# DYNAMIQUE DES APPLICATIONS RATIONNELLES

MARC ABBOUD

TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires 3
1.1. La sphère de Riemann 3
1.2. Applications rationnelles 6
1.3. Familles normales 9
1.4. Exercices 10
2. Les ensembles de Fatou et de Julia 11
2.1. Définitions et invariance 11
2.2. Points périodiques 12
2.3. Propriétés de l'ensemble de Julia 14
2.4. Le cas polynomial 16
2.5. Exercices 17
3. Éléments de théorie du potentiel 17
3.1. Fonctions semi-continues supérieurement 18
3.2. Fonctions harmoniques et sous-harmoniques 21
3.3. Régularisation par convolution 25
3.4. La mesure de Riesz 28
3.5. Potentiels logarithmiques 32
4. La fonction de Green d'un polynôme 36
4.1. Construction 36
4.2. La mesure d'équilibre 37
4.3. Coordonnée de Böttcher et critère de connexité 39
4.4. Exercices 40
5. Théorèmes d'équidistribution 41
5.1. L'opérateur de transfert 41
5.2. Unicité de la mesure équilibrée 42
5.3. Le théorème de Brolin 43
5.4. Équidistribution des points périodiques 45
5.5. Exercices 46
6. Entropie, exposants de Lyapunov et fractions rationnelles 46

*Date*: 8 novembre 2026.

6.1. Mélange 46
6.2. Entropie 47
6.3. Exposant de Lyapunov et formule de Manning 48
6.4. Le cas des fractions rationnelles 49
6.5. Exercices 50
Annexe A. Rappels d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle 50
A.1. Fonctions holomorphes 51
A.2. Zéros, indice et théorème de Rouché 52
A.3. Le lemme de Schwarz et la métrique de Poincaré 52
A.4. Convergence uniforme sur les compacts et théorème d'Ascoli 53
A.5. Mesures, dualité et convergence faible 54
A.6. Exercices 55
Références 56

Ce cours est une introduction à la dynamique des applications polynomiales et rationnelles d'une variable complexe. Étant donné un polynôme $f$ de degré $d \geqslant 2$, on s'intéresse au comportement asymptotique des itérées $f^n = f \circ \cdots \circ f$, et la première chose que l'on découvre est que le plan se scinde en deux parties de natures opposées : un ouvert $\mathcal{F}(f)$ où la dynamique est stable et où deux points voisins ont des orbites voisines, et un compact $\mathcal{J}(f)$ où elle est chaotique. Le chapitre A rassemble, sans démonstration et à titre de référence, les résultats d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle utilisés dans la suite : principe du maximum, théorème de Rouché, lemme de Schwarz, théorème d'Ascoli, compacité faible des mesures. Le chapitre 1 rassemble les préliminaires proprement dits : la sphère de Riemann, le degré d'une application rationnelle, et surtout la notion de *famille normale* et les théorèmes de Montel, qui sont l'outil de base de toute la théorie. Le chapitre 2 construit les ensembles de Fatou et de Julia et en établit les propriétés fondamentales : invariance totale, minimalité, densité des cycles répulsifs. Le chapitre 3 est un cours accéléré de théorie du potentiel dans le plan : fonctions sous-harmoniques, mesure de Riesz, potentiels logarithmiques, capacité et mesure d'équilibre d'un compact. Ces deux fils se rejoignent au chapitre 4, où l'on associe à tout polynôme sa *fonction de Green* $G_f$ : elle est à la fois la fonction de Green du compact $K_f$ des orbites bornées et un objet dynamique, caractérisé par l'équation fonctionnelle $G_f \circ f = d\,G_f$. Son laplacien est la *mesure d'équilibre* $\mu_f$, dont le chapitre 5 montre qu'elle décrit la répartition asymptotique des préimages d'un point et des points périodiques. Le chapitre 6 relie enfin $\mu_f$ à l'entropie et aux exposants de Lyapunov, et explique comment tout ce qui précède s'étend aux fractions rationnelles.

Les prérequis sont un cours d'analyse complexe à une variable et les rudiments de la théorie de la mesure et de l'analyse fonctionnelle ; tous les énoncés dont nous aurons besoin sont rappelés au

chapitre A. Aucune connaissance préalable en systèmes dynamiques n'est supposée. Les démonstrations laissées au lecteur sont signalées comme telles ; les énoncés admis sont clairement identifiés et accompagnés d'une référence.

**Convention de notation.** La lettre $f$ désigne toujours l'application que l'on itère, $d = \deg f \geqslant 2$ son degré, et $f^n$ sa $n$-ième itérée pour la composition (jamais une puissance : la puissance $n$-ième est notée $f(z)^n$). Les lettres $z, w$ sont réservées aux variables de $\mathbf{C}$, les lettres $a, b, c$ aux points que l'on fixe dans un énoncé, la lettre $c$ étant plus spécifiquement réservée aux points critiques. Les lettres $U, V, W$ désignent des ouverts, $K$ un compact, $\mu, \nu, \sigma$ des mesures. On note $\mathbb{D}(a,r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| < r\}$ le disque ouvert, $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$ le disque fermé, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ le disque unité et $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité. Enfin Leb désigne la mesure de Lebesgue du plan.

## 1. Préliminaires

Ce chapitre rassemble le matériel dont nous nous servirons constamment : la géométrie de la sphère de Riemann, les propriétés élémentaires des applications rationnelles vues comme revêtements ramifiés, et la théorie des familles normales. Le résultat central est le *grand théorème de Montel* (théorème 1.16) : une famille d'applications holomorphes qui évitent trois valeurs fixées est normale. C'est un énoncé de compacité obtenu à partir d'une information purement ensembliste, et c'est ce mécanisme, appliqué encore et encore, qui produira au chapitre 2 la quasi-totalité des propriétés de l'ensemble de Julia.

### 1.1. La sphère de Riemann.

Itérer un polynôme $f$ de degré $d \geqslant 2$, c'est d'abord constater que les orbites de module assez grand tendent vers l'infini : l'infini est un point fixe, et c'est même le point fixe le plus visible du système. Travailler dans $\mathbf{C}$ oblige alors à traiter à part un point qui, dynamiquement, n'a rien de particulier, et prive d'un outil essentiel : la compacité. Nous commençons donc par construire soigneusement l'espace sur lequel toute la théorie se déroule. Cette construction admet trois descriptions, qui seront toutes utiles : un recollement de deux plans, la droite projective, et la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

*Deux plans recollés.* Considérons deux exemplaires de $\mathbf{C}$, notés $U_0$ et $U_1$, dont on appelle $z$ la coordonnée sur le premier et $w$ la coordonnée sur le second. Sur l'union disjointe $U_0 \sqcup U_1$, identifions le point $z \in U_0 \setminus \{0\}$ au point $w \in U_1 \setminus \{0\}$ lorsque

$$w = \frac{1}{z}. \tag{1}$$

Le quotient obtenu est la *sphère de Riemann*, notée $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Il faut prendre le temps de voir ce que cette opération produit. Le recollement identifie $U_0 \setminus \{0\}$ à $U_1 \setminus \{0\}$, mais laisse deux points non appariés : l'origine de $U_0$ et l'origine de $U_1$. Si l'on convient de regarder $U_0$ comme « le » plan complexe, alors $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est $\mathbf{C}$ augmenté d'un unique point supplémentaire, à savoir l'origine de $U_1$, que l'on note $\infty$ ; et (1) dit que les points de $\mathbf{C}$ de très grand module

sont, vus dans la carte $w$, très proches de 0 :

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}, \qquad \infty = (w = 0). \tag{2}$$

Mais rien n'oblige à privilégier $U_0$ : en regardant $U_1$ comme « le » plan, c'est l'origine de $U_0$ qui devient le point à l'infini. La construction est parfaitement symétrique, et c'est là tout son intérêt : *le point $\infty$ n'est pas une singularité, c'est un point ordinaire vu dans une mauvaise carte*.

L'application de transition $z \mapsto 1/z$ est un biholomorphisme de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C}^*$. Les deux cartes $(U_0, z)$ et $(U_1, w)$ font donc de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1 : une fonction définie au voisinage d'un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est dite holomorphe si elle l'est lue dans l'une des cartes, et la condition ne dépend pas de la carte choisie précisément parce que (1) est holomorphe. Concrètement :

**Définition 1.1.** Une fonction $f$ définie au voisinage de $\infty$ est *holomorphe en* $\infty$ si $w \mapsto f(1/w)$ se prolonge holomorphiquement en $w = 0$. Une application $f$ est *holomorphe à valeurs* $\infty$ en $a$ si $z \mapsto 1/f(z)$ est holomorphe et nulle en $a$.

**Exemple 1.2.** Lue dans la carte $w = 1/z$, l'application $f(z) = z^d$ devient $w \mapsto w^d$ : elle fixe $\infty$ avec le même comportement local qu'en 0, et $\infty$ est un point critique de degré local $d$. L'application $f(z) = z + 1$ devient $w \mapsto \frac{w}{1+w} = w - w^2 + \dots$ : elle fixe $\infty$ avec dérivée 1, c'est un point fixe parabolique, ce que la lecture dans la carte $z$ ne laissait nullement deviner. Enfin $f(z) = 1/z$ devient $w \mapsto 1/w$ : c'est une involution qui échange 0 et $\infty$.

**Proposition 1.3.** *On munit $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la topologie provenant du quotient $U_0 \cup U_1/(z \simeq \frac{1}{w})$. Alors $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compact.*

*Démonstration.* Une base de la topologie est donnée par les disques $\mathbb{D}(a, r)$ dans la carte $U_0$ et la carte $U_1$. Soit $V_i \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un recouvrement par des ouverts. Il existe $\varepsilon > 0$ et un indice $i_0$ tel que le disque $\mathbb{D}(0, \varepsilon)$ de la carte $U_1$ (c'est à dire un disque centré sur le point $\infty$) soit contenu dans $V_{i_0}$. Mais alors le complémentaire de $\mathbb{D}(0, \varepsilon) \subset U_1$ est exactement

$$Y := \overline{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \subset U_0 \tag{3}$$

c'est à dire les nombres complexes $z$ tels que $|z| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ qui est une partie compacte. Donc on sait qu'il existe $i_1, \dots, i_r$ tel que

$$Y = (Y \cap V_{i_1}) \cup \dots \cup (Y \cap V_{i_r}) \tag{4}$$

et alors

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = V_{i_0} \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r}. \tag{5}$$

□

*Coordonnées homogènes.* La description précédente est commode pour calculer, mais elle demande de choisir une carte et brise donc la symétrie que l'on vient de gagner. La description projective la rétablit.

Sur $\mathbf{C}^2\backslash\{0\}$, considérons la relation d'équivalence $v \sim \lambda v$ pour $\lambda \in \mathbf{C}^*$, c'est-à-dire « être sur la même droite vectorielle », et notons

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \left(\mathbf{C}^2\backslash\{0\}\right)/\mathbf{C}^*, \qquad \pi(Z,W) = [Z:W], \tag{6}$$

l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{C}^2$. Les nombres $Z$ et $W$ sont les *coordonnées homogènes* du point $[x:y]$ : ils ne sont définis qu'à un facteur commun près, de sorte qu'aucune fonction de $[x:y]$ n'a de sens si elle n'est pas invariante par $(Z,W) \mapsto (\lambda Z, \lambda W)$, mais les *rapports* et les *annulations* en ont un.

Une droite est déterminée par sa pente, ce qui donne les deux cartes naturelles

$$V_0 = \{W \neq 0\},\ z = \frac{Z}{W}, \qquad V_1 = \{Z \neq 0\},\ w = \frac{W}{Z}, \tag{7}$$

chacune en bijection avec $\mathbf{C}$, et dont la réunion est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tout entier puisque $Z$ et $W$ ne peuvent s'annuler simultanément. Sur l'intersection $V_0 \cap V_1 = \{xy \neq 0\}$, les deux coordonnées sont liées par

$$w = \frac{W}{Z} = \frac{1}{z}, \tag{8}$$

qui est exactement le recollement (1). Les deux constructions coïncident donc, et l'on dispose d'un dictionnaire :

$$z \in \mathbf{C} \longleftrightarrow [z:1], \qquad \infty \longleftrightarrow [1:0]. \tag{9}$$

Le point à l'infini est la droite $\{W = 0\}$, et l'on voit sur (6) qu'elle ne se distingue en rien des autres droites de $\mathbf{C}^2$.

**Remarque 1.4.** Les coordonnées homogènes ne sont pas qu'une élégance de présentation. Elles permettent d'abord de faire agir $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par applications linéaires, ce qui donne le groupe des automorphismes sans calcul. Elles permettent surtout de *relever* une application rationnelle en une application polynomiale homogène de $\mathbf{C}^2$, procédé qui remplacera au chapitre 6 la fonction de Green des polynômes lorsque aucun point fixe ne pourra être envoyé à l'infini.

*La sphère, la distance sphérique.* La troisième description est métrique. La *projection stéréographique* depuis le pôle nord identifie la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ privée du pôle à $\mathbf{C}$ ; en envoyant le pôle nord sur $\infty$, elle s'étend en une bijection $\mathbb{S}^2 \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, laquelle est un difféomorphisme dans les deux cartes. On peut donc transporter sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ la distance euclidienne de $\mathbf{R}^3$ restreinte à $\mathbb{S}^2$ : c'est la *distance sphérique*

$$\sigma(p,q) = \frac{2\,|p-q|}{\sqrt{1+|p|^2}\sqrt{1+|q|^2}}, \qquad \sigma(p,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|p|^2}}. \tag{10}$$

Elle provient, à quasi-isométrie près, de la *métrique sphérique* $\rho_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(z)\,|\mathrm{d}z| = \frac{2|\mathrm{d}z|}{1+|z|^2}$, laquelle est bien définie sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tout entier : dans la carte $w = 1/z$ elle s'écrit $\frac{2|\mathrm{d}w|}{1+|w|^2}$, c'est-à-dire la même expression. En coordonnées homogènes, elle se lit encore plus simplement :

$$\sigma\left([x:y],[x':y']\right) = \frac{2\,|xy'-x'y|}{\|(x,y)\|\,\|(x',y')\|}, \tag{11}$$

formule manifestement invariante par $(x,y)\mapsto(\lambda x,\lambda y)$ et symétrique en les deux points.

**Proposition 1.5.** *Muni de la distance sphérique,* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *est un espace métrique compact, connexe, et la topologie induite sur* $\mathbf{C}$ *est la topologie usuelle. Une suite* $(z_n)$ *de* $\mathbf{C}$ *converge vers* $\infty$ *dans* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *si et seulement si* $|z_n|\to\infty$.

*Démonstration.* Comme la topologie usuelle sur $\mathbf{C}$ est métrique, il suffit de montrer qu'une suite de nombres complexes $z_n$ converge $p$ pour la topologie usuelle si et seulement si elle converge pour la distance sphérique. Tout d'abord on a que pour tout $p,q\in\mathbf{C}, \sigma(p,q)\leqslant|p-q|$ donc la topologie de la distance sphérique est plus fine. Prenons maintenant une suite de points $p_n$ qui converge vers $p\in\mathbf{C}$ pour la distance sphérique. Montrons que $|p_n-p|\to 0$. On montre que $|p_n|$ est borné. En effet si ce n'est pas le cas alors quitte à extraire on aurait que $|p_n|\to+\infty$ et alors

$$\sigma(p_n,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|p_n|^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{12}$$

et on aurait que $(p_n)$ converge vers $\infty\neq p$ pour la distance sphérique ce qui est absurde. Donc la suite $|p_n|$ est bornée et donc

$$\sigma(p_n,p)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \Leftrightarrow |p_n-p|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \tag{13}$$

□

On a donc une compactification naturelle de $\mathbf{C}$ qui permet de donner un sens au fait de « converger vers l'infini ». Signalons enfin la *dérivée sphérique*

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|\left(1+|z|^2\right)}{1+|f(z)|^2} = \lim_{w\to z}\frac{\sigma(f(w),f(z))}{\sigma(w,z)}, \tag{14}$$

qui mesure la dilatation de $f$ pour la métrique sphérique et reste finie même aux pôles de $f$ ; c'est elle qui intervient dans le critère de Marty (exercice 1.22).

## 1.2. **Applications rationnelles.**

**Définition 1.6.** Une *application rationnelle* est une application holomorphe $f:\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\to\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Le nom est justifié par le résultat suivant, qui dit qu'il n'y a pas d'autres applications holomorphes de la sphère dans elle-même que celles que l'on connaît déjà.

**Proposition 1.7.** *Soit $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ holomorphe non constante. Alors il existe deux polynômes $P, Q$ sans facteur commun tels que $f(z) = P(z)/Q(z)$ pour tout $z$ hors des zéros de $Q$. L'entier* $\deg f = \max(\deg P, \deg Q)$ *ne dépend pas de l'écriture ; on l'appelle le* degré *de $f$.*

*Démonstration.* L'ensemble $f^{-1}(\infty)$ est discret dans le compact $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, donc fini. Quitte à conjuguer par une homographie, supposons $\infty \notin f^{-1}(\infty)$ ; alors $f$ est holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, avec un nombre fini de pôles $a_1, \dots, a_r$ d'ordres $m_1, \dots, m_r$. La fonction $g(z) = f(z) \prod_i (z - a_i)^{m_i}$ est alors entière. Comme $f$ est holomorphe en $\infty$ à valeurs dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, la fonction $w \mapsto f(1/w)$ est méromorphe en 0, donc $|f(z)| = O(|z|^k)$ pour un certain $k$ quand $|z| \to \infty$ ; il en résulte que $|g(z)| = O(|z|^{k+\sum_i m_i})$, et $g$ est un polynôme par le corollaire A.2. Il ne reste qu'à simplifier la fraction obtenue. □

En coordonnées homogènes, l'écriture est plus symétrique et plus maniable. Si $f = P/Q$ avec $P, Q$ sans facteur commun et $d = \deg f$, posons

$$\tilde{P}(x,y) = y^d P(x/y), \qquad \tilde{Q}(x,y) = y^d Q(x/y), \tag{15}$$

deux polynômes *homogènes* de degré $d$ en $(x, y)$, sans facteur commun ; alors

$$f([x:y]) = \left[\tilde{P}(x,y) : \tilde{Q}(x,y)\right], \tag{16}$$

et cette écriture a un sens partout, y compris en $[1:0]$.

**Exemple 1.8.** Le polynôme $f(z) = z^2 + c$ s'écrit $f([x:y]) = [x^2 + cy^2 : y^2]$. On lit sur cette formule que $f([1:0]) = [1:0]$ et que le degré local en $[1:0]$ vaut 2 : en coordonnées homogènes, le comportement à l'infini se calcule comme partout ailleurs. Plus généralement, $f$ est un polynôme de degré $d$ si et seulement si $\tilde{Q} = y^d$.

**Proposition 1.9.** *Les applications rationnelles de degré* 1 *sont les* homographies

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \tag{17}$$

*c'est-à-dire les applications induites par les éléments de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ *agissant linéairement sur les coordonnées homogènes. Elles forment le groupe* $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ *des automorphismes de* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$*, lequel agit transitivement et librement sur les triplets de points distincts.*

La dernière assertion sera utilisée constamment : elle permet, dans toute démonstration, de placer trois points où l'on veut, typiquement en 0, 1 et $\infty$.

**Définition 1.10.** Soient $f$ une application rationnelle non constante et $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Le *degré local* $\deg_a f$ est l'unique entier $k \geqslant 1$ tel que, dans des cartes centrées en $a$ et en $f(a)$, l'application $f$ s'écrive $\zeta \mapsto \zeta^k u(\zeta)$ avec $u$ holomorphe et $u(0) \neq 0$. Un point $a$ tel que $\deg_a f \geqslant 2$ est appelé *point critique*, et son image une *valeur critique*. On note $\mathrm{Crit}(f)$ l'ensemble des points critiques de $f$.

Cette définition est licite : changer de carte au départ ou à l'arrivée revient à composer par un biholomorphisme, ce qui ne modifie pas l'ordre d'annulation. Autrement dit $\deg_a f$ est l'ordre d'annulation de $f - f(a)$ en $a$, lu dans des cartes ; en la carte $z$ et pour $f(a) \neq \infty$, c'est simplement $1 + \mathrm{ord}_a(f')$. Il s'avère que le degré local compte les préimages.

**Proposition 1.11.** *Soit $f$ une application rationnelle de degré $d \geqslant 1$. Pour tout $b \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$,*

$$\sum_{a \in f^{-1}(b)} \deg_a f = d. \tag{18}$$

*En particulier $f$ est surjective, tout point a au plus $d$ préimages, et $f$ est un revêtement de degré $d$ au-dessus de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de l'ensemble fini des valeurs critiques. De plus* $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

*Démonstration.* On écrit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Soit $b \in \mathbf{C}$, on peut supposer quitte à composer $f$ par une homographie que $\infty \notin f^{-1}(b)$, donc toutes les préimages de $b$ sont dans $\mathbf{C}$. On a alors

$$f(z) = b \Leftrightarrow R(z) = P(z) - bQ(z) = 0. \tag{19}$$

On voit que $R$ est un polynôme de degré $d$. En effet, sinon cela voudrait dire que $P(z)$ et $bQ(z)$ ont même degré et même coefficient dominant mais alors $f(\infty) = b$ ce qu'on a exclu. On a donc que les préimages de $b$ sont exactement les racines de $R$. Montrons que la multiplicité $\deg_a f$ est exactement la multiplicité de la racine. On peut supposer $a = 0$ et notons $k$ la multiplicité de la racine $a$ et alors

$$R(z) = P(z) - bQ(z) = z^k + h(z) \tag{20}$$

avec $h(z)$ un polynôme divisible par $z^{k+1}$. Et alors localement en $a = 0$ :

$$f(z) = \frac{bQ(z) + z^k + h(z)}{Q(z)} = b + \frac{1}{Q(z)} z^k + \frac{1}{Q(z)} h(z). \tag{21}$$

Comme $b \neq \infty$ on a que $Q(a) \neq 0$ et donc $\frac{1}{Q}$ est holomorphe au voisinage de $a$, ainsi on voit que $\deg_a f = k$. □

**Proposition 1.12** (Formule de Riemann–Hurwitz)**.** *Soit $f$ une application rationnelle de degré $d \geqslant 1$. Alors*

$$\sum_{a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} (\deg_a f - 1) = 2d - 2. \tag{22}$$

*En particulier $f$ possède au plus $2d-2$ points critiques.*

*Démonstration.* Tout d'abord on conjugue $f$ par une homographie pour supposer que $\infty$ ne soit pas une valeur critique de $f$. Ensuite on compose $f$ par une homographie pour supposer que $f(\infty) = \infty$. Ainsi $f$ est de la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{23}$$

avec $\deg(P) = \deg(Q) + 1$ et $Q$ est scindé à racines simples. Sur $\mathbf{C}$, $\deg_a f - 1$ est l'ordre d'annulation en $a$ de $f' = (P'Q - PQ')/Q^2$, dont le numérateur est un polynôme de degré au plus $2d-2$. Si on écrit $P = p_d z^d + \dots$ et $Q = q_{d-1} z^{d-1} + \dots$ avec $d = \deg P$, alors le coefficient de $z^{2d-2}$ est

$$(\deg P - \deg Q) p_d q_{d-1} = p_d q_{d-1} \neq 0. \tag{24}$$

Le numérateur a donc exactement $2d-2$ racines comptées avec multiplicité, et aucune n'est un zéro de $Q$. Comme $\infty$ n'est pas critique, on obtient (22). □

Nous nous intéresserons surtout au cas polynomial, qui se caractérise ainsi.

