dépend pas de la variable x_d .

Exercice 2. Soit Φ_t un flot analytique sur $\mathbf{Z}_p^d$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Z}_p^d$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout $t \in \mathbf{Z}_p$, $\Phi_{p^k t} \left(B(x, \frac{1}{p^k}) \right) = B(x, \frac{1}{p^k}) =: V$ et tel que avec après un changement de coordonnées analytiques adéquates $\varphi : V \rightarrow \mathbf{Z}_p^d$, $\varphi^{-1} \circ \Phi_{p^k t} \circ \varphi$ est un flot analytique sur V .

Exercice 3. Montrer que nilpotent implique résoluble.

Soit G le groupe des transformations affines sur $\mathbf{C}$. Montrer que G résoluble mais pas nilpotent. (Montrer que $D(G)$ est le sous-groupe des translations et montrer que toute translation est le commutateur d'une translation avec une homothétie).

Exercice 4. Montrer qu'un groupe G est résoluble si et seulement si il existe une suite de sous-groupes $G_0 = G \supset G_1 \supset \dots \supset G_s = \{0\}$ telle que $G_{i+1} \subset G_i$ est distingué et G_i/G_{i+1} est abélien.

Exercice 5. Soit $H \subset G$ un sous-groupe distingué. Montrer que G est résoluble si et seulement si H et G/H sont résolubles. Montrer qu'on a de plus que $\text{dl}(G) \leq \text{dl}(H) + \text{dl}(G/H)$.

Si maintenant G est nilpotent, montrer que H et G/H sont nilpotents (mais la réciproque est fausse).

Exercice 6. Soit G un groupe, le *centre* de G est défini par

$$Z(G) = \{h \in G : \forall g \in G, \quad gh = hg\}. \quad (1)$$

On dit que H est *central* si $H \subset Z(G)$. Montrer que tout sous-groupe central est distingué. Montrer que si H est un-sous groupe central et que G/H est nilpotent alors G est nilpotent et $\text{nilp}(G) \leq \text{nilp}(H) + 1$.