INTRODUCTION À L'ANALYSE p-ADIQUE
EXERCICE 1

Les exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles et à faire en dernier.
On fixe un nombre premier p.

Exercice 1. Soit $u \in \mathbf{Q}_p$ tel que $|u| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k \geqslant 0} u^k. \tag{1}$$

En déduire que $|1-u| = 1$.

Exercice 2. Soit $b = \sum_{k \geqslant 0}(p-1)p^k$.

(1) Montrer que b est bien définie et que $b \in \mathbf{Z}_p$.
(2) Montrer que $b = -1$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, p n'admet pas de racine k-ième dans $\mathbf{Z}_p$. (Indice: s'il existait une racine k-ième de p, quelle serait sa valeur absolue ?).

Exercice 4. On considère la suite définie par

$$u_{n+1} = u_n^p + p. \tag{2}$$

(1) Montrer que si $|u_0|_p < 1$, alors pour tout $n \geqslant 0, |u_n|_p < 1$.
(2) On suppose que $|u_0|_p < 1$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$|u_{n+1} - u_n|_p \leqslant \frac{|u_n - u_{n-1}|_p}{p}. \tag{3}$$

(3) En déduire que u_n converge vers une racine du polynôme $X^p - X + p$.
(4) Montrer que ce polynôme est irréductible sur $\mathbf{Q}$ pour $p = 2$, en déduire que $\mathbf{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue 2-adique.
(5) Même question pour $p = 3$. (*)

Exercice 5. Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. Un élément $x \in K$ est *entier* sur A s'il existe $P \in A[t]$ *unitaire* et non nul tel que $P(x) = 0$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des éléments $x \in K$ entier sur A. On dit que A est intégralement clos si $\overline{A} = A$.

Montrer que $\mathbf{Z}_p$ est intégralement clos. (Prendre $x \in \overline{A}$ et écrire $x^N + \sum_{k \leqslant N-1} a_k x^k = 0$ pour montrer que $|x| \leqslant 1$).

Exercice 6. Soit $x \in \mathbf{Q}_p$ et $r \geqslant 0$. On définit le *disque* ouvert de centre x et de rayon r par

$$\mathbb{D}(x,r) = \{y \in \mathbf{Q}_p : |x-y| < r\}. \tag{4}$$

Et on définit le disque fermé par

$$\overline{\mathbb{D}}(x,r) = \{y \in \mathbf{Q}_p : |x-y| \leqslant r\}. \tag{5}$$

On définit également le cercle

$$C(x,r) = \{y \in \mathbf{Q}_p : |x-y| = r\}. \tag{6}$$

(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}(x,r)$, $\mathbb{D}(x,r) = \mathbb{D}(z,r)$ et de même pour les disques fermés.
(2) Montrer que $\mathbb{D}(x,r)$ et $\overline{\mathbb{D}}(x,r)$ sont à la fois fermé et ouvert.
(3) Montrer que deux disques sont ou bien disjoints ou bien contenus l'un dans l'autre.
(4) Montrer que $C(x,r)$ est à la fois ouvert et fermé.

Exercice 7 (*). On souhaite montrer que tout application continue $c : \mathbf{R} \to \mathbf{Q}_p$ est constante. On dit que $\mathbf{Q}_p$ est *totalement discontinu*.

(1) Montrer que la composition $\psi = |\cdot|_p \circ c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue.
(2) Montrer qu'on peut supposer que $c(0) = 0$.
(3) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que $\mathrm{im}(\psi)$ est discret, conclure.

Exercice 8 (*). Soit Λ_p l'espace des suites (a_n) avec $a_n \in \{0,\dots,p-1\}$. On notera une telle suite de la façon suivante

$$a = (a_n) = \sum_{n\geqslant 0} a_n p^n. \tag{7}$$

Il s'agit d'une notation formelle. On définit la distance entre a et b par

$$d(a,b) = p^{-\min\{n : a_n \neq b_n\}} \tag{8}$$

(1) Montrer en utilisant l'écriture en base p qu'on a un plongement canonique $\mathbf{Z} \hookrightarrow \Lambda_p$.
(2) Montrer que pour tout $a,b \in \mathbf{Z}$, $d(a,b) = |a-b|_p$ où $|\cdot|_p$ est la valeur absolue p-adique.
(3) Montrer que tout élément de Λ_p est limite d'une suite d'entiers.
(4) Montrer que Λ_p est complet.
(5) En déduire que $\Lambda_p = \mathbf{Z}_p$. C'est une autre définition possible des nombres p-adiques.