**Proposition 1.13.** *Une application rationnelle $f$ de degré $d \geqslant 1$ est (conjuguée par une homographie à) un polynôme si et seulement s'il existe $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tel que $f^{-1}(a) = \{a\}$.*

*Démonstration.* Si $f$ est un polynôme de degré $d$ alors $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et $\deg_\infty f = d$. Réciproquement, si $f^{-1}(a) = \{a\}$, conjuguons par une homographie envoyant $a$ sur $\infty$ : la nouvelle application $g$ vérifie $g^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, donc $g$ est holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ et se prolonge en $\infty$ : c'est une fonction entière avec un pôle à l'infini, c'est-à-dire un polynôme. □

Si $f(z) = a_d z^d + \cdots + a_0$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$, la conjugaison par l'homothétie $z \mapsto \lambda z$ remplace $a_d$ par $\lambda^{d-1} a_d$, et la conjugaison par une translation permet d'annuler $a_{d-1}$. Toute la dynamique polynomiale peut donc, quitte à conjuguer, être ramenée au cas *unitaire et centré*, et nous ferons souvent cette hypothèse pour alléger les formules.

## 1.3. **Familles normales.**

**Définition 1.14.** Soit $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un ouvert et $\mathcal{F}$ une famille d'applications holomorphes de $U$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On dit que $\mathcal{F}$ est *normale* si de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $U$, pour la distance sphérique $\sigma$. On dit que $\mathcal{F}$ est *normale au point $a \in U$* s'il existe un voisinage de $a$ sur lequel $\mathcal{F}$ est normale.

Insistons sur deux points. D'abord la convergence a lieu vers une application continue $U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, qui est automatiquement holomorphe, mais qui peut être constante, y compris constante égale à $\infty$. Ensuite la normalité est une propriété *locale* : la famille est normale sur $U$ si et seulement si elle est normale en chaque point de $U$, ce qui résulte d'un argument diagonal et de la séparabilité de $U$. L'ensemble des points de normalité est donc, par construction, un ouvert.

Le lien avec la compacité est fourni par le théorème d'Ascoli (théorème A.17) : puisque $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compact, une famille est normale si et seulement si elle est équicontinue en tout point pour la distance $\sigma$. C'est cette dernière formulation qui exprime le mieux la notion de *stabilité dynamique* : la famille $(f^n)$ est normale en $a$ si et seulement si les orbites des points voisins de $a$ restent uniformément voisines de celle de $a$ pendant tout le temps.

**Théorème 1.15** (Petit théorème de Montel)**.** *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes $U \to \mathbf{C}$ uniformément bornée sur tout compact de $U$. Alors $\mathcal{F}$ est normale.*

*Démonstration.* Soient $K \subset U$ compact et $r > 0$ tel que le $2r$-voisinage de $K$ soit inclus dans un compact $L \subset U$, et soit $M = \sup_{\mathcal{F}} \sup_L |f|$. Pour $a, b \in K$ avec $|a-b| \leqslant r$, la formule de Cauchy sur le cercle $\partial\mathbb{D}(a, 2r)$ donne

$$|f(a) - f(b)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}(a,2r)} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta - b} \right) \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{2M}{r} |a-b| . \tag{25}$$

La famille est donc équicontinue sur $K$ et bornée ; le théorème A.17 conclut. □

**Théorème 1.16** (Grand théorème de Montel)**.** *Soient $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un ouvert et $a,b,c$ trois points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Alors la famille de toutes les applications holomorphes $U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{a,b,c\}$ est normale.*

Nous admettons ce théorème, rappelons le principe de la preuve. Quitte à conjuguer, on suppose $\{a,b,c\} = \{0,1,\infty\}$. Le revêtement universel de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ est le disque $\mathbb{D}$, et toute application holomorphe $\mathbb{D} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ se relève en une application holomorphe $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, laquelle décroît la métrique de Poincaré par le théorème A.14. On en déduit une majoration uniforme de la dérivée sphérique, donc l'équicontinuité par le critère de Marty, et le théorème A.17 conclut. Une démonstration complète se trouve dans [11], §3, ou [2], chapitre 3.

**Remarque 1.17.** Le nombre 3 est optimal : la famille $\{z \mapsto z^n\}_{n\geqslant 1}$ évite 0 et $\infty$ sur $\mathbf{C}^*$ sans être normale sur $U$. Le contraste avec le théorème 1.15 est frappant : éviter un ouvert non vide et éviter trois points ont la même force.

Nous aurons besoin d'un dernier énoncé élémentaire, qui exprime que le degré est une fonction continue.

**Lemme 1.18.** *Soit $(f_n)$ une suite d'applications rationnelles convergeant uniformément sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ vers une application $g$. Alors $g$ est rationnelle et $\deg f_n = \deg g$ pour $n$ assez grand.*

*Démonstration.* L'application $g$ est holomorphe comme limite uniforme d'applications holomorphes, donc rationnelle. Soit $b \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une valeur non critique de $g$, et soient $a_1,\dots,a_k$ ses préimages, $k = \deg g$ : choisissons des voisinages disjoints $V_i \ni a_i$ sur lesquels $g-b$ ne s'annule qu'en $a_i$ et où $g$ est injective. Par le théorème de Rouché appliqué dans une carte, $f_n - b$ possède exactement un zéro dans chaque $V_i$ pour $n$ grand, d'où $\deg f_n \geqslant k$. Par ailleurs $g$ prend la valeur $b$ exactement $k$ fois ; si l'on avait $\deg f_n > k$ le long d'une sous-suite, une préimage supplémentaire $a'_n$ resterait à distance positive de $\{a_1,\dots,a_k\}$ et, par compacité, convergerait vers une préimage de $b$ par $g$ hors de cet ensemble, ce qui est absurde. □

## 1.4. **Exercices.**

**Exercice 1.19.** Vérifier que $\sigma$ définie par (10) est bien une distance et qu'elle induit sur $\mathbf{C}$ la topologie usuelle. Montrer que $z \mapsto 1/z$ est une isométrie pour $\sigma$.

**Exercice 1.20.** Déterminer les points critiques et les valeurs critiques de $z \mapsto z^d$, de $z \mapsto z^2 + c$, et de $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Vérifier la formule de Riemann–Hurwitz sur ces exemples.

**Exercice 1.21.** Montrer que tout polynôme de degré 2 est conjugué par une application affine à un unique polynôme de la forme $z \mapsto z^2 + c$. Montrer que tout polynôme de degré 3 unitaire et centré est conjugué à un polynôme $z^3 + az + b$, et que $(a,b)$ et $(a,-b)$ donnent des polynômes conjugués.

**Exercice 1.22.** On appelle *dérivée sphérique* de $f$ la quantité $f^\sharp(z) = \frac{|f'(z)|(1+|z|^2)}{1+|f(z)|^2}$. Montrer que $f^\sharp = (1/f)^\sharp$ et que $\mathcal{F}$ est normale sur $U$ si et seulement si $\left\{f^\sharp \mid f \in \mathcal{F}\right\}$ est uniformément bornée sur tout compact de $U$ (critère de Marty).

**Exercice 1.23.** Montrer que la famille $\{z \mapsto z^n\}_{n\geqslant 1}$ est normale sur $\mathbb{D}$ et sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\overline{\mathbb{D}}$, mais en aucun point de $\mathbb{S}^1$.

## 2. Les ensembles de Fatou et de Julia

Dans tout ce chapitre, $f$ désigne une application rationnelle de degré $d \geqslant 2$. Nous partageons la sphère en deux parties : l'ouvert où la dynamique est stable, et son complémentaire. Toute la difficulté, et tout l'intérêt, vient de ce que cette définition est purement qualitative : elle ne dit rien de la taille ni de la forme des deux ensembles obtenus. Nous verrons pourtant qu'on peut en tirer, à l'aide du seul théorème de Montel, une description remarquablement précise : l'ensemble de Julia est un compact non vide, parfait, totalement invariant, minimal parmi les fermés totalement invariants infinis, sur lequel la dynamique est transitive et les points périodiques répulsifs denses.

On rappelle qu'une application holomorphe est ouverte : l'image directe d'un ouvert est ouvert (voir l'annexe).

### 2.1. **Définitions et invariance.**

**Définition 2.1.** L'*ensemble de Fatou* $\mathcal{F}(f)$ est l'ensemble des points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ au voisinage desquels la famille $(f^n)_{n\geqslant 0}$ est normale. L'*ensemble de Julia* est son complémentaire $\mathcal{J}(f) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\mathcal{F}(f)$.

Par construction $\mathcal{F}(f)$ est ouvert et $\mathcal{J}(f)$ est compact. Une composante connexe de $\mathcal{F}(f)$ est appelée *composante de Fatou*.

**Proposition 2.2.** *Soit $f$ rationnelle de degré $d \geqslant 2$.*

*(1) $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{J}(f)$ sont* totalement invariants *: $f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f) = f(\mathcal{F}(f))$, et de même pour $\mathcal{J}(f)$.*

*(2) Pour tout $p \geqslant 1$, $\mathcal{F}(f^p) = \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f)$.*

*(3) Si $\phi$ est une homographie, $\mathcal{J}(\phi f\phi^{-1}) = \phi(\mathcal{J}(f))$.*

*Démonstration.* (1) Soit $a \in \mathcal{F}(f)$ et $V$ un voisinage de $a$ sur lequel $(f^n)$ est normale. Si $b$ vérifie $f(b) = a$, alors $(f^n)$ est normale sur $f^{-1}(V) \ni b$ puisque $f^n$ y coïncide avec $f^{n-1}\circ f$ et que la composition à droite par une application fixée préserve la convergence uniforme sur les compacts. Ainsi $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Réciproquement, montrons que $f(V) \subset \mathcal{F}$, ce qui donnera $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ et, joint à la surjectivité de $f$, l'égalité $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ puis $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. L'ensemble $f(V)$ est un voisinage ouvert de $f(a)$. Soit $(f^{n_k})$ une suite ; par normalité sur $V$, quitte à extraire, $f^{n_k+1} = f^{n_k}\circ f$ converge uniformément sur les compacts de $V$ vers une application $\tilde{g}$. Comme $f^{n_k+1}(z)$ ne dépend que de $f(z)$, la limite $\tilde{g}$ ne dépend que de $f(z)$ et définit donc $g$ sur $f(V)$ par $g(f(z)) = \tilde{g}(z)$. Enfin tout compact $K \subset f(V)$ s'écrit $K \subset f(K')$ pour un compact $K' \subset V$, d'où $\sup_K \sigma(f^{n_k}, g) \leqslant \sup_{K'} \sigma(f^{n_k+1}, \tilde{g}) \to 0$.

(2) L'inclusion $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^p)$ est claire, une sous-suite d'une famille normale étant normale. Inversement, si $(f^{pn})_n$ est normale sur $V$. Prenons une suite $(f^{n_k})$. Il existe $j \in \{0,\dots,p-1\}$ telle

que une infinité de $n_k$ soit congru à $j$ modulo $p$.On remplace $n_k$ par cette sous-suite et on écrite la division euclidienne de $n_k$ par $p$ : $n_k = m_k p + j$. On a

$$f^{m_k p+j} = f^j \circ f^{m_k p}. \tag{26}$$

Maintenant par normalité quitte à remplacer par une sous-suite on a que $f^{m_k p}$ converge uniformément sur tout compact $K$ de $V$ vers une fonction $g$. On a alors que $f^{m_k p+j}$ converge uniformément vers $f^j \circ g$ car $f^j : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est continue et donc uniformément continue car $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compact.

(3) Immédiat puisque $(\phi f \phi^{-1})^n = \phi f^n \phi^{-1}$ et que $\phi$ est un homéomorphisme de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. □

**Proposition 2.3.** *Si $d \geqslant 2$, alors $\mathcal{J}(f) \neq \varnothing$.*

*Démonstration.* Si $\mathcal{J}(f) = \varnothing$, la famille $(f^n)$ est normale sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tout entier, donc, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ étant compact, une sous-suite $(f^{n_k})$ converge uniformément sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ vers une application rationnelle $g$. Le lemme 1.18 donne alors $\deg f^{n_k} = \deg g$ pour $k$ grand. Or $\deg f^{n_k} = d^{n_k} \to \infty$ : contradiction. □

## 2.2. **Points périodiques.**

**Définition 2.4.** Soit $a$ un point périodique de $f$ de période exacte $p$, c'est-à-dire $f^p(a) = a$ et $p$ est minimal. Le *multiplicateur* du cycle est $\lambda = (f^p)'(a)$, calculé dans une carte quelconque en $a$. Le cycle est dit *attractif* si $|\lambda| < 1$, *superattractif* si $\lambda = 0$, *répulsif* si $|\lambda| > 1$, *indifférent* si $|\lambda| = 1$.

Le multiplicateur ne dépend ni de la carte choisie ni du point du cycle : la règle de dérivation composée montre que $(f^p)'$ prend la même valeur en chaque point du cycle, et un changement de carte le multiplie par un facteur et son inverse.

**Proposition 2.5.** *Un cycle attractif (en particulier superattractif) est contenu dans $\mathcal{F}(f)$ ; un cycle répulsif est contenu dans $\mathcal{J}(f)$.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer $f$ par $f^p$, ce qui ne change pas les ensembles de Fatou et de Julia, on suppose $p = 1$ et, quitte à conjuguer, $a = 0 \in \mathbf{C}$. Si $|\lambda| < 1$, choisissons $|\lambda| < c < 1$ ; il existe $r > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant c\,|z|$ pour $|z| \leqslant r$, d'où $|f^n(z)| \leqslant c^n r$ sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ : la suite $(f^n)$ converge uniformément vers 0 sur ce disque, donc $0 \in \mathcal{F}(f)$. Si $|\lambda| > 1$ et si $(f^{n_k})$ convergeait uniformément au voisinage de 0 vers $g$, alors par la formule de Cauchy $(f^{n_k})'(0) \to g'(0) \in \mathbf{C}$ ; or $|(f^{n_k})'(0)| = |\lambda|^{n_k} \to \infty$. □

L'ouvert

$$\mathcal{B}(a) = \left\{ z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \;\middle|\; f^{pn}(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} a \right\} \tag{27}$$

est appelé *bassin d'attraction* du point attractif $a$ ; c'est un ouvert contenu dans $\mathcal{F}(f)$ et sa frontière est contenue dans $\mathcal{J}(f)$ (exercice 2.19).

Les deux théorèmes qui suivent décrivent la dynamique locale au voisinage d'un point fixe et seront utilisés au chapitre 4.

**Théorème 2.6** (Linéarisation de Kœnigs)**.** *Soit $f$ holomorphe au voisinage de $0$ avec $f(0)=0$ et $\lambda = f'(0)$ vérifiant $0<|\lambda|<1$. Alors il existe un voisinage $V$ de $0$ et une application holomorphe injective $\varphi : V \to \mathbf{C}$ avec $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)=1$ telle que*

$$\varphi \circ f = \lambda \varphi \quad \text{sur } V. \tag{28}$$

*De plus $\varphi$ est unique sous ces conditions. Le même énoncé vaut pour $|\lambda|>1$ en appliquant ce qui précède à la branche locale de $f^{-1}$ fixant $0$.*

*Démonstration.* Choisissons $c$ avec $|\lambda|<c<1$ et $c^2<|\lambda|$, ce qui est possible dès que $|\lambda|<c<\sqrt{|\lambda|}$. Il existe $r>0$ et $M>0$ tels que, sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$,

$$|f(z)| \leqslant c\,|z| \qquad \text{et} \qquad |f(z)-\lambda z| \leqslant M\,|z|^2 . \tag{29}$$

Posons $\varphi_n = \lambda^{-n} f^n$. La première estimée donne $|f^n(z)| \leqslant c^n\,|z|$, et la seconde

$$|\varphi_{n+1}(z)-\varphi_n(z)| = |\lambda|^{-n-1}\,|f(f^n(z))-\lambda f^n(z)| \leqslant \frac{Mr^2}{|\lambda|}\left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n . \tag{30}$$

Comme $c^2<|\lambda|$, la série télescopique converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ et $\varphi = \lim \varphi_n$ est holomorphe, avec $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0) = \lim \lambda^{-n}(f^n)'(0) = 1$. L'identité $\varphi_n \circ f = \lambda \varphi_{n+1}$ passe à la limite et donne (28). Enfin $\varphi$ est injective au voisinage de $0$ car $\varphi'(0)\neq 0$. Pour l'unicité, si $\psi$ est une autre solution, $h = \psi \circ \varphi^{-1}$ commute à $z \mapsto \lambda z$ et vérifie $h(0)=0$, $h'(0)=1$ ; en comparant les développements en série on trouve $h = \mathrm{id}$. □

**Théorème 2.7** (Böttcher)**.** *Soit $f(z) = a_k z^k + O(z^{k+1})$ holomorphe au voisinage de $0$, avec $k \geqslant 2$ et $a_k \neq 0$. Alors il existe un voisinage $V$ de $0$ et $\varphi : V \to \mathbf{C}$ holomorphe injective avec $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)\neq 0$, telle que*

$$\varphi \circ f = \varphi^k \quad \text{sur } V. \tag{31}$$

*L'application $\varphi$ est unique à multiplication près par une racine $(k-1)$-ième de l'unité.*

*Démonstration (esquisse).* Quitte à conjuguer par une homothétie on suppose $a_k = 1$, de sorte que $f(z) = z^k(1+u(z))$ avec $u(0)=0$. Sur un disque $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ assez petit on a $|f(z)| \leqslant |z|^k \cdot 2 \leqslant |z|/2$ et l'on peut définir la branche principale $(1+u)^{1/k^n}$. On pose alors $\varphi_n(z) = (f^n(z))^{1/k^n}$, où la racine est choisie de sorte que $\varphi_n(z)/z \to 1$ en $0$ ; explicitement

$$\varphi_n(z) = z \prod_{j=0}^{n-1} \left(1+u\left(f^j(z)\right)\right)^{1/k^{j+1}} . \tag{32}$$

Comme $\left|f^j(z)\right| \leqslant 2^{-j}\,|z|$, on a $\left|u(f^j(z))\right| \leqslant C 2^{-j}$ et le produit infini converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ vers une fonction $\varphi$ ne s'annulant qu'en $0$, avec $\varphi'(0)=1$. L'identité $\varphi_n(f(z)) = \varphi_{n+1}(z)^k$ passe à la limite et donne (31). L'unicité se démontre comme au théorème 2.6. □

Le cas indifférent, $|\lambda| = 1$, est beaucoup plus délicat : le point fixe peut être linéarisable (*point de Siegel*, il est alors dans $\mathcal{F}$) ou non (il est alors dans $\mathcal{J}$), et le cas parabolique $\lambda^q = 1$ relève de la théorie de Leau–Fatou. Nous n'en aurons pas besoin ; voir [11], §8–11.

2.3. **Propriétés de l'ensemble de Julia.** Tout ce qui suit repose sur le lemme d'expansion suivant, conséquence directe du grand théorème de Montel.

**Lemme 2.8** (Propriété d'explosion)**.** *Soit $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et $U$ un voisinage ouvert de $z_0$. Alors, pour tout $m \geqslant 0$, l'ensemble*

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \bigcup_{n \geqslant m} f^n(U) \tag{33}$$

*contient au plus deux points.*

*Démonstration.* Si cet ensemble contenait trois points distincts $a, b, c$, la famille $(f^n)_{n \geqslant m}$ serait une famille d'applications holomorphes de $U$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{a, b, c\}$, donc normale par le théorème 1.16 ; comme $(f^n)_{n<m}$ est une famille finie, $(f^n)_{n \geqslant 0}$ serait normale sur $U$, contredisant $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. □

**Définition 2.9.** Un point $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est dit *exceptionnel* si son orbite inverse $\bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(a)$ est finie. On note $E_f$ l'ensemble des points exceptionnels.

**Proposition 2.10.** *L'ensemble $E_f$ contient au plus deux points, et $E_f \subset \mathcal{F}(f)$. Si $\#E_f = 1$, $f$ est conjuguée à un polynôme ; si $\#E_f = 2$, $f$ est conjuguée à $z \mapsto z^{\pm d}$.*

*Démonstration.* Soit $a \in E_f$ et $A = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(a)$, fini par hypothèse. On a $f^{-1}(A) \subset A$, et comme $f$ est surjective $f(f^{-1}(A)) = A$, d'où $\#f^{-1}(A) \geqslant \#A$ et finalement $f^{-1}(A) = A$. Ainsi $f$ induit une bijection de $A$ et chaque $x \in A$ a une unique préimage $y \in A$ ; la proposition 1.11 donne $\deg_y f = d$, donc $y$ contribue $d-1$ à la somme de Riemann–Hurwitz (22). Il vient $\#A\,(d-1) \leqslant 2d-2$, soit $\#A \leqslant 2$. Comme $A$ est réunion d'orbites arrières de points exceptionnels, ceci montre $\#E_f \leqslant 2$. Chaque point de $A$ est alors périodique de période 1 ou 2 avec $\deg_y f = d \geqslant 2$ : c'est un point superattractif, donc dans $\mathcal{F}(f)$ par la proposition 2.5. Les deux derniers énoncés résultent de la proposition 1.13 et, pour $\#E_f = 2$, du fait qu'après conjugaison envoyant les deux points sur 0 et $\infty$, $f$ est une application rationnelle dont 0 et $\infty$ sont les seules préimages d'eux-mêmes, donc $f(z) = cz^{\pm d}$, et l'on ramène $c$ à 1 par une homothétie. □

**Théorème 2.11.** *Soit $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus E_f$. Alors*

$$\mathcal{J}(f) \subset \overline{\bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(a)}, \tag{34}$$

*avec égalité si $a \in \mathcal{J}(f)$.*

*Démonstration.* Soient $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et $U$ un voisinage de $z_0$. L'orbite arrière $O^-(a) = \bigcup_n f^{-n}(a)$ est infinie, donc contient au moins trois points ; par le lemme 2.8, l'un d'eux, disons $b \in f^{-m}(a)$, appartient à $f^N(U)$ pour un certain $N$. Il existe donc $w \in U$ avec $f^{N+m}(w) = a$, c'est-à-dire $U \cap O^-(a) \neq \varnothing$.

