INTRODUCTION À L'ANALYSE p-ADIQUE
EXERCICE 3

Exercice 1. On souhaite montrer le résultat suivant: Soit $P \in \mathbf{Z}[t]$ un polynôme à coefficients entiers, alors il existe une infinité de nombres premiers p tel que $P \bmod p$ a une racine dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. On suppose que ce n'est pas le cas.

(1) En déduire qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ tels que pour tout $m \in \mathbf{Z}$
$$P(m) = p_1^{\alpha_1(m)} \cdots p_r^{\alpha_r(m)} \tag{1}$$
avec $\alpha_i(m)$ un entier $\geqslant 0$.

(2) En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ tel que pour $M \to +\infty$,
$$|P([\![-M, M]\!])| \leqslant C_1 \log M. \tag{2}$$

(3) Montrer ensuite que pour tout polynôme à coefficients entier on a qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour $M \to +\infty$
$$|P([\![-M, M]\!])| \geqslant C_2 M^{1/\deg(P)}. \tag{3}$$

(4) En déduire une contradiction.

Exercice 2. On veut utiliser l'exercice 1 pour montrer le résultat suivant: Soit K un corps de nombres et $S \subset K$ une partie finie de K, alors il existe une infinité de nombre premiers p tel qu'on ait un plongement $K \hookrightarrow \mathbf{Q}_p$ tel que S est envoyé dans $\mathbf{Z}_p$.

(1) On rappelle le théorème de l'élément primitif. Si K est un corps de nombre, alors il existe $\alpha \in K$ tel que $K = \mathbf{Q}(\alpha)$. Soit P_α, un polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$ à coefficients entiers. Montrer que pour tout nombre premier p assez grand on a que $\deg \overline{P}_\alpha = \deg P_\alpha$ et que $\overline{P}_\alpha$ et $\overline{P}'_\alpha$ sont premiers entre eux.

(2) Montrer le résultat en utilisant l'exercice 1 et le lemme de Hensel.

(3) Montrer que l'énoncé est encore vrai si $K = \mathbf{Q}(t_1, \ldots, t_n)$ avec t_i transcendants sur $\mathbf{Q}$ (on rappelle que $\mathbf{Z}_p$ est non dénombrable).

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ définie par
$$f\left(\sum_i a_i p^i\right) = \sum a_i p^{di}. \tag{4}$$

Montrer que pour tout x, y,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^d. \tag{5}$$

En déduire que f est continue et que pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0. \tag{6}$$

On voit donc que $f' = 0$ même si f n'est pas constante.

Exercice 4. Montrer que $\mathbf{Q}_p\langle x \rangle$ est exactement l'ensemble des séries formelles à coefficient dans $\mathbf{Q}_p$ qui sont convergentes sur $\mathbf{Z}_p$.

Exercice 5. Montrer que $\mathbf{Q}_p\langle x \rangle$ est la complétion de $\mathbf{Q}_p[x]$ pour la norme de Gauss.

Exercice 6. Montrer la formule de Legendre:

$$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{7}$$

En déduire que le rayon de convergence de la série exponentielle est $r_p = |p|^{1/(p-1)}$.