INTRODUCTION À L'ANALYSE p -ADIQUE

EXERCICE 2

Les exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles et à faire en dernier.

Exercice 1. Soit $j_p : \mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{Q}_p$ l'injection canonique. On définit de façon abusive

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p = j_p^{-1}(\mathbf{Z}_p). \quad (1)$$

Montrer que

$$\bigcap_p (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Exercice 2. (1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{n, n+1, n+2, \dots\}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$.

(2) Sous quelles conditions sur $a, b \in \mathbf{Z}_p$, on a que $a + b\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$?

(3) Montrer que $\{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbf{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$ montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $P = 0$ a une solution dans $\mathbf{Z}_p^n$.

(2) $P = 0$ a une solution dans $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^n$ pour tout $k \geq 1$.

(Indication: utiliser la compacité de $\mathbf{Z}_p$).

Exercice 4. Soit $a \in \mathbf{Z}$, montrer que l'équation $X^2 + X + a$ a une racine dans $\mathbf{Q}_2$ si et seulement si a est pair.

Exercice 5. En utilisant la version simplifiée du lemme de Hensel, montrer le résultat suivant. Soit $x \in \mathbf{Q}_p^\times$, alors $x \in \mathbf{Z}_p^\times$ si et seulement si il existe une infinité de $n \geq 1$ tel que x^{p^n-1} admet une racine n -ième.

Exercice 6. Soit $\phi : \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{Q}_p$ un automorphisme de corps.

(1) Montrer que $\phi(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$.

(2) Montrer par l'exercice 5 que $\phi(\mathbf{Z}_p^\times) = \mathbf{Z}_p^\times$.

(3) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, $|\phi(x)|_p = |x_p|$.

(4) En déduire que ϕ est continu.

(5) Conclure que $\phi = \text{id}$.

Exercice 7. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\mathbf{Q}_p$ admet une racine carré de -1 si et seulement si $4 \mid p-1$. (On rappelle que $\mu(\mathbf{Q}_p) = \mu_{p-1}$).