Ceci vaut pour tout voisinage $U$, d'où (34). Si de plus $a \in \mathcal{J}(f)$, l'invariance totale donne $O^-(a) \subset \mathcal{J}(f)$, et l'ensemble de Julia étant fermé on a l'inclusion réciproque. □

**Théorème 2.12.** *Soit $f$ rationnelle de degré $d \geqslant 2$.*

*(1) $\mathcal{J}(f)$ est infini, et même parfait (fermé sans point isolé); en particulier il est non dénombrable.*

*(2) $\mathcal{J}(f)$ est le plus petit fermé totalement invariant de cardinal $\geqslant 3$.*

*(3) Ou bien $\mathcal{J}(f) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, ou bien $\mathcal{J}(f)$ est d'intérieur vide.*

*(4) La dynamique est topologiquement transitive sur $\mathcal{J}(f)$ : pour tous ouverts $U, V$ rencontrant $\mathcal{J}(f)$, il existe $n$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

*Démonstration.* (1) Si $\mathcal{J}(f)$ était fini, il serait totalement invariant, donc formé de points exceptionnels, donc contenu dans $\mathcal{F}(f)$ par la proposition 2.10 : absurde puisqu'il est non vide. Il est donc infini. Montrons qu'aucun point $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ n'est isolé. Soit $U$ un voisinage de $z_0$. Choisissons $a \in \mathcal{J}(f)$ n'appartenant pas à l'orbite positive $\{f^n(z_0)\}_{n\geqslant 0}$ si celle-ci est finie, et $a \in \mathcal{J}(f)\backslash\{z_0\}$ quelconque sinon ; c'est possible car $\mathcal{J}(f)$ est infini. Par le théorème 2.11 et le lemme 2.8 appliqué avec $m$ arbitrairement grand, $U$ rencontre $f^{-n}(a) \subset \mathcal{J}(f)$ pour une infinité de $n$. Un tel point d'intersection $w$ vérifie $f^n(w) = a$ ; s'il valait $z_0$ pour tous ces $n$, on aurait $f^n(z_0) = a$ pour une infinité de $n$, ce qui est exclu par le choix de $a$. Donc $U$ contient un point de $\mathcal{J}(f)$ distinct de $z_0$.

(2) Soit $E$ un fermé totalement invariant avec $\#E \geqslant 3$. Comme $\#E_f \leqslant 2$, il existe $a \in E\backslash E_f$, et alors $O^-(a) \subset E$ ; le théorème 2.11 donne $\mathcal{J}(f) \subset \overline{O^-(a)} \subset E$.

(3) Si $U \subset \mathcal{J}(f)$ est un ouvert non vide, le lemme 2.8 montre que $\bigcup_n f^n(U)$, qui est contenu dans $\mathcal{J}(f)$ par invariance, omet au plus deux points ; comme $\mathcal{J}(f)$ est fermé et parfait, $\mathcal{J}(f) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

(4) Soient $U, V$ rencontrant $\mathcal{J}(f)$, et $z_0 \in U \cap \mathcal{J}(f)$. Par le lemme 2.8, $\bigcup_n f^n(U)$ omet au plus deux points, tous exceptionnels donc dans $\mathcal{F}(f)$ ; il contient donc $\mathcal{J}(f)$, et en particulier rencontre $V$. □

**Théorème 2.13** (Fatou, Julia)**.** *L'ensemble de Julia est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de $f$.*

*Démonstration.* Un point périodique répulsif est dans $\mathcal{J}(f)$ par la proposition 2.5, et $\mathcal{J}(f)$ est fermé : une inclusion est acquise. Montrons que les points périodiques sont denses dans $\mathcal{J}(f)$. Soient $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et $U$ un voisinage ; quitte à rétrécir et à remplacer $z_0$ par un point voisin de $\mathcal{J}(f)$ — possible car $\mathcal{J}(f)$ est parfait — on peut supposer que $z_0$ n'est ni critique, ni valeur critique, ni périodique. Choisissons $b \in f^{-1}(z_0)$ avec $b \neq z_0$, puis un voisinage connexe $V \subset U$ de $z_0$ et la branche $g : V \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de $f^{-1}$ avec $g(z_0) = b$ ; quitte à rétrécir $V$, on a $\overline{g(V)} \cap \overline{V} = \varnothing$. Supposons par l'absurde que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $z \in V$, on ait $f^n(z) \neq z$ et $f^n(z) \neq g(z)$. Alors les fonctions

$$h_n = \frac{f^n - \mathrm{id}}{f^n - g} \tag{35}$$

sont holomorphes sur $V$ et évitent 0, $\infty$ et 1 — cette dernière valeur car $h_n(z) = 1$ équivaudrait à $z = g(z)$, exclu par $\overline{g(V)} \cap \overline{V} = \varnothing$. Le théorème 1.16 montre que $(h_n)$ est normale ; soit $h$ la limite

d'une sous-suite. Si $h \equiv 1$, alors $\frac{g-\mathrm{id}}{f^{n_k}-g} = h_{n_k} - 1 \to 0$ uniformément sur les compacts, et comme $g - \mathrm{id}$ ne s'annule pas, $f^{n_k} \to \infty$ uniformément sur les compacts de $V$. Sinon, $h \not\equiv 1$ et, en résolvant (35),

$$f^{n_k} = \frac{\mathrm{id} - g\, h_{n_k}}{1 - h_{n_k}} \tag{36}$$

converge uniformément sur les compacts de l'ouvert $V \backslash h^{-1}(1)$, lequel est $V$ privé d'un ensemble discret ; on conclut par le principe du maximum appliqué à la distance sphérique que la convergence a lieu sur $V$ tout entier. Dans les deux cas $(f^n)$ est normale sur $V$, ce qui contredit $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Il existe donc $n \geqslant 1$ et $z \in V$ avec $f^n(z) = z$, ou bien $f^n(z) = g(z)$, auquel cas $f^{n+1}(z) = f(g(z)) = z$ : dans les deux cas $U$ contient un point périodique.

Enfin, un théorème de Fatou que nous admettons ([11], §12, ou [2], §9.6) affirme que $f$ possède au plus $2d-2$ cycles non répulsifs. Les points périodiques non répulsifs étant en nombre fini et $\mathcal{J}(f)$ étant parfait, les points périodiques répulsifs sont encore denses dans $\mathcal{J}(f)$. □

2.4. **Le cas polynomial.** À partir de maintenant, et sauf mention explicite du contraire, $f$ désigne un *polynôme* de degré $d \geqslant 2$. Le point $\infty$ est alors un point fixe superattractif totalement invariant, et son bassin

$$\mathcal{B}(\infty) = \{z \in \mathbf{C} \mid f^n(z) \to \infty\} \tag{37}$$

est un ouvert connexe de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ contenant $\infty$.

**Définition 2.14.** L'*ensemble de Julia rempli* de $f$ est

$$K_f = \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; (f^n(z))_{n \geqslant 0} \text{ est bornée} \right\} = \mathbf{C} \backslash \mathcal{B}(\infty). \tag{38}$$

**Proposition 2.15.** *L'ensemble $K_f$ est un compact non vide, totalement invariant, et*

$$\mathcal{J}(f) = \partial K_f = \partial \mathcal{B}(\infty). \tag{39}$$

*De plus $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \backslash K_f = \mathcal{B}(\infty)$ est connexe : $K_f$ est* plein.

*Démonstration.* Choisissons $R \geqslant 1$ tel que $|f(z)| \geqslant 2|z|$ pour $|z| \geqslant R$ ; alors $|f^n(z)| \geqslant 2^n |z| \to \infty$, donc $K_f \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R)$ et $K_f$ est fermé comme intersection des fermés $f^{-n}(\overline{\mathbb{D}}(0,R))$. Il est non vide car $f$ a un point fixe dans $\mathbf{C}$. L'invariance totale est immédiate. Sur $\operatorname{Int} K_f$ la suite $(f^n)$ est uniformément bornée donc normale (théorème 1.15), et sur $\mathcal{B}(\infty)$ elle converge uniformément sur les compacts vers $\infty$ : ces deux ouverts sont dans $\mathcal{F}(f)$. Si $z_0 \in \partial K_f$, tout voisinage de $z_0$ contient des points d'orbite bornée et des points d'orbite tendant vers $\infty$, de sorte qu'aucune sous-suite de $(f^n)$ ne peut converger uniformément au voisinage de $z_0$ : donc $\partial K_f \subset \mathcal{J}(f)$, et (39) suit. Enfin la connexité de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \backslash K_f$ sera obtenue au chapitre 4 comme conséquence du principe du maximum appliqué à la fonction de Green (proposition 4.3). □

**Exemple 2.16.** Pour $f(z) = z^d$ on a $K_f = \overline{\mathbb{D}}$ et $\mathcal{J}(f) = \mathbb{S}^1$ : en effet $|f^n(z)| = |z|^{d^n}$ tend vers 0, vers $\infty$ ou reste égal à 1 selon que $|z| < 1$, $|z| > 1$ ou $|z| = 1$. La dynamique sur $\mathcal{J}(f)$ est celle de $\theta \mapsto d\theta$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ : c'est le prototype d'une dynamique chaotique. Ici $E_f = \{0, \infty\}$.

**Exemple 2.17.** Soit $f(z) = z^2 - 2$ et $\pi(w) = w + 1/w$. On vérifie $\pi(w^2) = f(\pi(w))$, de sorte que $\pi$ semi-conjugue $w \mapsto w^2$ à $f$. Comme $\pi(\mathbb{S}^1) = [-2,2]$ et que $\pi$ envoie $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\overline{\mathbb{D}}$ biholomorphiquement sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash[-2,2]$, on en déduit $K_f = \mathcal{J}(f) = [-2,2]$. C'est un exemple où $K_f$ est d'intérieur vide.

**Exemple 2.18.** Soit $f(z) = z^2 + c$ avec $|c|$ grand. Si $|c| > \frac{1}{4}\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$, le point critique 0 vérifie $f^n(0) \to \infty$ et l'on montre que $\mathcal{J}(f) = K_f$ est un ensemble de Cantor sur lequel $f$ est conjuguée au décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ (exercice 2.21). Nous verrons au chapitre 4 que la dichotomie « $K_f$ connexe » contre « $K_f$ de Cantor » est gouvernée par le comportement des points critiques.

### 2.5. **Exercices.**

**Exercice 2.19.** Soit $a$ un point périodique attractif de $f$. Montrer que $\partial\mathcal{B}(a) = \mathcal{J}(f)$ si $f$ n'a pas d'autre cycle attractif, et en général que $\partial\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{J}(f)$.

**Exercice 2.20.** Montrer que $\mathcal{J}(f^{-1})$ n'a pas de sens, mais que si $\phi$ est une homographie commutant à $f$ alors $\phi(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$. En déduire que $\mathcal{J}(z^d)$ est invariant par toutes les rotations.

**Exercice 2.21.** Soit $f(z) = z^2 + c$ avec $|c| > 4$. Montrer que $D = \overline{\mathbb{D}}\left(0, 2\,|c|^{1/2}\right)$ vérifie $f^{-1}(D) \subset D$ et que $f^{-1}(D)$ a deux composantes connexes $D_0, D_1$ sur chacune desquelles $f$ est injective. En déduire que $K_f = \bigcap_n f^{-n}(D)$ est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et que $f$ y est conjuguée au décalage.

**Exercice 2.22.** Montrer que si $f$ est un polynôme réel (à coefficients réels), $K_f$ et $\mathcal{J}(f)$ sont symétriques par rapport à $\mathbf{R}$. Que dire de $f(z) = z^d$ et des symétries de $\mathcal{J}(f)$ ?

**Exercice 2.23.** Montrer que si $\mathcal{J}(f)$ est totalement discontinu alors $\mathcal{J}(f) = K_f$. Montrer réciproquement que si $\operatorname{Int} K_f \neq \varnothing$ alors $\mathcal{J}(f)$ n'est pas totalement discontinu.

**Exercice 2.24.** Déduire du théorème 2.12 qu'il existe un point de $\mathcal{J}(f)$ dont l'orbite est dense dans $\mathcal{J}(f)$. (On pourra utiliser le théorème de Baire.)

## 3. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DU POTENTIEL

Ce chapitre est un cours de théorie du potentiel dans le plan, rédigé de façon autonome. Le fil conducteur est le suivant : à toute fonction sous-harmonique $u$ est associée une mesure positive $dd^c u = \frac{1}{2\pi}\Delta u$, sa *mesure de Riesz*, et réciproquement toute mesure positive est, localement, la mesure de Riesz d'un *potentiel logarithmique*. Ce dictionnaire entre fonctions et mesures a deux vertus. D'une part il transforme des questions de convergence de mesures, difficiles à manipuler, en questions de convergence de fonctions, où l'on dispose du principe du maximum : c'est le mécanisme de toutes les démonstrations du chapitre 5. D'autre part il permet d'associer à tout compact une mesure canonique, sa *mesure d'équilibre*, qui pour un ensemble de Julia rempli se révélera être exactement la mesure d'entropie maximale.

Les fonctions sous-harmoniques ne sont pas continues en général, et toute la théorie repose sur la notion plus faible de *semi-continuité supérieure* ; nous commençons donc par un paragraphe qui lui

est consacré. Vient ensuite l'outil technique central, la *régularisation par convolution*, qui permet de ramener la plupart des énoncés au cas des fonctions lisses. Tous les énoncés du chapitre sont démontrés, à l'exception de la valeur de la capacité d'un segment, laissée en exercice. Nous utiliserons librement la résolution du problème de Dirichlet dans un disque par l'intégrale de Poisson, ainsi que les énoncés du chapitre A. Les compléments se trouvent dans [12], chapitres 2 et 3, dans [14], ou dans [9], chapitre 3.

3.1. **Fonctions semi-continues supérieurement.** La fonction $z \mapsto \log|z|$ est le prototype de ce que nous allons étudier. Elle n'est pas continue en 0, où elle vaut $-\infty$, mais elle y possède une demi-continuité : elle ne peut pas « sauter vers le haut ». C'est cette propriété que nous isolons.

**Définition 3.1.** Soit $X$ un espace métrique et $u : X \to [-\infty, +\infty[$. On dit que $u$ est *semi-continue supérieurement* (s.c.s.) *en* $a \in X$ si pour tout réel $t > u(a)$ il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $u < t$ sur $V$, et que $u$ est s.c.s. si elle l'est en tout point. Une fonction $v : X \to ]-\infty, +\infty]$ est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si $-v$ est s.c.s.

**Proposition 3.2.** *Pour $u : X \to [-\infty, +\infty[$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) $u$ est semi-continue supérieurement ;*

*(2) pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{u < t\}$ est ouvert ;*

*(3) pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{u \geqslant t\}$ est fermé ;*

*(4) l'*hypographe $\{(x,t) \in X \times \mathbf{R} \mid t \leqslant u(x)\}$ *est fermé dans $X \times \mathbf{R}$ ;*

*(5) pour tout $a \in X$ et toute suite $x_n \to a$, on a $\limsup_n u(x_n) \leqslant u(a)$.*

*Démonstration.* (1) $\Leftrightarrow$ (2) est une reformulation, (2) $\Leftrightarrow$ (3) un passage au complémentaire. (2) $\Rightarrow$ (5) : si $t > u(a)$, alors $x_n \in \{u < t\}$ pour $n$ grand, donc $\limsup u(x_n) \leqslant t$. (5) $\Rightarrow$ (4) : si $(x_n, t_n) \to (a,t)$ avec $t_n \leqslant u(x_n)$, alors $t = \lim t_n \leqslant \limsup u(x_n) \leqslant u(a)$. (4) $\Rightarrow$ (2) : si $x_n \to a$ avec $u(x_n) \geqslant t$, les points $(x_n, t)$ sont dans l'hypographe, donc $(a,t)$ aussi, c'est-à-dire $u(a) \geqslant t$ ; ainsi $\{u \geqslant t\}$ est fermé. □

**Proposition 3.3.** *(1) Si $u, v$ sont s.c.s. et $s,t \geqslant 0$, alors $su + tv$ et $\max(u,v)$ sont s.c.s.*

*(2) L'infimum d'une famille quelconque de fonctions s.c.s. est s.c.s. ; en particulier une limite décroissante de fonctions s.c.s. est s.c.s.*

*(3) Si $u$ est s.c.s. et $\phi : [-\infty, +\infty[ \to [-\infty, +\infty[$ est continue croissante, alors $\phi \circ u$ est s.c.s.*

*(4) Si $K$ est compact et $u$ s.c.s. sur $K$, alors $u$ est majorée et atteint sa borne supérieure.*

*(5) Une fonction est continue si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i.*

*Démonstration.* (1) Si $t > su(a) + tv(a)$, on peut écrire $t = t_1 + t_2$ avec $t_1 > su(a)$ et $t_2 > tv(a)$, et les voisinages correspondants s'intersectent. Pour le maximum, $\{\max(u,v) < t\} = \{u < t\} \cap \{v < t\}$.

(2) Si $u = \inf_i u_i$, alors $\{u < t\} = \bigcup_i \{u_i < t\}$ est ouvert.

(3) Si $t > \phi(u(a))$, la continuité et la croissance de $\phi$ donnent $s > u(a)$ avec $\phi(s) < t$ (si $u(a) = -\infty$, prendre $s$ assez négatif) ; sur $\{u < s\}$ on a $\phi \circ u \leqslant \phi(s) < t$.

(4) Les fermés $\{u \geqslant t\}$, $t \in \mathbf{R}$, sont emboîtés ; si aucun n'était vide, leur intersection serait non vide par compacité, ce qui donnerait un point où $u = +\infty$ : donc $u$ est majorée. Soit $M = \sup_K u$ ; les fermés $\{u \geqslant M - 1/n\}$ sont non vides et emboîtés, donc d'intersection non vide, et $u = M$ en tout point de cette intersection.

(5) est clair. □

**Exemple 3.4.** L'indicatrice $\mathbf{1}_F$ d'une partie $F$ est s.c.s. si et seulement si $F$ est fermée. Si $h : X \to \mathbf{C}$ est continue, alors $\log|h|$ est continue à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$, donc s.c.s. ; plus généralement toute fonction continue à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est s.c.s.

Le théorème suivant est l'outil qui rend la semi-continuité maniable : il permet d'approcher $u$ par des fonctions continues, et surtout de le faire *par valeurs supérieures*, ce qui autorisera le théorème de convergence monotone.

**Théorème 3.5** (Baire)**.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique et $u : X \to [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement et majorée. Il existe une suite décroissante $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions réelles lipschitziennes sur $X$ telle que $\varphi_n \downarrow u$ ponctuellement. Réciproquement, tout infimum de fonctions continues est semi-continu supérieurement.*

*Démonstration.* La réciproque est la proposition 3.3(2). Si $u \equiv -\infty$ on prend $\varphi_n = -n$ ; sinon posons $M = \sup_X u$ et

$$\varphi_n(x) = \sup_{y\in X} \left(u(y) - n\,d(x,y)\right). \tag{40}$$

*$\varphi_n$ est finie.* On a $\varphi_n \leqslant M$ puisque $u(y) - n\,d(x,y) \leqslant M$, et $\varphi_n(x) \geqslant u(y_0) - n\,d(x,y_0) > -\infty$ pour un $y_0$ où $u(y_0) > -\infty$.

*$\varphi_n$ est $n$-lipschitzienne.* Pour $y$ fixé, l'inégalité triangulaire donne

$$u(y) - n\,d(x,y) \leqslant u(y) - n\,d(x',y) + n\,d(x,x'); \tag{41}$$

en passant au supremum en $y$, $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_n(x') + n\,d(x,x')$, et symétriquement.

*La suite décroît et majore $u$.* La décroissance en $n$ est claire, et $\varphi_n(x) \geqslant u(x)$ en prenant $y = x$ dans (40).

*La limite est $u$.* Soit $L = \lim_n \varphi_n(x) \geqslant u(x)$ et supposons $L > u(x)$ ; choisissons $t$ avec $u(x) < t < L$. Par semi-continuité supérieure il existe $\delta > 0$ tel que $u < t$ sur la boule $B(x,\delta)$. En coupant le supremum de (40) selon que $y \in B(x,\delta)$ ou non,

$$\varphi_n(x) \leqslant \max\left(t,\ M - n\delta\right) = t \qquad \text{dès que } n \geqslant (M-t)/\delta, \tag{42}$$

donc $L \leqslant t$ : contradiction. Le cas $u(x) = -\infty$ est inclus, l'argument donnant $L \leqslant t$ pour tout réel $t$. □

**Remarque 3.6.** Géométriquement, $\varphi_n$ est l'enveloppe supérieure des cônes de pente $n$ dont les sommets parcourent le graphe de $u$ ; c'est aussi la plus petite fonction $n$-lipschitzienne majorant $u$ (exercice 3.9). L'hypothèse de majoration est indispensable à la construction, mais elle est automatique sur un compact par la proposition 3.3(4), ce qui couvrira tous nos usages. L'hypothèse métrique

est également essentielle : sur un espace topologique général, une fonction s.c.s. n'est pas toujours limite d'une *suite* de fonctions continues.

Voici, regroupés, les énoncés d'intégration dont nous nous servirons. Ils expriment tous la même idée : la semi-continuité supérieure se transmet aux intégrales, et elle est compatible avec les passages à la limite *par valeurs supérieures*.

**Proposition 3.7.** *Soit $K$ un espace métrique compact, $\mu$ une mesure positive finie sur $K$, et $u : K \to [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement.*

*(1) L'intégrale $\int u \, d\mu$ est bien définie dans $[-\infty, +\infty[$.*

*(2) Si $(u_n)$ est une suite décroissante de fonctions s.c.s. sur $K$ convergeant vers $u$, alors $\int u_n \, d\mu \downarrow \int u \, d\mu$.*

*(3) Si $(\mu_n)$ est une suite de mesures de probabilité sur $K$ convergeant faiblement vers $\mu$, alors*

$$\limsup_{n\to\infty} \int u \, d\mu_n \leqslant \int u \, d\mu. \tag{43}$$

*Autrement dit, $\nu \mapsto \int u \, d\nu$ est s.c.s. sur $\mathcal{P}(K)$ pour la topologie faible.*

*(4) Si $X$ est un espace métrique et $k : X \times K \to [-\infty, +\infty[$ est s.c.s., alors $x \mapsto \int k(x,w) \, d\mu(w)$ est s.c.s. sur $X$.*

*Démonstration.* (1) La fonction $u$ est borélienne (ses sur-niveaux sont fermés) et majorée par un $M$ ; l'intégrale de $M - u \geqslant 0$ a un sens dans $[0, +\infty]$.

