INTRODUCTION À L'ANALYSE p-ADIQUE
EXERCICE 6

Exercice 1. On considère le difféomorphisme analytique $f(x) = -x$ sur $\mathbf{Z}_2^d$. Montrer que $f = \mathrm{id} \mod 2$ mais qu'il n'existe pas de flot analytique ϕ_t tel que $\phi_1 = f$.

Exercice 2. Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. Montrer que le noyau de

$$\mathrm{GL}_m(\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \tag{1}$$

est sans torsion.

Exercice 3. Soient $f, g \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p^d)$ deux difféomorphismes analytiques tels qu'il existe deux flots analytiques ϕ^f, ϕ^g avec $\phi_1^f = f, \phi_1^g = g$. Montrer que f et g commutent si et seulement si les flots commutent c'est à dire

$$\forall s, t \in \mathbf{Z}_p, \quad \phi_s^f \circ \phi_t^g = \phi_t^g \circ \phi_s^f. \tag{2}$$

Exercice 4. Soit G un groupe, on dit qu'un sous-groupe H est *d'indice fini* si G/H est fini.

(1) Montrer que si H est d'indice fini, il contient un sous groupe distingué H' d'indice fini (Considérer l'action de G par multiplication sur G/H).

(2) Soient H_1, H_2 deux sous-groupes distingués et d'indice fini de G, montrer que $H_1 \cap H_2$ est aussi d'indice fini.

(3) Montrer que si $N \subset M$ sont deux sous-groupes dinstingués d'indice fini on a un morphisme naturel

$$\pi_{NM} : G/N \to G/M. \tag{3}$$

(4) On définit la topologie *profinie* sur G comme la topologie engendré par les sous-groupes d'indices fini de G et leur translatés (i.e une base de la topologie est donnée par gM où $g \in G$ et $M \subset G$ est un sous-groupe d'indice fini. Notons I_f l'ensemble des sous-groupes distingués d'indice fini de G. On définit la *complétion profinie de G* par

$$\widehat{G} = \varprojlim_{M \in I_f} G/M = \left\{ (g_M)_{M \in I_f} : g_M \in G/M \text{ et } \pi_{NM}(g_N) = g_M, \forall N \subset M \right\}. \tag{4}$$

(5) Soit $\phi : G \to \widehat{G}$ l'application canonique définie par

$$\phi(g) = (\overline{g})_{M \in_f} \tag{5}$$

où on écrit $\overline{g}$ l'image de g dans le quotient G/M, montrer que ϕ est un morphisme de groupe et que ϕ est injective si et seulement si la topologie profinie est séparé sur G.

(6) Montrer que si $G = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$, alors $\widehat{G} = 0$ (utiliser le fait que si $x \in G$, alors pour tout $m \geqslant 1$, $\frac{1}{m}x \in G$).

(7) Montrer que $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod_p \mathbf{Z}_p$.