

INTRODUCTION À L'ANALYSE p -ADIQUE

EXERCICE 4

Exercice 1. Montrer que $\mathbf{Q}_p\langle x \rangle$ est exactement l'ensemble des séries formelles à coefficient dans $\mathbf{Q}_p$ qui sont convergentes sur $\mathbf{Z}_p$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathbf{Q}_p[[x]]$ une série formelle. On définit son rayon de convergence le supremum des $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^d$ tel que $\|x\| \leq r$, $f(x)$ converge. On le note r_f . Montrer que

$$r_f = \sup \left\{ R > 0 : a_I R^{|I|} \xrightarrow{|I| \rightarrow +\infty} 0 \right\} \quad (1)$$

où ici on écrit $|I| = i_1 + \dots + i_d$.

Exercice 3. Montrer que $\mathbf{Q}_p\langle x \rangle$ est la complétion de $\mathbf{Q}_p[x]$ pour la norme de Gauss.

Exercice 4. Montrer la formule de Legendre:

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \quad (2)$$

En déduire que le rayon de convergence de la série exponentielle est $r_p = |p|^{1/(p-1)}$.

Exercice 5. Montrer que si $z_1, \dots, z_r \in \mathbf{Z}_p$ avec $r \leq d$, alors on a une application d'évaluation $\mathbf{Q}_p\langle x_1, \dots, x_d \rangle \rightarrow \mathbf{Q}_p\langle x_{r+1}, \dots, x_d \rangle$ donnée par

$$f(z_1, \dots, z_r, x_{r+1}, \dots, x_d) = \sum_I a_I z_1^{i_1} \dots z_r^{i_r} x_{r+1}^{i_{r+1}} \dots x_d^{i_d}. \quad (3)$$

Montrer que cette application est 1-Lipschitz. Montrer également qu'on peut écrire

$$f = \sum_{k \geq 0} f_k(x_1, \dots, x_{d-1}) x_d^k \quad (4)$$

avec $f_k \in \mathbf{Q}_p\langle x_1, \dots, x_{d-1} \rangle$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $i = 1, \dots, d$, l'opérateur de dérivation ∂_i par rapport à la i -ème variable définit bien un opérateur

$$\partial_i : \mathbf{Q}_p\langle \mathbf{x} \rangle \rightarrow \mathbf{Q}_p\langle \mathbf{x} \rangle. \quad (5)$$

Montrer que $\partial_i(f) = 0$ si et seulement si f est constante par rapport à la variable x_i . Montrer de plus que $\partial_i \circ \partial_j = \partial_j \circ \partial_i$ et montrer la formule de la chaîne:

$$\partial_i(f \circ g) = \sum_j \partial_i(g_j) \cdot (\partial_j f)(g). \quad (6)$$

(Indication: montrer tous ces énoncés pour des polynômes et utiliser le fait que les polynômes sont denses dans l'algèbre de Tate).

Exercice 7. (Cauchy-Lipschitz p -adique) Soit $u \in \mathbf{Z}_p\langle t \rangle$. On souhaite montrer que pour tout $a \in \mathbf{Z}_p$, l'équation différentielle

$$f' = u(f) \tag{7}$$

admet une unique solution telle que $f(0) = a$ avec un rayon de convergence > 0 .

(1) Montrer que l'équation (7) admet une unique solution dans l'espace des séries formelles.

(On rappelle que $f = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$.

(2) En déduire que le rayon de convergence de f est $\geq r_p = |p|^{1/(p-1)}$.