(2) Si $\int u_1 \, d\mu = -\infty$, toutes les intégrales valent $-\infty$. Sinon, $u_1 - u_n$ est une suite croissante de fonctions positives convergeant vers $u_1 - u$, et le théorème de convergence monotone donne $\int (u_1 - u_n) \, d\mu \uparrow \int (u_1 - u) \, d\mu$.

(3) Par le théorème 3.5, il existe des fonctions continues $\varphi_k \downarrow u$. Pour chaque $k$, $\int u \, d\mu_n \leqslant \int \varphi_k \, d\mu_n \to \int \varphi_k \, d\mu$, donc $\limsup_n \int u \, d\mu_n \leqslant \int \varphi_k \, d\mu$ ; on fait tendre $k$ vers l'infini en utilisant (2).

(4) Soit $x_n \to x$ dans $X$. L'ensemble $\{x_n\} \cup \{x\}$ est compact, donc $k \leqslant M$ sur $(\{x_n\} \cup \{x\}) \times K$ par la proposition 3.3(4). Le lemme de Fatou appliqué aux fonctions positives $M - k(x_n, \cdot)$ donne

$$\limsup_n \int k(x_n, w) \, d\mu(w) \leqslant \int \limsup_n k(x_n, w) \, d\mu(w) \leqslant \int k(x, w) \, d\mu(w), \tag{44}$$

la dernière inégalité par semi-continuité supérieure de $k$ au point $(x, w)$. □

L'inégalité (43) peut être stricte, et il est utile d'avoir l'exemple en tête : pour $\mu_n = \delta_{1/n} \to \delta_0$ sur $K = [0,1]$ et $u = \mathbf{1}_{\{0\}}$, on trouve $\int u \, d\mu_n = 0$ et $\int u \, d\mu = 1$. La masse qui s'accumule en 0 ne « voit » la valeur $u(0)$ qu'à la limite, et la semi-continuité supérieure garantit précisément que cela ne peut que faire monter l'intégrale.

*Exercices.*

**Exercice 3.8.** Montrer que $\mathbf{1}_F$ est s.c.s. si et seulement si $F$ est fermé, et que $\mathbf{1}_U$ est s.c.i. si et seulement si $U$ est ouvert. Montrer que le supremum d'une famille quelconque de fonctions s.c.i. est s.c.i. Vérifier que $x \mapsto \operatorname{dist}(x,F)$, qui est un infimum de fonctions continues, est en fait continue, et même 1-lipschitzienne.

**Exercice 3.9.** Avec les notations de (40), montrer que $\varphi_n$ est la plus petite fonction $n$-lipschitzienne majorant $u$. Calculer explicitement $\varphi_n$ pour $u = \mathbf{1}_{\{0\}}$ sur $\mathbf{R}$, puis pour $u(x) = \log|x|$ sur $[-1,1]$ ; vérifier dans ce second cas que $\varphi_n(0) = -1 - \log n$.

**Exercice 3.10.** Donner un exemple de fonction s.c.s. bornée sur $]0,1[$ n'atteignant pas sa borne supérieure. Montrer que si $u$ est s.c.s. sur un espace métrique, alors $\{u = -\infty\}$ est une intersection dénombrable d'ouverts.

**Exercice 3.11.** Soit $u : X \to [-\infty, +\infty[$ localement majorée. On pose $u^*(x) = \limsup_{y\to x} u(y)$, la limite supérieure incluant le point $x$ lui-même. Montrer que $u^*$ est la plus petite fonction s.c.s. majorant $u$ (*régularisée semi-continue supérieure* de $u$). Calculer $u^*$ pour $u = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{R}$.

**Exercice 3.12.** Soient $K, L$ deux compacts métriques, $\mu_n \to \mu$ faiblement sur $K$ et $\nu_n \to \nu$ faiblement sur $L$. Montrer que $\mu_n \otimes \nu_n \to \mu \otimes \nu$ faiblement sur $K \times L$. (Tester sur les fonctions de la forme $\varphi(z)\psi(w)$ et utiliser le théorème de Stone–Weierstrass.) En déduire que si $k$ est s.c.s. sur $K \times K$, l'application $\mu \mapsto \iint k \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\mu$ est s.c.s. sur $\mathcal{P}(K)$.

3.2. **Fonctions harmoniques et sous-harmoniques.** On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ et l'on note $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial\overline{\partial}$ le laplacien, où $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ et $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Cette notation est assez pratique car par les formules de Cauchy-Riemman on a que $f$ est holomorphe si et seulement si

$$\overline{\partial} f = 0. \tag{45}$$

On dit que $f$ est *anti-holomorphe* si $\partial f = 0$. Si $\overline{f}$ est le conjugué complexe de $f$ alors

$$\overline{\partial f} = \overline{\partial} \overline{f}. \tag{46}$$

Ainsi $f$ est holomorphe si et seulement si $\overline{f}$ est anti-holomorphe. Une fonction $h$ de classe $C^2$ sur un ouvert $U$ est *harmonique* si $\Delta h = 0$ ; c'est équivalent à la propriété de la moyenne, et localement à être la partie réelle d'une fonction holomorphe. Rappelons que si $\varphi$ est continue sur $\partial\mathbb{D}(a,r)$, l'intégrale de Poisson

$$\mathcal{P}\varphi(a + \rho e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha) + \rho^2} \, \varphi(a + re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta \tag{47}$$

définit l'unique fonction harmonique sur $\mathbb{D}(a,r)$, continue sur le disque fermé, de valeurs au bord $\varphi$. Pour $u$ définie au voisinage du cercle $\partial\mathbb{D}(a,r)$ et s.c.s., on note

$$M(u,a,r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta \in [-\infty, +\infty[ \tag{48}$$

sa moyenne sur le cercle, bien définie d'après la proposition 3.7(1).

**Définition 3.13.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $u : U \to [-\infty, +\infty[$ est *sous-harmonique* si

(i) $u$ est semi-continue supérieurement, c'est à dire pour tout $x_0 \in U, \limsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$ ;

(ii) $u$ n'est identiquement $-\infty$ sur aucune composante connexe de $U$ ;

(iii) pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$, on a l'inégalité de la moyenne

$$u(a) \leqslant M(u,a,r). \tag{49}$$

Une fonction est harmonique si et seulement si elle et son opposée sont sous-harmoniques. La condition (ii) est une commodité : elle écarte la fonction $-\infty$, qui vérifierait trivialement les deux autres.

**Théorème 3.14** (Principe du maximum)**.** *Soit $u$ sous-harmonique sur un domaine (ouvert connexe) $U$. Si $u$ atteint son maximum en un point de $U$, alors $u$ est constante. Par conséquent, si $U$ est borné et si $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0$ pour tout $\zeta \in \partial U$, alors $u \leqslant 0$ sur $U$.*

*Démonstration.* Soit $M = \sup_U u$ et $A = \{u = M\}$, supposé non vide. L'ensemble $A = \{u \geqslant M\}$ est fermé dans $U$ par semi-continuité supérieure. Montrons qu'il est ouvert. Soient $a \in A$ et $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$. Pour tout $s \leqslant r$, (49) donne $M = u(a) \leqslant M(u,a,s) \leqslant M$, donc $M(u,a,s) = M$ ; comme $u \leqslant M$, la fonction $M - u \geqslant 0$ est d'intégrale nulle sur chaque cercle, donc nulle presque partout sur $\mathbb{D}(a,r)$ pour la mesure de Lebesgue. Si l'on avait $u(b) < M$ pour un $b \in \mathbb{D}(a,r)$, la semi-continuité supérieure fournirait un voisinage de $b$ sur lequel $u < M$, de mesure de Lebesgue strictement positive : contradiction. Donc $\mathbb{D}(a,r) \subset A$, et $A$ est ouvert. Par connexité $A = U$.

Pour la seconde assertion, prolongeons $u$ à $\overline{U}$ en posant $u(\zeta) = \limsup_{z \to \zeta} u(z)$ pour $\zeta \in \partial U$ ; la fonction obtenue est s.c.s. sur le compact $\overline{U}$, donc atteint son maximum $M$ en un point $\zeta$. Si $\zeta \in \partial U$ alors $M \leqslant 0$ ; sinon $u$ est constante égale à $M$ sur $U$, et l'hypothèse au bord donne encore $M \leqslant 0$. □

*Le cas des fonctions de classe $C^2$.*

**Lemme 3.15.** *Soit $u$ de classe $C^2$ au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$. Alors $\rho \mapsto M(u,a,\rho)$ est de classe $C^1$ sur $]0,r]$ et*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} M(u,a,\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\mathbb{D}(a,\rho)} \Delta u \, \mathrm{dLeb}\,. \tag{50}$$

*En particulier $M(u,a,\rho) = u(a) + \frac{\rho^2}{4}\Delta u(a) + o(\rho^2)$ lorsque $\rho \to 0$.*

*Démonstration.* En dérivant sous le signe intégral puis en appliquant la formule de la divergence,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} M(u,a,\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\rho u \left(a + \rho e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial\mathbb{D}(a,\rho)} \partial_n u \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\mathbb{D}(a,\rho)} \Delta u \, \mathrm{dLeb}, \tag{51}$$

où $\partial_n$ est la dérivée normale sortante. En effet, on a

$$u(a + \rho e^{i\theta}) = (a_1 + \rho\cos\theta, a_2 + \rho\sin\theta) \tag{52}$$

et donc

$$\partial_\rho u(a+\rho e^{i\theta}) = \cos\theta u_x + \sin\theta u_y = \nabla u \cdot \overrightarrow{n} \tag{53}$$

où $\overrightarrow{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ est le vecteur normal au cercle $C(a,\rho)$. L'élément de longueur le long de ce cercle est donné par $ds = \rho d\theta$ et cela justifie le calcul. La dernière égalité provient du théorème de la divergence ou du théorème de Green Riemann : si $X$ est un champ de vecteurs alors

$$\iint_D \operatorname{div}(X) = \oint_{\partial D} \langle X, n\rangle ds. \tag{54}$$

Et enfin $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$. Le développement s'obtient en écrivant $\int_{\mathbb{D}(a,\rho)} \Delta u = \pi\rho^2 \Delta u(a) + o(\rho^2)$ par continuité de $\Delta u$, puis en intégrant (50) entre 0 et $\rho$. □

**Proposition 3.16.** *Une fonction $u$ de classe $C^2$ sur $U$ est sous-harmonique si et seulement si $\Delta u \geqslant 0$ sur $U$.*

*Démonstration.* Si $\Delta u \geqslant 0$, le lemme 3.15 montre que $\rho \mapsto M(u,a,\rho)$ est croissante sur $]0,r]$ pour tout $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$, et comme $M(u,a,\rho) \to u(a)$ par continuité, on obtient (49). Réciproquement, si $\Delta u(a) < 0$ en un point, alors $\Delta u < 0$ sur un disque $\mathbb{D}(a,r)$, et (50) montre que $\rho \mapsto M(u,a,\rho)$ est strictement décroissante sur $]0,r[$ ; donc $M(u,a,\rho) < u(a)$ pour $\rho$ petit, ce qui contredit (49). □

*Croissance des moyennes.*

**Proposition 3.17.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$ et $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$. Alors $s \mapsto M(u,a,s)$ est croissante sur $]0,r]$ et $M(u,a,s) \to u(a)$ lorsque $s \to 0$.*

*Démonstration.* Soit $0 < s < t \leqslant r$. La fonction $u$ étant s.c.s. sur le compact $\partial\mathbb{D}(a,t)$, le théorème 3.5 fournit une suite de fonctions continues $\varphi_k$ décroissant vers $u$ sur ce cercle. Soit $h_k = \mathcal{P}\varphi_k$ l'intégrale de Poisson (47) correspondante. La fonction $u - h_k$ est sous-harmonique sur $\mathbb{D}(a,t)$ et vérifie $\limsup_{z\to\zeta}(u-h_k)(z) \leqslant u(\zeta) - \varphi_k(\zeta) \leqslant 0$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}(a,t)$, donc $u \leqslant h_k$ sur $\mathbb{D}(a,t)$ par le théorème 3.14. Il vient

$$M(u,a,s) \leqslant M(h_k,a,s) = h_k(a) = M(\varphi_k,a,t), \tag{55}$$

la première égalité venant de la propriété de la moyenne pour $h_k$ harmonique. La proposition 3.7(2) donne $M(\varphi_k,a,t) \downarrow M(u,a,t)$, d'où $M(u,a,s) \leqslant M(u,a,t)$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, la semi-continuité supérieure donne $u < u(a) + \varepsilon$ sur un disque $\mathbb{D}(a,\delta)$, donc $M(u,a,s) \leqslant u(a) + \varepsilon$ pour $s < \delta$ ; joint à $M(u,a,s) \geqslant u(a)$, cela donne la convergence. □

**Corollaire 3.18.** *Sous les mêmes hypothèses,*

$$u(a) \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} u \, d\mathrm{Leb} \leqslant \sup_{\mathbb{D}(a,r)} u. \tag{56}$$

*Démonstration.* Intégrer (49) contre $2s\,ds$ sur $[0,r]$ et utiliser les coordonnées polaires. □

*Premières propriétés.*

**Proposition 3.19.** *(1) Si $u, v$ sont sous-harmoniques et $s,t \geqslant 0$, alors $su+tv$ et $\max(u,v)$ le sont.*

*(2) Une limite décroissante de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique (si elle n'est pas $\equiv -\infty$ sur une composante), de même qu'une limite uniforme sur les compacts.*

*(3) Si $h$ est holomorphe et non identiquement nulle sur un domaine $U$, alors $\log|h|$ est sous-harmonique sur $U$.*

*(4) Si $h$ est holomorphe et ne s'annule pas sur $U$, alors $\log|h|$ est harmonique sur $U$.*

*(5) Toute fonction sous-harmonique est localement intégrable ; en particulier $\{u = -\infty\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

*Démonstration.* (1) La semi-continuité supérieure vient de la proposition 3.3(1), et (49) passe aux combinaisons positives. Pour $w = \max(u,v)$ : si le maximum en $a$ est atteint par $u$, alors $w(a) = u(a) \leqslant M(u,a,r) \leqslant M(w,a,r)$, et de même sinon.

(2) Si $u_k \downarrow u$, la semi-continuité supérieure vient de la proposition 3.3(2), et (49) passe à la limite par la proposition 3.7(2). Pour une limite uniforme sur les compacts, tout passe à la limite directement.

(3) Pour $\varepsilon > 0$, posons $v_\varepsilon = \frac{1}{2}\log\left(|h|^2+\varepsilon^2\right)$, fonction de classe $C^\infty$ sur $U$. Avec $F = h\overline{h}+\varepsilon^2$, l'holomorphie de $h$ donne $\partial F = h'\overline{h}$ et $\overline{\partial}\left(h'\overline{h}/F\right) = \left(|h'|^2 F - h'\overline{h}\,h\overline{h'}\right)/F^2$, d'où

$$\Delta v_\varepsilon = 4\overline{\partial}\partial v_\varepsilon = 2\,\overline{\partial}\left(\frac{h'\overline{h}}{F}\right) = \frac{2\varepsilon^2\,|h'|^2}{\left(|h|^2+\varepsilon^2\right)^2} \geqslant 0. \tag{57}$$

Par la proposition 3.16, $v_\varepsilon$ est sous-harmonique ; comme $v_\varepsilon$ décroît vers $\log|h|$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ et que $\log|h| \not\equiv -\infty$, le point (2) conclut.

(4) On voit avec le calcul précédent que lorsque $\varepsilon \to 0$ on a $\Delta\log|h| \to 0$ ce que donne que $\log|h|$ est harmonique. On peut aussi directement faire le calcul

$$\frac{1}{2}\log|h|^2 = \frac{1}{2}\log h\overline{h}. \tag{58}$$

Et

$$\partial\overline{\partial}\log h\overline{h} = \frac{h\overline{h'}}{h\overline{h}} = \partial\frac{\overline{h'}}{\overline{h}}. \tag{59}$$

Comme on doit dériver par rapport à $z$ un quotient de fonctions anti-holomorphe, la dérivée vaut zéro et on retouve le résultat.

(5) Soit $a \in U$ avec $u(a) > -\infty$ et $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$. Par (56), $\int_{\mathbb{D}(a,r)} u\,\mathrm{dLeb} \geqslant \pi r^2 u(a) > -\infty$, et $u$ est majorée sur ce disque : donc $u \in L^1(\mathbb{D}(a,r))$, et en particulier $u > -\infty$ presque partout sur $\mathbb{D}(a,r)$. L'ensemble des $a$ au voisinage desquels $u$ est intégrable est donc ouvert ; son complémentaire dans $U$ est l'ensemble des $a$ tels que $u \equiv -\infty$ au voisinage de $a$, qui est également ouvert. Par connexité et l'hypothèse (ii) de la définition 3.13, $u$ est localement intégrable sur $U$ tout entier. □

Le calcul (57) mérite d'être retenu : là où $h \neq 0$, il donne à la limite $\Delta \log|h| = 0$, c'est-à-dire $\log|h|$ *est harmonique hors des zéros de* $h$, sans qu'il soit besoin de choisir une détermination du logarithme de $h$ — laquelle n'existe pas toujours globalement, comme le montre $h(z) = z$ sur $\mathbf{C}^*$. Nous reviendrons sur la mesure $\frac{1}{2\pi}\Delta v_\varepsilon$ au lemme 3.34.

*Exercices.*

**Exercice 3.20.** Soit $u$ sous-harmonique sur $U$ et $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe croissante, prolongée par $\phi(-\infty) = \lim_{-\infty} \phi$. Montrer que $\phi \circ u$ est sous-harmonique (utiliser l'inégalité de Jensen pour la mesure $d\theta/2\pi$). En déduire que $|h|^\alpha$ pour $\alpha > 0$, $e^u$ et $u^+ = \max(u, 0)$ sont sous-harmoniques.

**Exercice 3.21.** Soit $v : ]r_1, r_2[ \to \mathbf{R}$ continue et $u(z) = v(|z|)$ sur la couronne correspondante. Montrer que $u$ est sous-harmonique si et seulement si $v$ est une fonction convexe de $\log r$. Que donne ce critère pour $\log^+|z|$ et pour $|z|^\alpha$ ?

**Exercice 3.22** (Théorème de Liouville sous-harmonique)**.** Soit $u$ sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ et majorée. Pour $\varepsilon > 0$, appliquer le principe du maximum à $u - \varepsilon \log|z|$ sur les couronnes $\{1 < |z| < R\}$, puis faire tendre $R$ vers $+\infty$ et $\varepsilon$ vers 0, pour montrer que $u \leqslant \max_{\mathbb{S}^1} u$ sur $\mathbf{C}$. En déduire que $u$ est constante.

**Exercice 3.23.** Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions sous-harmoniques sur $U$, localement uniformément majorée, et $U = \sup_i u_i$. Montrer que la régularisée $U^*$ de l'exercice 3.11 est sous-harmonique. (Établir $U(a) \leqslant M(U^*, a, r)$, puis utiliser la proposition 3.7(3) avec les mesures uniformes sur les cercles $\partial\mathbb{D}(b, r)$, $b \to a$.)

**Exercice 3.24.** Montrer par un exemple que l'hypothèse « $U$ borné » du théorème 3.14 ne peut être omise, puis que la conclusion subsiste si $U$ est non borné mais $u$ majorée (on pourra utiliser l'exercice 3.22 ou un argument direct).

3.3. **Régularisation par convolution.** Beaucoup d'énoncés sur les fonctions sous-harmoniques sont faciles pour les fonctions de classe $C^2$, où ils se ramènent à $\Delta u \geqslant 0$. La régularisation par convolution permet d'y ramener le cas général, et c'est la décroissance de la régularisée vers $u$ qui rend ce passage efficace.

Fixons une fois pour toutes une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$, positive, à support dans $[0, 1[$, telle que

$$2\pi \int_0^1 \psi(s)\, s\, ds = 1, \tag{60}$$

et posons $\chi(z) = \psi(|z|)$ : c'est une fonction *radiale* de classe $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{C})$, positive, à support dans $\overline{\mathbb{D}}$, d'intégrale 1 par (60) et les coordonnées polaires. Pour $\varepsilon > 0$ on pose $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\chi(z/\varepsilon)$, qui a les mêmes propriétés avec support dans $\overline{\mathbb{D}}(0, \varepsilon)$. Si $u$ est sous-harmonique sur $U$, elle est localement intégrable (proposition 3.19(4)), et l'on peut définir sa *régularisée*

$$u_\varepsilon(z) = (u * \chi_\varepsilon)(z) = \int_{\mathbf{C}} u(z - w)\, \chi_\varepsilon(w)\, d\mathrm{Leb}(w) = \int_{\mathbf{C}} u(w)\, \chi_\varepsilon(z - w)\, d\mathrm{Leb}(w) \tag{61}$$

sur l'ouvert $U_\varepsilon = \{z \in U \mid \mathrm{dist}(z, \mathbf{C}\backslash U) > \varepsilon\}$.

