INTRODUCTION À L'ANALYSE p-ADIQUE
EXERCICE 7

Exercice 1. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^d)$ un automorphisme polynomial qui possède la propriété suivante: f n'admet pas de sous-variétés strictes périodiques, c'est à dire que si $V \subset \mathbf{C}^d$ est une sous-variété telle qu'il existe $n \neq 0, f^n(V) \subset V$, alors $V = \mathbf{C}^d$.

Soit $x \in \mathbf{C}^d$, montrer que pour toute sous-variété stricte V, l'orbite de x intersecte qu'un nombre fini de fois V.

Exercice 2. Soit $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^d)$ un sous-groupe d'automorphismes polynomiaux.

(1) Montrer que G possède un sous-groupe d'indice fini qui est sans torsion.
(2) Montrer que G est résiduellement fini, c'est à dire que pour tout $g \in G \backslash \{\mathrm{id}\}$, il existe un sous-groupe d'indice fini qui ne contient pas g. (Indice: Plonger un sous-groupe d'indice fini de G dans un groupe de difféomorphismes analytiques p-adiques et utiliser l'action sur les boules de rayon $1/p^k$ pour k assez grand).