**Lemme 3.25** (Formule de convolution)**.** *Pour $a \in U_\varepsilon$,*

$$u_\varepsilon(a) = 2\pi \int_0^\varepsilon M(u,a,s)\,\psi_\varepsilon(s)\,s\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^1 M(u,a,\varepsilon t)\,\psi(t)\,t\,\mathrm{d}t, \tag{62}$$

*où $\psi_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-2}\psi(s/\varepsilon)$. Autrement dit, $u_\varepsilon(a)$ est une moyenne pondérée des moyennes circulaires $M(u,a,s)$, $0 < s \leqslant \varepsilon$, pour une pondération de masse totale* 1 *indépendante de a et de u.*

*Démonstration.* Quitte à retrancher une constante, $u$ est négative sur le compact $\overline{\mathbb{D}}(a,\varepsilon)$, ce qui autorise le théorème de Tonelli. En coordonnées polaires $w = se^{i\theta}$, et en utilisant $\chi_\varepsilon(w) = \psi_\varepsilon(s)$,

$$u_\varepsilon(a) = \int_0^\varepsilon \left( \int_0^{2\pi} u\left(a - se^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta \right) \psi_\varepsilon(s)\,s\,\mathrm{d}s = \int_0^\varepsilon 2\pi M(u,a,s)\,\psi_\varepsilon(s)\,s\,\mathrm{d}s, \tag{63}$$

la moyenne circulaire étant invariante par $\theta \mapsto \theta + \pi$. La seconde expression s'obtient par le changement de variable $s = \varepsilon t$. □

**Proposition 3.26.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$.*

*(1) $u_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U_\varepsilon$, et $\partial^\alpha u_\varepsilon = u * \partial^\alpha \chi_\varepsilon$ pour tout multi-indice $\alpha$.*

*(2) $u_\varepsilon \geqslant u$ sur $U_\varepsilon$, et pour tout $a \in U$, $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon(a)$ est croissante sur $]0, \mathrm{dist}(a, \mathbf{C}\backslash U)[$ et tend vers $u(a)$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.*

*(3) $u_\varepsilon$ est sous-harmonique sur $U_\varepsilon$ ; en particulier $\Delta u_\varepsilon \geqslant 0$.*

*(4) $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

*Démonstration.* (1) C'est la dérivation sous le signe intégral dans la seconde expression de (61) : $u$ est intégrable sur un voisinage compact de $\overline{\mathbb{D}}(z,\varepsilon)$ et $\chi_\varepsilon$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

(2) D'après la proposition 3.17, $M(u,a,s) \geqslant u(a)$, $s \mapsto M(u,a,s)$ est croissante et $M(u,a,s) \to u(a)$ quand $s \to 0$. La seconde expression de (62) représente $u_\varepsilon(a)$ comme une moyenne, pour la probabilité $2\pi\psi(t)t\,\mathrm{d}t$ sur $[0,1]$, de $M(u,a,\varepsilon t)$, qui est $\geqslant u(a)$, croissante en $\varepsilon$, et tend vers $u(a)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ ; la convergence monotone (proposition 3.7(2), ou directement) donne les trois assertions.

(3) Soit $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U_\varepsilon$. Par Tonelli (après soustraction d'une constante) et (49) appliquée en chaque point $a - w$,

$$M(u_\varepsilon,a,r) = \int_{\mathbf{C}} M(u,a-w,r)\,\chi_\varepsilon(w)\,\mathrm{dLeb}(w) \geqslant \int_{\mathbf{C}} u(a-w)\,\chi_\varepsilon(w)\,\mathrm{dLeb}(w) = u_\varepsilon(a). \tag{64}$$

La fonction $u_\varepsilon$ étant continue et finie, elle est sous-harmonique, et $\Delta u_\varepsilon \geqslant 0$ par la proposition 3.16.

(4) Sur un compact $L \subset U$ et pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ assez petit, les $u_\varepsilon$ décroissent vers $u$ en restant majorées par $u_{\varepsilon_0}$, qui est continue donc intégrable sur $L$ : le théorème de convergence monotone donne $\int_L |u_\varepsilon - u|\,\mathrm{dLeb} = \int_L (u_\varepsilon - u)\,\mathrm{dLeb} \to 0$. □

Voici une première application, qui complète la proposition 3.19.

**Corollaire 3.27.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$ et $h : V \to U$ holomorphe, non constante sur chaque composante connexe de $V$. Alors $u \circ h$ est sous-harmonique sur $V$.*

*Démonstration.* Pour $v$ de classe $C^2$ sur $U$, la règle de dérivation composée et $\overline{\partial} h = 0$, $\partial \overline{h'} = 0$ donnent $\overline{\partial}(v \circ h) = \left(\overline{\partial} v\right) \circ h \cdot \overline{h'}$ puis

$$\Delta(v \circ h) = 4\,\partial\overline{\partial}(v \circ h) = \left|h'\right|^2 (\Delta v) \circ h. \tag{65}$$

Appliquons ceci à $v = u_\varepsilon$ au voisinage d'un point de $V$ : $u_\varepsilon \circ h$ est $C^\infty$ de laplacien positif, donc sous-harmonique par la proposition 3.16, et $u_\varepsilon \circ h$ décroît vers $u \circ h$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Par la proposition 3.19(2), $u \circ h$ est sous-harmonique ou identiquement $-\infty$ sur une composante $V_0$ ; ce dernier cas signifierait que $u = -\infty$ sur l'ouvert non vide $h(V_0)$ (théorème de l'application ouverte), ce qui contredit la proposition 3.19(4). □

**Remarque 3.28.** Nous disposons désormais de trois façons d'approcher une fonction sous-harmonique *par valeurs supérieures* : les fonctions lipschitziennes du théorème 3.5, qui n'utilisent que la semi-continuité et ne sont pas sous-harmoniques ; les troncatures $\max(u, -m)$, sous-harmoniques et bornées inférieurement mais pas plus régulières que $u$ ; et les régularisées $u_\varepsilon$, qui sont $\mathcal{C}^\infty$ et sous-harmoniques. L'ordre logique est le suivant : la première approximation donne la croissance des moyennes (proposition 3.17), laquelle donne la décroissance des régularisées. Dans la suite, c'est la troisième que nous utiliserons le plus souvent, et toujours selon le même schéma : démontrer l'énoncé pour $u_\varepsilon$, puis passer à la limite par convergence monotone ou dominée.

*Exercices.*

**Exercice 3.29.** Montrer que si $u$ est continue sur $U$, alors $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact de $U$ (sans hypothèse de sous-harmonicité). Montrer que si $u$ est sous-harmonique et continue, la convergence de la proposition 3.26(2) est uniforme sur tout compact (théorème de Dini).

**Exercice 3.30.** Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{C})$ positive d'intégrale 1, non nécessairement radiale, et $u(z) = \Re z$. Calculer $u * \chi$ et montrer que l'inégalité $u * \chi \geqslant u$ est en défaut dès que le barycentre $\int w\chi(w)\,\mathrm{dLeb}(w)$ n'est pas nul. Où l'hypothèse de radialité intervient-elle dans la démonstration de la proposition 3.26 ?

**Exercice 3.31.** Soit $\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon^2}{\left(|z|^2+\varepsilon^2\right)^2}$. Vérifier que $\int_{\mathbf{C}} \rho_\varepsilon\,\mathrm{dLeb} = 1$, que $\rho_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\rho_1(z/\varepsilon)$, et que $\rho_\varepsilon\,\mathrm{dLeb}$ converge faiblement vers $\delta_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Comparer avec (57) pour $h(z) = z$.

**Exercice 3.32.** Montrer que si $u$ est sous-harmonique sur $U$, alors $z \mapsto u(\overline{z})$ est sous-harmonique sur $\overline{U}$, et en déduire que le corollaire 3.27 reste vrai pour $h$ antiholomorphe. Montrer en revanche que la composition avec un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ quelconque ne préserve pas la sous-harmonicité : trouver $u$ harmonique et $\Phi$ un difféomorphisme de $\mathbf{C}$ tels que $u \circ \Phi$ ne soit pas sous-harmonique (on pourra prendre $u(x,y) = x$ et $\Phi$ de la forme $(x,y) \mapsto (x - \lambda(y), y)$).

**Exercice 3.33.** Soit $u$ sous-harmonique sur $U$, $L \subset U$ compact, et $L_\varepsilon$ le $\varepsilon$-voisinage fermé de $L$. Montrer que pour $\varepsilon$ assez petit pour que $L_\varepsilon \subset U$,

$$\sup_L |\nabla u_\varepsilon| \leqslant \frac{\|\nabla \chi\|_\infty}{\varepsilon^3} \, \|u\|_{L^1(L_\varepsilon)} . \tag{66}$$

(Écrire $\nabla u_\varepsilon = u * \nabla \chi_\varepsilon$ et calculer $\nabla \chi_\varepsilon$.)

(1) Soit $(u_n)$ une suite de fonctions sous-harmoniques sur $U$, bornée dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Montrer qu'à $\varepsilon$ fixé, la famille $((u_n)_\varepsilon)_{n\geqslant 0}$ est localement uniformément lipschitzienne et localement uniformément bornée sur $U_\varepsilon$, et en extraire une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts de $U_\varepsilon$.

(2) Montrer en revanche que la famille $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ associée à $u(z) = \log|z|$ n'est uniformément lipschitzienne sur aucun voisinage de 0, et expliquer pourquoi c'était prévisible.

## 3.4. **La mesure de Riesz.**

*L'opérateur $dd^c$.* Nous adoptons dans toute la suite la notation de la géométrie complexe. On pose $d = \partial + \overline{\partial}$ et

$$d^c = \frac{i}{2\pi}\left(\overline{\partial} - \partial\right), \qquad \text{de sorte que} \qquad dd^c = \frac{i}{\pi}\,\partial\overline{\partial}. \tag{67}$$

Les opérateurs $d$ et $d^c$ sont réels, et pour $u$ de classe $C^2$ on a $\partial\overline{\partial} u = \frac{1}{4}\Delta u \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$ et $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2i\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, d'où

$$dd^c u = \frac{1}{2\pi}\Delta u \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{68}$$

Nous identifierons systématiquement la 2-forme $dd^c u$ à la mesure de densité $\frac{1}{2\pi}\Delta u$ par rapport à la mesure de Lebesgue, et, pour $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$, nous définirons $dd^c u$ au sens des distributions comme $\frac{1}{2\pi}\Delta u$ (définition A.24). Cette notation a trois mérites sur le laplacien. D'abord sa normalisation : nous verrons que $dd^c \log|z| = \delta_0$, sans facteur $2\pi$. Ensuite son invariance : la formule (65) montre que $\Delta(u\circ h) \neq (\Delta u)\circ h$, alors que $dd^c(u\circ h) = h^*(dd^c u)$ pour $h$ holomorphe (exercice 3.44, et lemme 4.5 au chapitre suivant) : $dd^c u$ est une $(1,1)$-forme, objet intrinsèque sur une surface de Riemann, tandis que $\Delta u$ dépend du choix d'une coordonnée. Enfin c'est la notation en usage en dimension supérieure, où $dd^c u$ n'est plus une mesure mais un courant, et où toute la théorie que nous développons ici se généralise (remarque 6.8).

*Le laplacien du logarithme.*

**Lemme 3.34.** *Au sens des distributions sur* $\mathbf{C}$, $dd^c \log|z| = \delta_0$. *Plus précisément, pour* $\varepsilon > 0$,

$$dd^c \frac{1}{2}\log\left(|z|^2 + \varepsilon^2\right) = \rho_\varepsilon \, \mathrm{dLeb}, \qquad \rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon^2}{\left(|z|^2+\varepsilon^2\right)^2}, \tag{69}$$

*où* $\rho_\varepsilon \, \mathrm{dLeb}$ *est une mesure de probabilité qui converge faiblement vers* $\delta_0$.

*Démonstration.* La formule (69) est (57) avec $h(z) = z$, divisée par $2\pi$. En coordonnées polaires, $\int_{\mathbf{C}} \rho_\varepsilon \, \mathrm{dLeb} = 2\int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 r\,dr}{(r^2+\varepsilon^2)^2} = 1$, et $\rho_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\rho_1(z/\varepsilon)$ montre que la masse de $\rho_\varepsilon \, \mathrm{dLeb}$ hors de tout disque $\mathbb{D}(0,\delta)$ tend vers 0 : donc $\rho_\varepsilon \, \mathrm{dLeb} \to \delta_0$ faiblement. Par ailleurs $v_\varepsilon = \frac{1}{2}\log(|z|^2+\varepsilon^2)$ décroît vers $\log|z|$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, donc converge dans $L^1_{\mathrm{loc}}$ par convergence monotone, et par conséquent $dd^c v_\varepsilon \to dd^c \log|z|$ au sens des distributions : pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbf{C})$,

$$\int \varphi \, dd^c \log|z| = \frac{1}{2\pi}\int \log|z| \, \Delta\varphi \, \mathrm{dLeb} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int v_\varepsilon \, \Delta\varphi \, \mathrm{dLeb} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi\,\rho_\varepsilon \, \mathrm{dLeb} = \varphi(0). \qquad (70)$$

□

*Le théorème de Riesz.*

**Théorème 3.35** (Mesure de Riesz)**.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$. Alors $dd^c u$, pris au sens des distributions, est une mesure de Radon positive sur $U$, appelée* mesure de Riesz *de $u$ :*

$$\int_U \varphi \, dd^c u = \frac{1}{2\pi}\int_U u \, \Delta\varphi \, \mathrm{dLeb} \geqslant 0 \qquad \textit{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(U),\ \varphi \geqslant 0. \qquad (71)$$

*Réciproquement, si $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ vérifie $dd^c v \geqslant 0$ au sens des distributions, alors $v$ coïncide presque partout avec une unique fonction sous-harmonique.*

*Démonstration.* Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(U)$ positive, à support dans $U_\varepsilon$ pour $\varepsilon$ petit. La fonction $u_\varepsilon$ est $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $\Delta u_\varepsilon \geqslant 0$ (proposition 3.26(3)), donc, en intégrant deux fois par parties,

$$\int u_\varepsilon \, \Delta\varphi \, \mathrm{dLeb} = \int \varphi \, \Delta u_\varepsilon \, \mathrm{dLeb} \geqslant 0. \qquad (72)$$

Comme $u_\varepsilon \downarrow u$ avec $u_\varepsilon \leqslant u_{\varepsilon_0}$ intégrable sur le support de $\varphi$, la convergence dominée donne

$$\int u \, \Delta\varphi \, \mathrm{dLeb} \geqslant 0. \qquad (73)$$

La forme linéaire $\varphi \mapsto \frac{1}{2\pi}\int u\Delta\varphi$ est donc positive sur $\mathcal{C}^\infty_c(U)$ ; elle s'étend par densité en une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(U)$ (une forme linéaire positive est automatiquement continue pour la norme uniforme sur les fonctions à support dans un compact fixe), et le théorème A.20 en fait une mesure de Radon positive.

Réciproquement, soit $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$ avec $dd^c v \geqslant 0$. Les régularisées $v_\varepsilon = v * \chi_\varepsilon$ sont $\mathcal{C}^\infty$ et, pour $\varphi \geqslant 0$ test, $\int \varphi \Delta v_\varepsilon = \int v \Delta(\varphi * \chi_\varepsilon) \geqslant 0$ puisque $\varphi * \chi_\varepsilon \geqslant 0$ ; donc $\Delta v_\varepsilon \geqslant 0$ et $v_\varepsilon$ est sous-harmonique par la proposition 3.16. Montrons que $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon(a)$ est croissante. Pour $\delta > 0$ fixé, la proposition 3.26(2) appliquée à la fonction sous-harmonique $v_\delta$ montre que $\varepsilon \mapsto (v_\delta)_\varepsilon(a)$ est croissante ; or $(v_\delta)_\varepsilon = (v_\varepsilon)_\delta$ par associativité de la convolution, et $(v_\varepsilon)_\delta \to v_\varepsilon$ uniformément sur les compacts lorsque $\delta \to 0$ puisque $v_\varepsilon$ est continue (exercice 3.29). Une limite ponctuelle de fonctions croissantes de $\varepsilon$ étant croissante, $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon(a)$ est croissante. La limite $\tilde{v} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} v_\varepsilon$ est donc une limite décroissante de fonctions sous-harmoniques ; comme $v_\varepsilon \to v$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}$, une sous-suite converge presque partout vers $v$, de sorte que $\tilde{v} = v$ presque partout, et en particulier $\tilde{v} \not\equiv -\infty$ : $\tilde{v}$ est sous-harmonique par la proposition 3.19(2). L'unicité résulte de ce qu'une fonction sous-harmonique $u$ est déterminée par

sa classe dans $L^1_{\mathrm{loc}}$ : en effet $u(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(a)$ par la proposition 3.26(2), et $u_\varepsilon$ ne dépend que de cette classe. □

**Lemme 3.36.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$. Sur $U_\varepsilon$, la mesure de Riesz de $u_\varepsilon$ est la régularisée de celle de $u$ :*

$$dd^c(u_\varepsilon) = (dd^c u) * \chi_\varepsilon, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{2\pi}\Delta u_\varepsilon(z) = \int \chi_\varepsilon(z-w)\, dd^c u(w). \tag{74}$$

*En particulier $dd^c(u_\varepsilon)$ converge faiblement vers $dd^c u$ sur tout ouvert relativement compact de $U$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

*Démonstration.* Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(U_\varepsilon)$, le théorème de Fubini et la symétrie $\chi_\varepsilon(-w) = \chi_\varepsilon(w)$ donnent $\int u_\varepsilon \Delta\varphi = \int u\, ((\Delta\varphi) * \chi_\varepsilon) = \int u \Delta(\varphi * \chi_\varepsilon)$, d'où, par (71),

$$\int \varphi\, dd^c(u_\varepsilon) = \int (\varphi * \chi_\varepsilon)\, dd^c u = \int \varphi\, \mathrm{d}((dd^c u) * \chi_\varepsilon). \tag{75}$$

La convergence faible résulte de ce que $\varphi * \chi_\varepsilon \to \varphi$ uniformément pour $\varphi$ continue à support compact. □

*Zéros des fonctions holomorphes et formule de Jensen.* La normalisation (67) est celle qui rend l'énoncé suivant élégant ; c'est la formule de Poincaré–Lelong en dimension 1.

**Proposition 3.37** (Poincaré–Lelong)**.** *Soit $h$ holomorphe non identiquement nulle sur un domaine $U$. Alors*

$$dd^c \log|h| = \sum_{a\,:\,h(a)=0} \mathrm{ord}_a(h)\, \delta_a. \tag{76}$$

*Démonstration.* Les deux membres sont des mesures, il suffit donc de les comparer localement. Hors des zéros de $h$, $\log|h|$ est harmonique et les deux membres sont nuls. Au voisinage d'un zéro $a$ d'ordre $k$, écrivons $h(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $g$ ne s'annulant pas ; alors $\log|h| = k\log|z-a| + \log|g|$, où $\log|g|$ est harmonique. Le lemme 3.34, translaté en $a$, conclut. □

**Proposition 3.38** (Formule de Jensen)**.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$ et $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$. Pour $0 < s < t \leqslant r$,*

$$M(u,a,t) - M(u,a,s) = \int_s^t (dd^c u)\left(\overline{\mathbb{D}}(a,\rho)\right) \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{77}$$

*Démonstration.* Si $u$ est de classe $C^2$, le lemme 3.15 et (68) donnent $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} M(u,a,\rho) = \frac{1}{\rho}(dd^c u)(\mathbb{D}(a,\rho))$, et l'on intègre de $s$ à $t$ ($\partial\mathbb{D}(a,\rho)$ est de mesure nulle pour $dd^c u$, qui a une densité). Dans le cas général, appliquons ceci à $u_\varepsilon$, dont la mesure de Riesz est $(dd^c u) * \chi_\varepsilon$ (lemme 3.36), puis faisons tendre $\varepsilon$ vers 0. Le membre de gauche converge par convergence monotone (propositions 3.26(2) et 3.7(2)). À droite, la masse de $(dd^c u) * \chi_\varepsilon$ sur $\overline{\mathbb{D}}(a,\rho)$ est comprise entre $(dd^c u)(\overline{\mathbb{D}}(a,\rho-\varepsilon))$ et $(dd^c u)(\overline{\mathbb{D}}(a,\rho+\varepsilon))$, donc converge vers $(dd^c u)(\overline{\mathbb{D}}(a,\rho))$ pour tout $\rho$ tel que $(dd^c u)(\partial\mathbb{D}(a,\rho)) = 0$, c'est-à-dire pour tout $\rho$ hors d'un ensemble dénombrable ; comme les intégrandes sont bornés sur $[s,t]$, la convergence dominée conclut. □

Un corollaire immédiat, que nous utiliserons souvent, est que la masse locale de $dd^c u$ est contrôlée par $u$.

**Corollaire 3.39.** *Soit $u$ sous-harmonique sur $U$ et $\overline{\mathbb{D}}(a,2r) \subset U$. Alors*

$$(dd^c u)\left(\overline{\mathbb{D}}(a,r)\right) \leqslant \frac{1}{\log 2}\left(\sup_{\overline{\mathbb{D}}(a,2r)} u \;+\; \frac{4}{3\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(a,r)} |u|\,\mathrm{dLeb}\right). \tag{78}$$

*En particulier, une famille de fonctions sous-harmoniques localement uniformément majorée et bornée dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ a des mesures de Riesz localement uniformément bornées.*

*Démonstration.* En coordonnées polaires,

$$\int_{r/2}^{r} M(u,a,\sigma)\,2\pi\sigma\,\mathrm{d}\sigma = \int_{r/2<|z-a|<r} u\,\mathrm{dLeb} \geqslant -\int_{\mathbb{D}(a,r)} |u|\,\mathrm{dLeb}, \tag{79}$$

et la mesure $2\pi\sigma\,\mathrm{d}\sigma$ sur $[r/2,r]$ est de masse $3\pi r^2/4$ : il existe donc $\sigma \in [r/2,r]$ tel que

$$M(u,a,\sigma) \geqslant -\frac{4}{3\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(a,r)} |u|\,\mathrm{dLeb}\,. \tag{80}$$

Appliquons (77) entre $\sigma$ et $2r$, en ne gardant que la partie $[r,2r]$ de l'intégrale et en y minorant la masse de $\overline{\mathbb{D}}(a,\rho)$ par celle de $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$ :

$$(dd^c u)\left(\overline{\mathbb{D}}(a,r)\right)\log 2 \leqslant \int_r^{2r} (dd^c u)\left(\overline{\mathbb{D}}(a,\rho)\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \leqslant M(u,a,2r) - M(u,a,\sigma), \tag{81}$$

et l'on conclut en majorant $M(u,a,2r)$ par $\sup_{\overline{\mathbb{D}}(a,2r)} u$ et en utilisant (80). □

*Exercices.*

**Exercice 3.40.** Soit $u$ sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ telle que $u(z) \leqslant \log|z| + O(1)$ à l'infini. Montrer, à l'aide de la formule de Jensen (77), que $dd^c u$ est de masse totale au plus 1. Que dire si $u$ est bornée supérieurement ?

**Exercice 3.41.** Redémontrer $dd^c \log|z| = \delta_0$ par la formule de Green sur la couronne $\{\varepsilon < |z| < R\}$, en contrôlant les deux termes de bord en $|z| = \varepsilon$.

**Exercice 3.42.** Soit $u$ sous-harmonique sur $U$. Montrer que $dd^c u = 0$ sur un ouvert $V \subset U$ si et seulement si $u$ est harmonique sur $V$ (utiliser le lemme de Weyl et l'unicité dans le théorème 3.35). En déduire que $\mathrm{Supp}(dd^c u)$ est le plus petit fermé hors duquel $u$ est harmonique.

**Exercice 3.43.** Soit $h$ holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ avec $h(0) \neq 0$, et $a_1,\ldots,a_N$ ses zéros dans $\mathbb{D}(0,r)$ comptés avec multiplicité. Déduire de la proposition 3.38 et de (76) la formule de Jensen classique

$$\log|h(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|h(re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta - \sum_{j=1}^{N}\log\frac{r}{|a_j|}. \tag{82}$$

Calculer $dd^c \log^+ |z|$.

**Exercice 3.44.** Soit $h : V \to U$ un biholomorphisme et $u$ sous-harmonique sur $U$. Montrer que $dd^c(u\circ h) = h^*(dd^c u)$, c'est-à-dire $(dd^c(u\circ h))(A) = (dd^c u)(h(A))$ pour tout borélien $A \subset V$. (Traiter d'abord le cas $u \in C^2$ par (65) et la formule de changement de variables, puis régulariser.) Expliquer pourquoi l'énoncé analogue pour $\Delta$ est faux.

## 3.5. **Potentiels logarithmiques.**

**Définition 3.45.** Soit $\mu$ une mesure positive finie à support compact dans $\mathbf{C}$. Son *potentiel logarithmique* est

$$p_\mu(z) = \int_{\mathbf{C}} \log|z-w| \, \mathrm{d}\mu(w) \in [-\infty, +\infty[. \tag{83}$$

Le calcul de base est celui du potentiel d'une masse de Dirac moyenné sur un cercle.

**Lemme 3.46.** *Pour $a, w \in \mathbf{C}$ et $r > 0$,*

$$M(\log|\cdot - w|, a, r) = \log \max(|a-w|, r). \tag{84}$$

*Démonstration.* Si $|a-w| > r$, la fonction $\log|\cdot - w|$ est harmonique sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$ et l'égalité est la propriété de la moyenne. Si $|a-w| < r$, la formule de Jensen (77) avec $dd^c \log|\cdot - w| = \delta_w$ donne, pour $s < |a-w|$,

$$M(\log|\cdot - w|, a, r) - M(\log|\cdot - w|, a, s) = \int_{|a-w|}^{r} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \log \frac{r}{|a-w|}, \tag{85}$$

et le second terme vaut $\log|a-w|$ par le premier cas. Le cas $|a-w| = r$ s'obtient par continuité, les moyennes étant croissantes en $r$. □

**Proposition 3.47.** *Soit $\mu$ une mesure positive finie à support compact, de masse $m$. Alors $p_\mu$ est sous-harmonique sur $\mathbf{C}$, harmonique sur $\mathbf{C}\setminus \operatorname{Supp}\mu$, et*

$$dd^c p_\mu = \mu, \qquad p_\mu(z) = m \log|z| + O\left(|z|^{-1}\right) \quad (z \to \infty). \tag{86}$$

*De plus*

$$M(p_\mu, a, r) = \int \log \max(|a-w|, r) \, \mathrm{d}\mu(w). \tag{87}$$

*Réciproquement (*décomposition de Riesz*), si $u$ est sous-harmonique sur $U$ et $D \Subset U$ est un disque, alors $u = p_{(dd^c u)|_D} + h$ sur $D$ avec $h$ harmonique sur $D$.*

*Démonstration. Semi-continuité supérieure.* Le noyau $(z,w) \mapsto \log|z-w|$ est continu à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$, donc s.c.s. ; la proposition 3.7(4) conclut.

*Moyennes.* Par Tonelli (le noyau est majoré sur $\partial\mathbb{D}(a,r) \times \operatorname{Supp}\mu$) et le lemme 3.46,

$$M(p_\mu, a, r) = \int M(\log|\cdot - w|, a, r) \, \mathrm{d}\mu(w) = \int \log \max(|a-w|, r) \, \mathrm{d}\mu(w) \geqslant p_\mu(a), \tag{88}$$

ce qui est (87) et l'inégalité de la moyenne.

*Asymptotique.* Pour $|z|$ grand, $p_\mu(z) - m\log|z| = \int \log|1-w/z|\,\mathrm{d}\mu(w) = O(|z|^{-1})$ uniformément, puisque $\mathrm{Supp}\,\mu$ est borné. En particulier $p_\mu \not\equiv -\infty$ et $p_\mu$ est sous-harmonique.

*Mesure de Riesz.* Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{C})$, Fubini et le lemme 3.34 donnent

$$\frac{1}{2\pi}\int p_\mu \Delta\varphi\,\mathrm{dLeb} = \int \left(\frac{1}{2\pi}\int \log|z-w|\,\Delta\varphi(z)\,\mathrm{dLeb}(z)\right)\mathrm{d}\mu(w) = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu, \tag{89}$$

l'interversion étant licite car $\log|z-w|$ est intégrable sur le support de $\varphi$, uniformément en $w$ dans un compact. En particulier $dd^c p_\mu = \mu$ est nulle hors de $\mathrm{Supp}\,\mu$, où $p_\mu$ est donc harmonique (exercice 3.42).

*Décomposition de Riesz.* Posons $\nu = (dd^c u)|_D$, mesure finie par le corollaire 3.39. Alors $dd^c(u - p_\nu) = 0$ sur $D$ au sens des distributions, donc $u - p_\nu$ coïncide presque partout avec une fonction harmonique $h$ par le lemme de Weyl ; comme deux fonctions sous-harmoniques égales presque partout sont égales (théorème 3.35), l'égalité $u = p_\nu + h$ a lieu partout sur $D$. □

Le potentiel détermine la mesure. Voici la forme précise dont nous nous servirons.

**Proposition 3.48.** *Soient $\mu,\nu$ deux mesures positives de même masse à supports compacts. Si $p_\mu - p_\nu$ est harmonique sur $\mathbf{C}$ et tend vers 0 à l'infini, alors $\mu = \nu$.*

*Démonstration.* La fonction $p_\mu - p_\nu$ est harmonique sur $\mathbf{C}$ et bornée, donc constante par le théorème de Liouville, et cette constante est nulle. On conclut en prenant les $dd^c$. □

*Compacité.* Le résultat suivant est l'outil de compacité qui remplace, dans le monde sous-harmonique, le théorème d'Ascoli. Sa démonstration repose sur le lemme suivant, qui dit que la convergence faible des mesures entraîne la convergence $L^1$ des potentiels.

**Lemme 3.49.** *Soient $\nu_n,\nu$ des mesures de probabilité portées par un compact fixe $L \subset \mathbf{C}$, avec $\nu_n \to \nu$ faiblement. Alors $\limsup_n p_{\nu_n} \leqslant p_\nu$ en tout point, et $p_{\nu_n} \to p_\nu$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$.*

*Démonstration.* L'inégalité ponctuelle est la proposition 3.7(3) appliquée à la fonction s.c.s. $w \mapsto \log|z-w|$ sur $L$. Soit $D$ un disque et $\Phi(w) = \int_D \log|z-w|\,\mathrm{dLeb}(z)$, fonction continue de $w$ (le logarithme est localement intégrable, uniformément en $w$). Par Fubini, $\int_D p_{\nu_n}\,\mathrm{dLeb} = \int \Phi\,\mathrm{d}\nu_n \to \int \Phi\,\mathrm{d}\nu = \int_D p_\nu\,\mathrm{dLeb}$. Posons $f_n = p_{\nu_n}$, $f = p_\nu$, et $M = \sup_{D\times L}\log|z-w|$, de sorte que $f_n \leqslant M$ sur $D$. On a $(f_n - f)^+ \leqslant M - f$, fonction intégrable sur $D$, et $\limsup_n (f_n - f)^+ = 0$ ponctuellement d'après l'inégalité ponctuelle ; le lemme de Fatou inversé donne $\int_D (f_n - f)^+ \to 0$. Comme $\int_D (f_n - f) \to 0$, on a aussi $\int_D (f_n - f)^- \to 0$, d'où $\|f_n - f\|_{L^1(D)} \to 0$. □

**Théorème 3.50** (Compacité et convergence)**.** *Soit $(u_n)$ une suite de fonctions sous-harmoniques sur un domaine $U$, uniformément majorée sur tout compact de $U$.*

*(1) Ou bien $u_n \to -\infty$ uniformément sur tout compact, ou bien une sous-suite converge dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ vers une fonction sous-harmonique.*

*(2) Si $u_n \to u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ avec $u$ sous-harmonique, alors $dd^c u_n \to dd^c u$ au sens faible des mesures.*

*(3) (Lemme de Hartogs) Si $\limsup_n u_n \leqslant C$ en tout point de $U$, alors pour tout compact $L \subset U$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $\sup_L u_n \leqslant C + \varepsilon$ pour $n$ assez grand.*

*Démonstration.* (2) La dérivation au sens des distributions est continue pour la convergence $L^1_{\mathrm{loc}}$ : pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(U)$,

$$\int \varphi\, dd^c u_n = \frac{1}{2\pi}\int u_n \Delta\varphi \,\mathrm{dLeb} \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int u \Delta\varphi \,\mathrm{dLeb} = \int \varphi\, dd^c u. \tag{90}$$

Comme les masses locales des $dd^c u_n$ sont uniformément bornées (corollaire 3.39), la convergence contre les fonctions test $\mathcal{C}^\infty_c$ entraîne la convergence contre les fonctions continues à support compact.

(3) Soient $L \subset U$ compact, $\varepsilon > 0$, $a \in L$ et $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(a,2r) \subset U$ ; notons $M$ un majorant uniforme des $u_n$ sur $\overline{\mathbb{D}}(a,2r)$. Pour $\delta < r$ et $z \in \mathbb{D}(a,\delta)$, on a $\mathbb{D}(a, r-\delta) \subset \mathbb{D}(z,r)$, donc par (56) et en majorant $u_n$ par $M$ sur la différence des deux disques,

$$u_n(z) \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(z,r)} u_n \,\mathrm{dLeb} \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(a,r-\delta)} u_n \,\mathrm{dLeb} + M\left(1 - \frac{(r-\delta)^2}{r^2}\right). \tag{91}$$

Le lemme de Fatou appliqué à $M - u_n \geqslant 0$ donne $\limsup_n \int_{\mathbb{D}(a,r-\delta)} u_n \leqslant \int_{\mathbb{D}(a,r-\delta)} \limsup_n u_n \leqslant C\pi(r-\delta)^2$. En posant $\lambda = (r-\delta)^2/r^2 \leqslant 1$, il vient

$$\limsup_n \sup_{\mathbb{D}(a,\delta)} u_n \leqslant \lambda C + (1-\lambda)M = C + (1-\lambda)(M-C), \tag{92}$$

quantité inférieure à $C + \varepsilon$ dès que $\delta$ est assez petit. On recouvre $L$ par un nombre fini de tels disques $\mathbb{D}(a,\delta)$.

(1) Supposons que $u_n$ ne tende pas vers $-\infty$ uniformément sur les compacts : il existe un compact $L$, une constante $A$ et une sous-suite, que l'on renomme $(u_n)$, avec $\sup_L u_n \geqslant -A$, c'est-à-dire des points $a_n \in L$ avec $u_n(a_n) \geqslant -A$ ; quitte à extraire, $a_n \to a \in L$.

*Bornitude $L^1$ locale.* Soit $G$ l'ensemble des $b \in U$ tels que $(u_n)$ soit bornée dans $L^1(\mathbb{D}(b,\rho))$ pour un $\rho > 0$ ; c'est un ouvert par définition. Montrons que $a \in G$. Soit $r > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}}(a,3r) \subset U$ et $M$ un majorant des $u_n$ sur ce disque ; pour $n$ grand, $|a_n - a| < r$, donc $\mathbb{D}(a,r) \subset \mathbb{D}(a_n,2r) \subset \mathbb{D}(a,3r)$, et (56) en $a_n$ donne

$$\int_{\mathbb{D}(a,r)} u_n \,\mathrm{dLeb} \geqslant \int_{\mathbb{D}(a_n,2r)} u_n \,\mathrm{dLeb} - M\,\mathrm{Leb}\,(\mathbb{D}(a_n,2r)\backslash\mathbb{D}(a,r)) \geqslant -4\pi r^2 A - 3\pi r^2 M; \tag{93}$$

joint à $u_n \leqslant M$, cela borne $\|u_n\|_{L^1(\mathbb{D}(a,r))}$. Montrons que $G$ est fermé dans $U$. Si $b_k \in G$ et $b_k \to b \in U$, choisissons $\rho$ avec $\overline{\mathbb{D}}(b,5\rho) \subset U$, puis $k$ avec $|b_k - b| < \rho$, et $\rho' \leqslant \rho$ tel que $\|u_n\|_{L^1(\mathbb{D}(b_k,\rho'))} \leqslant C$ pour tout $n$. Il existe alors $c_n \in \mathbb{D}(b_k,\rho')$ avec $u_n(c_n) \geqslant -C/\pi\rho'^2$, et $|c_n - b| < 2\rho$, de sorte que

$\mathbb{D}(b,\rho) \subset \mathbb{D}(c_n,3\rho) \subset \mathbb{D}(b,5\rho)$ ; le même calcul que (93) borne $\|u_n\|_{L^1(\mathbb{D}(b,\rho))}$, et $b \in G$. Par connexité $G = U$ : la suite est bornée dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$.

*Extraction.* Par le corollaire 3.39, les mesures $dd^c u_n$ sont localement uniformément bornées ; par le théorème A.22 et un argument diagonal sur une exhaustion de $U$, une sous-suite vérifie $dd^c u_n \to \nu$ faiblement sur tout ouvert relativement compact de $U$, où $\nu$ est une mesure positive sur $U$. Fixons un disque $D \Subset U$ dont le bord est de $\nu$-mesure nulle (c'est le cas de tous les rayons sauf une quantité dénombrable) et posons $\nu_n = (dd^c u_n)|_{\overline{D}}$, de sorte que $\nu_n \to \nu|_{\overline{D}}$ faiblement, avec des masses convergentes. Le lemme 3.49 (étendu aux mesures de masse convergente, par normalisation) donne $p_{\nu_n} \to p_{\nu|_{\overline{D}}}$ dans $L^1(D)$. Par décomposition de Riesz, $h_n = u_n - p_{\nu_n}$ est harmonique sur $D$ et bornée dans $L^1(D)$. Or une suite de fonctions harmoniques bornée dans $L^1(D)$ est localement uniformément bornée sur $D$ par la propriété de la moyenne sur les disques, et localement uniformément lipschitzienne par l'estimation $|\nabla h(z)| \leqslant \frac{2}{\rho} \sup_{\mathbb{D}(z,\rho)} |h|$, qui résulte de la formule de la divergence appliquée à la fonction harmonique $\partial_x h$ ; le théorème A.17 fournit une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts de $D$ vers une fonction $h$, harmonique car la propriété de la moyenne passe à la limite. Ainsi $u_n \to p_{\nu|_{\overline{D}}} + h$ dans $L^1(D')$ pour tout $D' \Subset D$, et la limite est sous-harmonique. Un nouvel argument diagonal sur un recouvrement dénombrable de $U$ par de tels disques donne une sous-suite convergeant dans $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, les limites locales se recollant puisqu'elles coïncident presque partout sur les intersections. Si enfin $u_n(z) \to -\infty$ en tout point, le point (3) appliqué avec $C$ arbitrairement négatif donne la convergence uniforme sur les compacts vers $-\infty$. □

Le point (2) est celui qui rend la stratégie du chapitre 5 possible : *pour montrer qu'une suite de mesures converge, il suffit de faire converger leurs potentiels*. Nous utiliserons systématiquement la variante quantitative suivante.

**Corollaire 3.51.** *Soient $(\nu_n)$ des mesures de probabilité portées par un compact fixe $L$ et $\mu$ une mesure de probabilité. Si $p_{\nu_n} \to p_\mu$ uniformément sur $\mathbf{C}$, alors $\nu_n \to \mu$ faiblement.*

*Démonstration.* La convergence uniforme entraîne la convergence au sens des distributions, donc $\nu_n = dd^c p_{\nu_n} \to dd^c p_\mu = \mu$ contre toute fonction test $C^\infty$ à support compact. Comme toutes ces mesures sont des probabilités portées par $L$, la famille est tendue et la convergence contre les fonctions test entraîne la convergence faible. □

*Exercices.*

**Exercice 3.52.** Calculer $p_\mu$ pour $\mu$ la mesure uniforme sur le cercle $\partial\mathbb{D}(a,r)$, puis pour $\mu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$. Vérifier que les deux potentiels coïncident hors du disque, et interpréter ce fait à l'aide de la proposition 3.48.

**Exercice 3.53.** Montrer que $p_\mu(a) = -\infty$ dès que $\mu(\{a\}) > 0$. Construire une mesure $\mu$ sans atome telle que $p_\mu(0) = -\infty$ (on pourra considérer $\sum_n 2^{-n}\sigma_n$, où $\sigma_n$ est la mesure uniforme sur un cercle de rayon $r_n$ bien choisi).

**Exercice 3.54.** Soit $T(z) = \lambda z + b$ avec $\lambda \neq 0$, et $T_*\mu$ la mesure image. Montrer que $p_{T_*\mu} \circ T = p_\mu + \mu(\mathbf{C}) \log|\lambda|$. Que devient cette formule pour $T(z) = z^2$ ? (Comparer avec le lemme 4.5 du chapitre suivant.)

**Exercice 3.55.** Soient $\nu_n \to \nu$ comme dans le lemme 3.49. Montrer que $p_{\nu_n} \to p_\nu$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\backslash L$, et donner un exemple où $p_{\nu_n}(z) \nrightarrow p_\nu(z)$ en un point $z \in L$.

## 4. La fonction de Green d'un polynôme

Dans tout ce chapitre $f(z) = a_d z^d + \cdots + a_0$ est un polynôme de degré $d \geqslant 2$. Nous allons lui associer une fonction $G_f$ qui mesure la vitesse d'échappement des orbites vers l'infini, et qui est simultanément deux choses : un objet *dynamique*, caractérisé par l'équation fonctionnelle $G_f \circ f = d\,G_f$ ; et un objet de *théorie du potentiel*, à savoir le potentiel logarithmique, à une constante près, de la mesure de probabilité $\mu_f = dd^c G_f$. C'est cette coïncidence qui donne accès à la théorie du chapitre 3 : la mesure $\mu_f$, définie à partir de $G_f$, sera la mesure canonique de la dynamique.

### 4.1. **Construction.**

**Lemme 4.1.** *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,*

$$\left|\log^+|f(z)| - d\log^+|z|\right| \leqslant C, \tag{94}$$

*où* $\log^+ t = \max(\log t, 0)$.

*Démonstration.* Choisissons $R \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{2}|a_d|\,|z|^d \leqslant |f(z)| \leqslant 2|a_d|\,|z|^d$ pour $|z| \geqslant R$ ; pour de tels $z$, $\log^+|f(z)| = \log|f(z)| = d\log|z| + O(1)$ avec une constante ne dépendant que de $a_d$. Pour $|z| \leqslant R$, les deux quantités $\log^+|f(z)|$ et $d\log^+|z|$ sont bornées par $\max_{\overline{\mathbb{D}}(0,R)} \log^+|f|$ et $d\log R$ respectivement. □

**Théorème 4.2.** *La suite de fonctions $z \mapsto d^{-n}\log^+|f^n(z)|$ converge uniformément sur $\mathbf{C}$. Sa limite*

$$G_f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+|f^n(z)| \tag{95}$$

*est continue, sous-harmonique, positive, et vérifie :*

*(1)* $G_f \circ f = d\,G_f$ *;*

*(2)* $\left|G_f(z) - \log^+|z|\right| \leqslant C/(d-1)$ *avec $C$ comme en* (94)*;*

*(3)* $\{G_f = 0\} = K_f$*, et $G_f$ est harmonique sur $\mathbf{C}\backslash K_f$ ;*

*(4)* $G_f(z) - \log|z| \to \gamma_f := \dfrac{\log|a_d|}{d-1}$ *lorsque $z \to \infty$.*

*Démonstration.* Posons $g_n = d^{-n}\log^+|f^n|$. Le lemme 4.1 appliqué au point $f^n(z)$ donne

$$|g_{n+1}(z) - g_n(z)| = \frac{1}{d^{n+1}}\left|\log^+|f(f^n(z))| - d\log^+|f^n(z)|\right| \leqslant \frac{C}{d^{n+1}}, \tag{96}$$

uniformément en $z \in \mathbf{C}$. La série télescopique $\sum(g_{n+1} - g_n)$ converge donc normalement sur $\mathbf{C}$ et $G_f = \lim g_n$ existe, est continue comme limite uniforme de fonctions continues, et sous-harmonique comme limite uniforme de fonctions sous-harmoniques (proposition 3.19), chaque $g_n = d^{-n} \max(\log|f^n|, 0)$ l'étant. En sommant (96) à partir de $n = 0$ on obtient (2). L'identité (1) est immédiate :

$$G_f(f(z)) = \lim_n \frac{1}{d^n} \log^+ \left|f^{n+1}(z)\right| = d \lim_n \frac{1}{d^{n+1}} \log^+ \left|f^{n+1}(z)\right| = d\, G_f(z). \tag{97}$$

Pour (3) : si $z \in K_f$, l'orbite est bornée par un $M$ et $g_n(z) \leqslant d^{-n} \log^+ M \to 0$, donc $G_f(z) = 0$. Si $z \notin K_f$, alors $|f^n(z)| \to \infty$, et pour $n$ assez grand (2) donne $G_f(f^n(z)) \geqslant \log|f^n(z)| - C/(d-1) > 0$, d'où $G_f(z) = d^{-n} G_f(f^n(z)) > 0$ par (1). Sur $\{|z| > R\}$, les fonctions $d^{-n} \log|f^n|$ sont harmoniques (car $f^n$ n'y a pas de zéro, quitte à agrandir $R$) et convergent uniformément vers $G_f$, donc $G_f$ y est harmonique ; et pour $z_0 \notin K_f$ quelconque, on choisit $n$ avec $|f^n(z_0)| > R$ et l'on écrit $G_f = d^{-n} G_f \circ f^n$ au voisinage de $z_0$, composée d'une fonction harmonique et d'une fonction holomorphe.

Pour (4), posons $u = G_f - \log|z|$ sur $\{|z| > R\}$ : c'est une fonction harmonique et bornée par (2), donc elle se prolonge harmoniquement à travers l'infini et admet une limite $\gamma_f$ en $\infty$. En écrivant $G_f \circ f = dG_f$ sous la forme $\log|f(z)| + u(f(z)) = d\log|z| + d\,u(z)$ et en utilisant $\log|f(z)| = d\log|z| + \log|a_d| + o(1)$, on obtient à la limite $\gamma_f + \log|a_d| = d\gamma_f$, d'où (4). □

**Proposition 4.3.** *L'ensemble $K_f$ est plein : $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash K_f$ est connexe.*

*Démonstration.* Soit $V$ une composante connexe bornée de $\mathbf{C}\backslash K_f$. Alors $G_f$ est harmonique sur $V$, continue sur $\overline{V}$, et nulle sur $\partial V \subset K_f$. Le principe du maximum donne $G_f \equiv 0$ sur $V$, donc $V \subset K_f$ : contradiction. Toute composante de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash K_f$ contient donc $\infty$, et il n'y en a qu'une. □

## 4.2. **La mesure d'équilibre.**

**Théorème 4.4.** *La mesure*

$$\mu_f = dd^c G_f \tag{98}$$

*est une mesure de probabilité de support $\mathcal{J}(f)$, appelée* mesure d'équilibre *de $f$, et*

$$G_f = p_{\mu_f} + \gamma_f, \qquad \gamma_f = \frac{\log|a_d|}{d-1}. \tag{99}$$

*En particulier, le potentiel $p_{\mu_f}$ est continu sur $\mathbf{C}$.*

*Démonstration. Étape 1 : $\mu_f$ est une mesure positive portée par $\mathcal{J}(f)$.* La fonction $G_f$ est sous-harmonique (théorème 4.2), donc $\mu_f$ est une mesure positive par le théorème 3.35. Elle est harmonique sur $\mathbf{C}\backslash K_f$ et identiquement nulle sur $\mathrm{Int}\, K_f$, donc $\mu_f$ ne charge aucun de ces deux ouverts (exercice 3.42) : $\mathrm{Supp}\,\mu_f \subset \partial K_f = \mathcal{J}(f)$.

*Étape 2 : $\mu_f$ est de masse* 1. Choisissons $\rho_0$ tel que $K_f \subset \mathbb{D}(0, \rho_0)$. Pour $t > \rho_0$, la formule de Jensen (proposition 3.38) donne

$$M(G_f, 0, t) - M(G_f, 0, \rho_0) = \int_{\rho_0}^{t} \mu_f\left(\overline{\mathbb{D}}(0,\rho)\right) \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \mu_f(\mathbf{C}) \log \frac{t}{\rho_0}. \tag{100}$$

Or le théorème 4.2(4) donne $M(G_f,0,t) = \log t + \gamma_f + o(1)$ lorsque $t \to \infty$ ; le membre de gauche vaut donc $\log t + O(1)$, et en divisant par $\log t$ on obtient $\mu_f(\mathbf{C}) = 1$.

*Étape 3 : $G_f - p_{\mu_f}$ est harmonique sur* $\mathbf{C}$. Par la proposition 3.47, $dd^c p_{\mu_f} = \mu_f = dd^c G_f$. La différence $G_f - p_{\mu_f}$, qui est localement intégrable, a donc un $dd^c$ nul au sens des distributions, et coïncide presque partout avec une fonction harmonique $h$ par le lemme de Weyl. Les fonctions sous-harmoniques $G_f$ et $p_{\mu_f} + h$ étant égales presque partout, elles sont égales partout (théorème 3.35).

*Étape 4 : Liouville.* Comme $\mu_f$ est une mesure de probabilité à support compact, $p_{\mu_f}(z) = \log|z| + o(1)$ à l'infini par (86) ; joint au théorème 4.2(4), cela donne $h(z) \to \gamma_f$ lorsque $z \to \infty$. La fonction $h$ est donc harmonique et bornée sur $\mathbf{C}$ ; elle est constante (écrire $h = \Re F$ avec $F$ entière et appliquer le corollaire A.2 à $e^F$, de module $e^h$), égale à $\gamma_f$. Ceci démontre (99), et la continuité de $p_{\mu_f} = G_f - \gamma_f$.

*Étape 5 :* $\operatorname{Supp}\mu_f = \mathcal{J}(f)$. Soit $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et supposons $\mu_f$ nulle sur un disque $D$ centré en $z_0$. Alors $G_f$ est harmonique sur $D$ (exercice 3.42), positive, et nulle au point $z_0 \in K_f$ : le principe du maximum (théorème 3.14) appliqué à $-G_f$ force $G_f \equiv 0$ sur $D$, donc $D \subset K_f$ et $z_0 \in \operatorname{Int} K_f$, ce qui contredit $z_0 \in \partial K_f$. □

Lorsque $f$ est unitaire, $\gamma_f = 0$ et l'on a l'identité fondamentale, qui sera utilisée constamment au chapitre 5 :

$$G_f = p_{\mu_f}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad G_f(z) = \int \log|z-w|\,\mathrm{d}\mu_f(w). \tag{101}$$

Le lemme suivant explicite le comportement des potentiels sous l'action de $f$. Rappelons que l'*image inverse* d'une mesure $\nu$ par $f$ est définie par $f^*\nu = \int \left(\sum_{f(b)=a} \deg_b f \cdot \delta_b\right) \mathrm{d}\nu(a)$ ; c'est une mesure de masse $d\,\nu(\mathbf{C})$, et $f_* f^* = d \cdot \mathrm{id}$.

**Lemme 4.5.** *Soit $\nu$ une mesure positive finie à support compact. Alors*

$$p_{f^*\nu} = p_\nu \circ f - \nu(\mathbf{C}) \log|a_d|\,, \qquad \text{et} \qquad dd^c(u\circ f) = f^* dd^c u \tag{102}$$

*pour toute fonction $u$ sous-harmonique sur* $\mathbf{C}$.

*Démonstration.* Pour $a \in \mathbf{C}$ fixé, la factorisation $f(z) - a = a_d \prod_{f(b)=a} (z-b)^{\deg_b f}$ donne

$$\log|f(z)-a| = \log|a_d| + \sum_{f(b)=a} \deg_b f \log|z-b| = \log|a_d| + p_{f^*\delta_a}(z). \tag{103}$$

On intègre alors contre $\mathrm{d}\nu(a)$ et l'on applique le théorème de Fubini, licite car les intégrandes sont majorées. La seconde identité s'en déduit en prenant les $dd^c$, d'abord pour $u = p_\nu$, puis dans le cas général par décomposition de Riesz (proposition 3.47). □

**Corollaire 4.6.** *La mesure $\mu_f$ est* équilibrée *et invariante :*

$$f^*\mu_f = d\,\mu_f, \qquad f_*\mu_f = \mu_f. \tag{104}$$

*Démonstration.* En appliquant le lemme 4.5 à $u = G_f$ et en utilisant $G_f \circ f = d\,G_f$, on obtient $f^*\mu_f = dd^c(G_f \circ f) = dd^c(d\,G_f) = d\,\mu_f$. On applique alors $f_*$ et l'on utilise $f_* f^* = d \cdot \mathrm{id}$. □

L'invariance $f_*\mu_f = \mu_f$ signifie que $\mu_f$ est une mesure de probabilité invariante pour le système dynamique $(\mathcal{J}(f), f)$ : nous disposons donc d'un objet de théorie ergodique, canoniquement attaché à $f$. L'égalité $f^*\mu_f = d\mu_f$ est bien plus forte : elle dit que $\mu_f$ se répartit uniformément entre les $d$ branches inverses de $f$, et c'est elle qui gouvernera tous les énoncés d'équidistribution.

**Proposition 4.7.** *La mesure $\mu_f$ n'a pas d'atome.*

*Démonstration.* Soit $m = \max_{a\in\mathbf{C}} \mu_f(\{a\})$, atteint car $\mu_f$ est une mesure de probabilité à support compact et l'ensemble des atomes de masse $\geqslant m$ est fini. Soit $a$ un atome maximal. L'égalité $f^*\mu_f = d\mu_f$ donne $\mu_f(\{a\}) = \frac{1}{d}\sum_{f(b)=a} \deg_b f \cdot \mu_f(\{b\})$ ; comme $\sum_{f(b)=a} \deg_b f = d$ et que chaque $\mu_f(\{b\}) \leqslant m$, l'égalité force $\mu_f(\{b\}) = m$ pour tout $b \in f^{-1}(a)$. Par récurrence, tout point de $\bigcup_n f^{-n}(a)$ est un atome de masse $m$. Si $m > 0$ cet ensemble est fini, donc $a$ est exceptionnel ; mais $a \in \operatorname{Supp}\mu_f = \mathcal{J}(f)$ et $E_f \subset \mathcal{F}(f)$ par la proposition 2.10 : contradiction. □

4.3. **Coordonnée de Böttcher et critère de connexité.** Le point $\infty$ est un point fixe superattractif de degré local $d$ ; le théorème 2.7 fournit donc, dans la carte $w = 1/z$, une coordonnée linéarisante.

**Théorème 4.8.** *Soit $f$ unitaire de degré $d \geqslant 2$. Il existe $R > 0$ et une unique application holomorphe injective*

$$\varphi : \{|z| > R\} \longrightarrow \{|w| > R\}, \qquad \varphi(z) = z + O(1), \tag{105}$$

*telle que $\varphi \circ f = \varphi^d$. De plus $G_f = \log|\varphi|$ là où $\varphi$ est définie. Enfin, si l'on pose*

$$\rho_f = \max\left\{G_f(c) \;\middle|\; c \in \operatorname{Crit}(f) \cap \mathbf{C}\right\}, \tag{106}$$

*alors $\varphi$ se prolonge en un biholomorphisme de $\{G_f > \rho_f\}$ sur $\{|w| > e^{\rho_f}\}$.*

*Démonstration (esquisse).* L'existence et l'unicité de $\varphi$ au voisinage de l'infini résultent du théorème 2.7 appliqué dans la carte $w = 1/z$, où $f$ s'écrit $w \mapsto w^d(1 + O(w))$. L'égalité $G_f = \log|\varphi|$ vient de ce que $\log|\varphi|$ est harmonique, vérifie $\log|\varphi \circ f| = d\log|\varphi|$ et $\log|\varphi(z)| = \log|z| + o(1)$ : la différence $G_f - \log|\varphi|$ est harmonique bornée au voisinage de $\infty$, tend vers 0, et est multipliée par $d$ sous l'action de $f$, donc est nulle. Pour le prolongement, on remarque que $\{G_f > r\}$ ne contient pas de point critique dès que $r \geqslant \rho_f$, de sorte que $f : \{G_f > r\} \to \{G_f > dr\}$ est un revêtement non ramifié de degré $d$ ; on prolonge alors $\varphi$ de proche en proche par la formule $\varphi(z) = \varphi(f(z))^{1/d}$, la branche de la racine étant déterminée par continuité, ce qui est licite car les domaines concernés sont simplement connexes. □

**Théorème 4.9** (Dichotomie de Fatou–Julia)**.** *Soit $f$ un polynôme de degré $d \geqslant 2$.*

*(1) Si tous les points critiques de $f$ dans $\mathbf{C}$ appartiennent à $K_f$, alors $K_f$ est connexe et $\varphi$ est un biholomorphisme de $\mathbf{C}\backslash K_f$ sur $\mathbf{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$.*

*(2) Si tous les points critiques de $f$ dans $\mathbf{C}$ sont hors de $K_f$, alors $K_f = \mathcal{J}(f)$ est un ensemble de Cantor.*

*En particulier, pour $d = 2$, $K_f$ est connexe ou totalement discontinu selon que l'unique point critique appartient ou non à $K_f$.*

*Démonstration (esquisse).* Dans le cas (1), $\rho_f = 0$ et le théorème 4.8 fournit un biholomorphisme entre $\mathbf{C}\backslash K_f = \{G_f > 0\}$ et l'extérieur du disque unité ; le complémentaire de $K_f$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ étant biholomorphe à un disque, $K_f$ est connexe. Dans le cas (2), soit $r > \rho_f$ ; l'ouvert $U_0 = \{G_f < r\}$ est un disque topologique et $U_n = f^{-n}(U_0) = \{G_f < r/d^n\}$. Un calcul d'Euler–Poincaré via la formule de Riemann–Hurwitz montre que chaque composante de $U_n$ est un disque topologique, que ces composantes sont en nombre $d^n$ dès que $n$ est assez grand, et que leurs diamètres tendent vers 0 ; comme $K_f = \bigcap_n U_n$, on obtient un ensemble de Cantor. Les détails se trouvent dans [11], §9 et §17, ou [6], chapitre III. □

**Exemple 4.10.** (i) Pour $f(z) = z^d$ : $G_f(z) = \log^+ |z|$, $K_f = \overline{\mathbb{D}}$, et $\mu_f$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

(ii) Pour $f(z) = z^2 - 2$ : $K_f = [-2,2]$ et $G_f(z) = \log\left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right|$, et $\mu_f$ est la mesure d'Arcsinus $\frac{\mathrm{d}t}{\pi\sqrt{4-t^2}}$ sur $[-2,2]$.

(iii) Pour $f(z) = z^2 + c$ avec $|c|$ grand, $\mathcal{J}(f)$ est un Cantor, et $\mu_f$ est la mesure qui donne la masse $2^{-n}$ à chacun des $2^n$ morceaux de génération $n$ (exercice 2.21) ; elle n'a pas d'atome et charge tout ouvert rencontrant $\mathcal{J}(f)$.

**Remarque 4.11.** On peut montrer que $G_f$ est höldérienne sur $\mathbf{C}$, et lipschitzienne si $K_f$ est connexe et $\mathcal{J}(f)$ localement connexe. En revanche $G_f$ n'est jamais de classe $C^1$ au voisinage de $\mathcal{J}(f)$ lorsque celui-ci n'est pas un cercle ou un segment : la géométrie fractale de $\mathcal{J}(f)$ se lit exactement dans le défaut de régularité de $G_f$.

4.4. **Exercices.**

**Exercice 4.12.** Montrer que $G_f$ est l'unique fonction continue $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que $g \circ f = d\,g$ et $g - \log^+ |z|$ soit bornée. (Considérer $h = g - G_f$ et utiliser $h \circ f = dh$.)

**Exercice 4.13.** Soit $\phi(z) = \lambda z + b$ et $g = \phi f \phi^{-1}$. Exprimer $G_g$ en fonction de $G_f$, $\mu_g$ en fonction de $\mu_f$, et $\gamma_g$ en fonction de $\gamma_f$. Vérifier la cohérence avec la formule $\gamma_f = \log|a_d|/(d-1)$.

**Exercice 4.14.** Soit $f(z) = z^2 + c$. Montrer que $G_f(0) > 0$ si et seulement si $\mathcal{J}(f)$ est un Cantor, et que dans ce cas $G_f(c) = 2G_f(0)$. Calculer $\rho_f$ et décrire $\{G_f > \rho_f\}$.

**Exercice 4.15.** Soit $f$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 2$. Déduire de (101) et de $G_f \geqslant 0$ que $\int \log|a-w|\,\mathrm{d}\mu_f(w) \geqslant 0$ pour tout $a \in \mathbf{C}$. En déduire que $\mathcal{J}(f)$ n'est contenu dans aucun disque fermé de rayon $< 1$, puis que $\operatorname{diam} \mathcal{J}(f) \geqslant 1$. Que donne l'exemple $f(z) = z^2 - 2$ ?

**Exercice 4.16.** Soit $T_d$ l'unique polynôme unitaire de degré $d$ tel que $T_d(w + w^{-1}) = w^d + w^{-d}$ (polynôme de Tchebychev normalisé). Montrer que $K_{T_d} = [-2,2]$ et calculer $G_{T_d}$ et $\mu_{T_d}$.

**Exercice 4.17.** Soit $f$ unitaire de degré $d$ et $z_1, \ldots, z_{d^n}$ les racines de $f^n(z) = a$ pour un $a$ fixé. Montrer que $\frac{1}{d^n}\sum_i \log|z - z_i| = \frac{1}{d^n}\log|f^n(z) - a|$ et que cette quantité converge vers $G_f(z)$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\backslash K_f$.

## 5. THÉORÈMES D'ÉQUIDISTRIBUTION

Dans tout ce chapitre $f$ est un polynôme *unitaire* de degré $d \geqslant 2$, ce qui ne restreint pas la généralité (§1) et permet d'écrire, d'après (101),

$$G = G_f = p_{\mu_f}, \qquad \mu = \mu_f, \qquad K = K_f, \qquad \mathcal{J} = \mathcal{J}(f). \tag{107}$$

La question posée dans ce chapitre est la suivante : la mesure $\mu$ a été construite par la théorie du potentiel, mais *que décrit-elle* ? La réponse est qu'elle décrit la répartition asymptotique de presque tous les objets dynamiques finis que l'on sait fabriquer : les préimages $f^{-n}(a)$ d'un point, les points périodiques de période $n$, les racines de $f^n = g$ pour $g$ fixé. Toutes ces familles finies de points, réparties de façon très différente au départ, s'équidistribuent vers la même mesure $\mu$ : c'est en ce sens que $\mu$ est *la* mesure canonique de $f$.

La stratégie est toujours la même, et repose sur la remarque suivante. Si $\nu_n = \frac{1}{d^n}\sum_i \delta_{z_i}$ est la mesure de comptage normalisée des racines d'un polynôme unitaire $P_n$ de degré $d^n$, alors

$$p_{\nu_n}(z) = \frac{1}{d^n}\log|P_n(z)|, \tag{108}$$

et il suffit, d'après le théorème 3.50, de faire converger le membre de droite vers $G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}$. Autrement dit : *équidistribuer des racines, c'est estimer* $\frac{1}{d^n}\log|P_n|$.

### 5.1. L'opérateur de transfert.

**Définition 5.1.** Pour $\nu$ mesure de probabilité à support compact dans $\mathbf{C}$, on pose

$$T\nu = \frac{1}{d} f^*\nu. \tag{109}$$

C'est encore une mesure de probabilité, et $T^n\nu = d^{-n}(f^n)^*\nu$ décrit la répartition des préimages d'ordre $n$ des points répartis selon $\nu$. Le lemme 4.5 se traduit, pour $f$ unitaire, par

$$p_{T\nu} = \frac{1}{d}\, p_\nu \circ f, \tag{110}$$

et le corollaire 4.6 dit exactement que $T\mu = \mu$. La formule (110) montre que $T$ agit sur les potentiels de façon *contractante* : c'est toute la théorie.

**Théorème 5.2.** *Soit $\nu$ une mesure de probabilité à support compact telle que $p_\nu - G$ soit bornée sur $\mathbf{C}$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$,*

$$\|p_{T^n\nu} - G\|_\infty \leqslant \frac{1}{d^n}\,\|p_\nu - G\|_\infty, \tag{111}$$

*et par conséquent $T^n\nu \to \mu$ faiblement, avec une vitesse géométrique de raison $1/d$.*

*Démonstration.* Les identités $p_{T\nu} = \frac{1}{d} p_\nu \circ f$ et $G = \frac{1}{d} G \circ f$ donnent

$$p_{T\nu} - G = \frac{1}{d}\,(p_\nu - G)\circ f, \tag{112}$$

d'où $\|p_{T\nu} - G\|_\infty \leqslant \frac{1}{d}\|p_\nu - G\|_\infty$, et (111) par récurrence. Choisissons $R$ tel que $f^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(0,R)) \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R)$ et $\operatorname{Supp}\nu \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R)$ : alors toutes les mesures $T^n\nu$ sont portées par le compact $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$, et le corollaire 3.51 s'applique. □

C'est un énoncé d'une grande souplesse : l'hypothèse ne porte que sur le potentiel de $\nu$, et pas du tout sur la position de $\operatorname{Supp}\nu$ par rapport à $\mathcal{J}$.

**Corollaire 5.3.** *Soit $\sigma_{a,r}$ la mesure uniforme sur le cercle $\partial\mathbb{D}(a,r)$. Alors $d^{-n}(f^n)^*\sigma_{a,r} \to \mu$ pour tous $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. De même, si $L$ est un compact non polaire quelconque et $\mu_L$ sa mesure d'équilibre, et si $g_L$ est continue, alors $d^{-n}(f^n)^*\mu_L \to \mu$.*

*Démonstration.* Dans le premier cas $p_{\sigma_{a,r}}(z) = \log\max(|z-a|, r)$ est continue et vérifie $p_{\sigma_{a,r}}(z) - G(z) \to 0$ à l'infini, donc est bornée. Dans le second, $p_{\mu_L} = g_L + \log\operatorname{cap} L$ est continue et $p_{\mu_L} - G \to 0$ à l'infini. □

5.2. **Unicité de la mesure équilibrée.** Le théorème 5.2 caractérise déjà $\mu$ comme unique point fixe « régulier » de $T$. Le résultat suivant est plus fort et purement statique : il identifie $\mu$ parmi toutes les mesures équilibrées, sans hypothèse de convergence.

**Théorème 5.4.** *Soit $\nu$ une mesure de probabilité à support compact vérifiant $f^*\nu = d\nu$ et d'énergie finie, c'est-à-dire $I(\nu) > -\infty$. Alors $\nu = \mu$.*

*Démonstration. Étape 1 :* $\operatorname{Supp}\nu \subset K$. L'égalité $f^*\nu = d\nu$ donne $f^{-1}(\operatorname{Supp}\nu) = \operatorname{Supp}(f^*\nu) = \operatorname{Supp}\nu$, donc $S = \operatorname{Supp}\nu$ est un compact totalement invariant ; les orbites issues de $S$ restent dans $S$, donc sont bornées, et $S \subset K$.

*Étape 2 :* $h := p_\nu - G \leqslant 0$. La fonction $h$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbf{C}$ ($p_\nu$ l'est, $G$ est continue) et tend vers 0 à l'infini d'après (86) ; on la prolonge par $h(\infty) = 0$, ce qui en fait une fonction s.c.s. sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, laquelle atteint donc son maximum $M \geqslant 0$. Par (110) appliqué à $\nu$ équilibrée, $p_\nu \circ f = d\,p_\nu$, donc

$$h \circ f = d\,h. \tag{113}$$

Si $M > 0$, le maximum est atteint en un point $z_0 \in \mathbf{C}$, et $h(f(z_0)) = dM > M$ : contradiction. Donc $M \leqslant 0$.

*Étape 3 : conclusion.* Comme $I(\nu) = \int p_\nu\,\mathrm{d}\nu$ est finie et que $G$ est bornée sur $S$, la fonction $h$ est $\nu$-intégrable. L'égalité $f^*\nu = d\nu$ entraîne $f_*\nu = \nu$, d'où $\int h \circ f\,\mathrm{d}\nu = \int h\,\mathrm{d}(f_*\nu) = \int h\,\mathrm{d}\nu$ ; joint à (113), cela donne $(d-1)\int h\,\mathrm{d}\nu = 0$, donc $\int h\,\mathrm{d}\nu = 0$. Comme $h \leqslant 0$, on en déduit $h = 0$ $\nu$-presque partout. Or $G = 0$ sur $S \subset K$, donc $p_\nu = 0$ $\nu$-presque partout et

$$I(\nu) = \int p_\nu\,\mathrm{d}\nu = 0 = V(K). \tag{114}$$

Ainsi $\nu$ est une mesure de probabilité portée par $K$ réalisant le maximum d'énergie : par unicité dans le théorème **??**, $\nu = \mu_K = \mu$. □

**Remarque 5.5.** L'hypothèse d'énergie finie ne peut pas être supprimée : pour $f(z) = z^d$, la masse de Dirac $\delta_0$ vérifie $f^*\delta_0 = d\,\delta_0$ et n'est pas $\mu$. Plus généralement, si $a$ est un point exceptionnel fixe, $\delta_a$ est équilibrée. On peut montrer que ce sont les seules exceptions : toute mesure équilibrée sans atome est égale à $\mu$ ([12], §6.5).

5.3. **Le théorème de Brolin.** Nous en venons à l'énoncé le plus important du cours. Pour $a \in \mathbf{C}$, notons

$$\nu_n^{(a)} = \frac{1}{d^n}(f^n)^*\delta_a = \frac{1}{d^n}\sum_{f^n(b)=a} \deg_b(f^n)\,\delta_b \tag{115}$$

la mesure de comptage normalisée des préimages d'ordre $n$ de $a$, comptées avec multiplicité. Son potentiel est, d'après (103),

$$u_n^{(a)} := p_{\nu_n^{(a)}} = \frac{1}{d^n}\log|f^n - a|\,. \tag{116}$$

**Lemme 5.6.** *Posons $M_a = \sup_{z\in\mathbf{C}}(\log|z-a| - G(z))$. Alors $M_a < \infty$, la fonction $a \mapsto M_a$ est bornée sur tout compact, et*

$$u_n^{(a)} \leqslant G + \frac{M_a}{d^n} \quad \textit{sur } \mathbf{C}. \tag{117}$$

*De plus $u_n^{(a)} \to G$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\backslash K$.*

*Démonstration.* La fonction $z \mapsto \log|z-a| - G(z)$ est s.c.s. sur $\mathbf{C}$ et tend vers 0 à l'infini, donc est majorée ; la majoration est uniforme pour $a$ dans un compact puisque $\log|z-a| \leqslant \log(|z|+|a|)$. Comme $u_0^{(a)} = \log|z-a|$, la relation de contraction (112) donne

$$u_n^{(a)} - G = \frac{1}{d^n}(\log|\cdot - a| - G)\circ f^n \leqslant \frac{M_a}{d^n}. \tag{118}$$

Enfin, sur un compact de $\mathbf{C}\backslash K$ on a $f^n \to \infty$ uniformément, donc $u_n^{(a)} = d^{-n}\log|f^n| + d^{-n}\log|1 - a/f^n|$ où le second terme tend uniformément vers 0, et le premier vers $G$. □

L'inégalité (117) est *unilatérale*, et il n'y a aucun espoir de la renverser en général : si $f^n(z)$ tombe très près de $a$, alors $u_n^{(a)}(z)$ est très négatif. C'est exactement le phénomène qui produit les points exceptionnels.

**Théorème 5.7** (Brolin, version presque partout)**.** *Pour Lebesgue-presque tout $a \in \mathbf{C}$, on a $\nu_n^{(a)} \to \mu$ faiblement.*

*Démonstration.* Fixons $c \in \mathbf{C}$, $r > 0$, et notons $\sigma$ la mesure uniforme sur le cercle $\partial\mathbb{D}(c,r)$. Par le théorème 5.2,

$$\|p_{T^n\sigma} - G\|_\infty \leqslant \frac{A}{d^n}, \qquad A = \|p_\sigma - G\|_\infty < \infty. \tag{119}$$

Par ailleurs $(f^n)^*\sigma = \int (f^n)^*\delta_a \, d\sigma(a)$, donc $T^n\sigma = \int \nu_n^{(a)} \, d\sigma(a)$ et, par Fubini,

$$p_{T^n\sigma}(z) = \int p_{\nu_n^{(a)}}(z) \, d\sigma(a) = \int u_n^{(a)}(z) \, d\sigma(a). \tag{120}$$

Soit $M = \sup\{M_a \mid a \in \partial\mathbb{D}(c,r)\} < \infty$ et posons

$$\Phi_n(a,z) = G(z) + Md^{-n} - u_n^{(a)}(z) \geqslant 0, \tag{121}$$

la positivité venant de (117). En intégrant (120) et en utilisant (119), il vient $\int \Phi_n(a,z) \, d\sigma(a) \leqslant (M+A)d^{-n}$ pour tout $z$. Fixons un compact $L \subset \mathbf{C}$ et posons $\Psi_n(a) = \int_L \Phi_n(a,z) \, d\mathrm{Leb}(z) \geqslant 0$. Le théorème de Tonelli donne

$$\int \Psi_n(a) \, d\sigma(a) \leqslant (M+A) \, \mathrm{Leb}(L) \, d^{-n}. \tag{122}$$

Par l'inégalité de Markov (lemme A.25), $\sigma\left(\left\{\Psi_n > d^{-n/2}\right\}\right) \leqslant (M+A)\,\mathrm{Leb}(L)d^{-n/2}$, série convergente ; le lemme A.25 montre donc que pour $\sigma$-presque tout $a$ on a $\Psi_n(a) \leqslant d^{-n/2}$ pour $n$ assez grand, donc $\Psi_n(a) \to 0$. Comme $G + Md^{-n} - u_n^{(a)} \geqslant 0$, ceci signifie exactement que $u_n^{(a)} \to G$ dans $L^1(L)$. En prenant une exhaustion $L_k$ de $\mathbf{C}$ par des compacts et en intersectant les ensembles de mesure pleine correspondants, on obtient : pour $\sigma$-presque tout $a \in \partial\mathbb{D}(c,r)$, $u_n^{(a)} \to G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$, donc $\nu_n^{(a)} \to \mu$ par le théorème 3.50. Ceci vaut pour tout $r > 0$ ; en intégrant en coordonnées polaires autour de $c$, l'ensemble des $a \in \mathbf{C}$ pour lesquels la conclusion échoue est de mesure de Lebesgue nulle. □

**Théorème 5.8** (Brolin)**.** *Pour tout $a \in \mathbf{C}\backslash E_f$, on a $\nu_n^{(a)} \to \mu$ faiblement. En particulier* $\mathrm{Supp}\,\mu = \mathcal{J}$ *est l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite arrière de tout point non exceptionnel.*

Nous admettons le passage de la version presque partout à la version optimale, qui demande une analyse fine du comportement de $f^{-n}$ au voisinage de $a$ ; voir [5], ou [12], §6.5, ou encore [3], chapitre 1. Signalons que l'hypothèse $a \notin E_f$ est nécessaire : pour $f(z) = z^d$ et $a = 0$, on a $\nu_n^{(0)} = \delta_0$ pour tout $n$, alors que $\mu$ est la mesure de Lebesgue du cercle. Le théorème 5.8 raffine considérablement le théorème 2.11 : non seulement l'orbite arrière de $a$ s'accumule sur tout $\mathcal{J}$, mais elle s'y répartit selon une loi précise, la même pour tous les $a$.

**Corollaire 5.9.** *La mesure $\mu$ ne dépend que de la dynamique de $f$ : si $\phi$ est une homographie et $g = \phi f \phi^{-1}$ un polynôme, alors $\mu_g = \phi_* \mu_f$.*

*Démonstration.* Les mesures $\nu_n^{(a)}$ se transportent par $\phi$, et l'ensemble $E_g = \phi(E_f)$. On applique le théorème 5.8 des deux côtés. □

5.4. **Équidistribution des points périodiques.** Les points périodiques de période divisant $n$ sont les racines du polynôme unitaire $f^n(z)-z$, de degré $d^n$. Posons

$$\pi_n = \frac{1}{d^n}\sum_{f^n(z)=z} \mathrm{mult}_z\,\delta_z, \qquad p_{\pi_n}(z) = \frac{1}{d^n}\log|f^n(z)-z|\,. \tag{123}$$

**Proposition 5.10.** *Pour tout compact $L$ il existe $\varepsilon_n \to 0$ tel que $p_{\pi_n} \leqslant G+\varepsilon_n$ sur $L$, et $p_{\pi_n} \to G$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}\backslash K$. Par conséquent, toute valeur d'adhérence $v$ de $(p_{\pi_n})$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}$ est sous-harmonique, vérifie $v \leqslant G$ sur $\mathbf{C}$ et $v = G$ sur $\mathbf{C}\backslash K$ ; et toute valeur d'adhérence faible de $(\pi_n)$ est portée par $K$ et coïncide avec $\mu$ hors de $K$.*

*Démonstration.* Tous les points périodiques sont dans $K \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R)$, donc $\mathrm{Supp}\,\pi_n \subset K$. Sur un compact $L \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R')$ on a $|f^n(z)-z| \leqslant |f^n(z)|+R'$, d'où

$$p_{\pi_n} \leqslant \frac{1}{d^n}\log^+|f^n| + \frac{\log(1+R')}{d^n}, \tag{124}$$

dont le membre de droite converge uniformément vers $G$ par le théorème 4.2. Sur un compact de $\mathbf{C}\backslash K$, $f^n \to \infty$ uniformément et $p_{\pi_n} = d^{-n}\log|f^n| + d^{-n}\log|1-z/f^n| \to G$. Le reste résulte du théorème 3.50. □

Notons qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $K$ : la fonction $p_{\pi_n}$ vaut $-\infty$ en chaque point périodique. C'est le même phénomène unilatéral que pour (117), et c'est lui qui rend ces théorèmes délicats. Lorsque $K$ est de mesure nulle, cette difficulté disparaît.

**Corollaire 5.11.** *Supposons* $\mathrm{Leb}(K)=0$. *Alors* $\pi_n \to \mu$, *et* $\nu_n^{(a)} \to \mu$ *pour* tout $a \in \mathbf{C}$.

*Démonstration.* Traitons le cas de $(\nu_n^{(a)})$, celui de $(\pi_n)$ étant identique. D'après le lemme 5.6, $u_n^{(a)} \to G$ en tout point de $\mathbf{C}\backslash K$, donc Lebesgue-presque partout, et la famille est uniformément majorée sur les compacts. Soit $v$ une valeur d'adhérence de $(u_n^{(a)})$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}$, obtenue le long d'une sous-suite ; quitte à extraire encore, la convergence a lieu presque partout, donc $v = G$ presque partout. Toutes les valeurs d'adhérence coïncidant avec $G$, on a $u_n^{(a)} \to G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}$ et l'on conclut par le théorème 3.50. □

**Théorème 5.12** (Équidistribution des points périodiques)**.** *On a $\pi_n \to \mu$ faiblement. Il en va de même de la mesure de comptage normalisée des points périodiques* répulsifs *de période $n$.*

Ce théorème, dû à Tortrat et, dans le cadre des fractions rationnelles, à Lyubich, se démontre en contrôlant les zéros de $f^n(z)-z$ situés dans $\mathrm{Int}\,K$ : on montre qu'ils sont en nombre $o(d^n)$, ce qui suffit d'après la proposition 5.10. Voir [10] ou [3], chapitre 2. La seconde assertion résulte de ce que les points périodiques non répulsifs sont en nombre $O(1)$ par cycle et donc négligeables devant $d^n$.

5.5. **Exercices.**

**Exercice 5.13.** Pour $f(z) = z^d$, calculer explicitement $\nu_n^{(a)}$ pour $a \neq 0$ et vérifier directement le théorème 5.8. Que se passe-t-il pour $a = 0$ ?

**Exercice 5.14.** Montrer que pour $f(z) = z^2 + c$ avec $|c|$ grand, $\mathrm{Leb}(K_f) = 0$, et en déduire directement, par le corollaire 5.11, l'équidistribution des préimages et des points périodiques. Montrer sur l'exemple $f(z) = z^d$ que l'hypothèse $\mathrm{Leb}(K) = 0$ n'est pas superflue.

**Exercice 5.15.** Soit $g$ un polynôme fixé de degré $k \geqslant 0$. Montrer que les solutions de $f^n(z) = g(z)$ s'équidistribuent vers $\mu$ lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 5.16.** Déduire du théorème 5.2 une estimation de la vitesse : pour $\varphi$ de classe $C^2$ à support compact, $\left|\int \varphi \, \mathrm{d}(T^n\sigma) - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant C_\varphi d^{-n}$.

**Exercice 5.17.** Soit $L$ un compact non polaire tel que $\mathcal{J} \subset L$. Montrer que $\mathrm{cap}\left(f^{-n}(L)\right)^{d^n} \to$ une limite que l'on identifiera, et retrouver (**??**).

**Exercice 5.18.** Montrer, à l'aide de l'exercice **??**, que les points de Fekete de $\mathcal{J}(f)$ s'équidistribuent vers $\mu$.

## 6. Entropie, exposants de Lyapunov et fractions rationnelles

Ce dernier chapitre a deux objectifs. Le premier est d'expliquer en quel sens $\mu_f$ est *la* mesure naturelle du système $(\mathcal{J}(f), f)$ : c'est l'unique mesure invariante qui maximise l'entropie, et son exposant de Lyapunov se calcule explicitement en fonction des points critiques. Le second est d'indiquer comment toute la construction s'étend aux fractions rationnelles, où le potentiel logarithmique du plan doit être remplacé par un potentiel homogène sur $\mathbf{C}^2$.

6.1. **Mélange.** Rappelons que si $\nu$ est une mesure de probabilité invariante par $f$, le système $(f, \nu)$ est *mélangeant* si pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in L^2(\nu)$,

$$\int (\varphi \circ f^n)\, \psi \, \mathrm{d}\nu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \varphi \, \mathrm{d}\nu \int \psi \, \mathrm{d}\nu, \tag{125}$$

ce qui entraîne l'ergodicité. L'outil est l'*opérateur de transfert*

$$\Lambda\psi(z) = \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \deg_w f \cdot \psi(w), \tag{126}$$

qui envoie fonctions continues sur fonctions continues et vérifie $\Lambda^n\psi(z) = \int \psi \, \mathrm{d}\nu_n^{(z)}$ avec les notations (115).

**Théorème 6.1.** *Le système $\left(f, \mu_f\right)$ est mélangeant ; en particulier il est ergodique.*

*Démonstration.* L'égalité $f^*\mu = d\mu$ se réécrit $\int g\,\mathrm{d}\mu = \int \Lambda g\,\mathrm{d}\mu$ pour toute $g$ continue. En l'appliquant à $g = \psi\cdot(\varphi\circ f)$ et en observant que $\Lambda(\psi\cdot(\varphi\circ f)) = \varphi\cdot\Lambda\psi$, il vient

$$\int (\varphi\circ f)\,\psi\,\mathrm{d}\mu = \int \varphi\,\Lambda\psi\,\mathrm{d}\mu, \tag{127}$$

puis par récurrence $\int(\varphi\circ f^n)\psi\,\mathrm{d}\mu = \int\varphi\,\Lambda^n\psi\,\mathrm{d}\mu$. Or $\Lambda^n\psi(z) = \int\psi\,\mathrm{d}\nu_n^{(z)} \to \int\psi\,\mathrm{d}\mu$ pour tout $z\notin E_f$ par le théorème 5.8, et $\mu(E_f) = 0$ puisque $E_f\subset\mathcal{F}(f)$ tandis que $\operatorname{Supp}\mu = \mathcal{J}(f)$. Comme $|\Lambda^n\psi|\leqslant\|\psi\|_\infty$, le théorème de convergence dominée donne

$$\int(\varphi\circ f^n)\,\psi\,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int\varphi\,\mathrm{d}\mu\int\psi\,\mathrm{d}\mu \tag{128}$$

pour $\varphi,\psi$ continues, donc pour $\varphi,\psi\in L^2(\mu)$ par densité. □

6.2. **Entropie.** Rappelons brièvement les deux notions d'entropie. L'*entropie topologique* $h_{\mathrm{top}}(f)$ mesure le taux de croissance exponentiel du nombre d'orbites de longueur $n$ distinguables à $\varepsilon$ près : si $N(n,\varepsilon)$ est le cardinal minimal d'un ensemble $(n,\varepsilon)$-couvrant pour la distance $\sigma_n(z,w) = \max_{0\leqslant j<n}\sigma(f^jz,f^jw)$, alors

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(n,\varepsilon). \tag{129}$$

L'*entropie métrique* $h_\nu(f)$ d'une mesure invariante $\nu$ est l'entropie de Kolmogorov–Sinai, définie à partir des partitions mesurables. Le *principe variationnel*, que nous admettons, affirme que

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup\{h_\nu(f)\mid \nu\text{ mesure de probabilité invariante}\}. \tag{130}$$

Une mesure réalisant ce supremum est dite *d'entropie maximale*.

**Théorème 6.2** (Gromov, Misiurewicz–Przytycki, Lyubich, Freire–Lopes–Mañé)**.** *Soit $f$ rationnelle de degré $d\geqslant 2$. Alors $h_{\mathrm{top}}(f) = \log d$, la mesure $\mu_f$ vérifie $h_{\mu_f}(f) = \log d$, et c'est l'*unique *mesure de probabilité invariante d'entropie maximale.*

Nous admettons ce théorème ; voir [10], [7] et [8]. Donnons-en toutefois l'idée. La majoration $h_{\mathrm{top}}(f)\leqslant\log d$ est un argument de Gromov : le graphe des $n$ premières itérées est une courbe algébrique de $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^n$ dont le volume croît comme $d^n$, ce qui borne le nombre d'orbites $\varepsilon$-distinguables. La minoration $h_{\mathrm{top}}(f)\geqslant\log d$ est due à Misiurewicz et Przytycki et repose sur le fait que le degré topologique est un minorant de l'entropie. Enfin $h_{\mu_f} = \log d$ traduit exactement l'équation $f^*\mu_f = d\mu_f$ : les $d^n$ branches inverses de $f^n$ portent chacune une masse $d^{-n}$, de sorte que la partition dynamique se raffine à vitesse $d^n$, et l'unicité provient de ce que toute mesure d'entropie $\log d$ doit répartir sa masse de façon équilibrée entre les branches inverses, donc être équilibrée, donc être $\mu_f$ par le théorème 5.4.

## 6.3. **Exposant de Lyapunov et formule de Manning.**

**Définition 6.3.** L'*exposant de Lyapunov* de $\mu = \mu_f$ est

$$\chi_\mu = \int \log|f'| \, \mathrm{d}\mu. \tag{131}$$

Cette intégrale est bien définie et finie : $\log|f'|$ est une somme de fonctions $\log|z-c|$, dont les intégrales contre $\mu$ valent $G(c)$, finies. Par le théorème ergodique de Birkhoff et le théorème 6.1, $\frac{1}{n}\log|(f^n)'(z)| \to \chi_\mu$ pour $\mu$-presque tout $z$ : c'est le taux d'expansion moyen de $f$ le long des orbites typiques.

**Théorème 6.4** (Formule de Manning)**.** *Soit $f$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 2$ et $c_1, \dots, c_{d-1}$ ses points critiques dans* **C***, répétés selon leur multiplicité. Alors*

$$\chi_\mu = \log d + \sum_{i=1}^{d-1} G_f(c_i). \tag{132}$$

*Démonstration.* Le polynôme $f'$ est de degré $d-1$ et de coefficient dominant $d$, donc $f'(z) = d\prod_{i=1}^{d-1}(z-c_i)$. En intégrant $\log|f'|$ contre $\mu$ et en utilisant $p_\mu = G_f$ (identité (101), valable car $f$ est unitaire), il vient

$$\chi_\mu = \log d + \sum_{i=1}^{d-1} \int \log|z-c_i| \, \mathrm{d}\mu(z) = \log d + \sum_{i=1}^{d-1} G_f(c_i). \tag{133}$$

□

Cette formule, d'une simplicité remarquable, dit que l'expansion moyenne sur l'ensemble de Julia est *minimale* exactement quand aucun point critique ne s'échappe.

**Corollaire 6.5.** *On a $\chi_\mu \geqslant \log d > 0$, avec égalité si et seulement si tous les points critiques de $f$ appartiennent à $K_f$, c'est-à-dire si et seulement si $K_f$ est connexe. En particulier $\mu$ est une mesure hyperbolique et*

$$\dim_H(\mu) = \frac{h_\mu}{\chi_\mu} = \frac{\log d}{\chi_\mu} \leqslant 1, \tag{134}$$

*avec égalité si et seulement si $\mathcal{J}(f)$ est un cercle ou un segment.*

La formule de dimension (134) est le théorème de Mañé, version pour les applications rationnelles de la formule de Ledrappier–Young ; l'égalité $\dim_H \mu = 1$ force $\mathcal{J}(f)$ à être analytique par un théorème de Zdunik. Signalons enfin que $\chi_\nu \geqslant \frac{1}{2}\log d$ pour toute mesure invariante d'entropie maximale, ce qui découle ici de l'inégalité de Ruelle $h_\nu \leqslant 2\chi_\nu$ ; le théorème 6.4 donne beaucoup mieux dans le cas polynomial.

6.4. **Le cas des fractions rationnelles.** Soit maintenant $f$ une fraction rationnelle de degré $d \geqslant 2$. La construction du chapitre 4 utilisait de façon essentielle le point fixe $\infty$ ; pour s'en passer, on relève $f$ à $\mathbf{C}^2$.

Écrivons $f = [P : Q]$ en coordonnées homogènes, où $P, Q$ sont des polynômes homogènes de degré $d$ sans facteur commun, et posons

$$F = (P,Q) : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2, \qquad \pi : \mathbf{C}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \tag{135}$$

la projection canonique, de sorte que $\pi \circ F = f \circ \pi$. La condition « sans facteur commun » équivaut à $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ et garantit $F^{-1}(0) = \{0\}$, donc l'existence de $C > 0$ telle que

$$C^{-1} \|v\|^d \leqslant \|F(v)\| \leqslant C \|v\|^d \qquad (v \in \mathbf{C}^2). \tag{136}$$

**Théorème 6.6.** *La suite $d^{-n} \log \|F^n\|$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}^2 \backslash \{0\}$ vers une fonction continue $G_F$ vérifiant*

$$G_F \circ F = d\, G_F, \qquad G_F(\lambda v) = \log|\lambda| + G_F(v), \qquad |G_F(v) - \log\|v\|| \leqslant \frac{\log C}{d-1}. \tag{137}$$

*La fonction $g(z) = G_F(z,1)$ est sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ et la mesure*

$$\mu_f = \frac{1}{2\pi} \Delta g \tag{138}$$

*est une mesure de probabilité sur $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, indépendante du choix des coordonnées homogènes, sans atome, de support $\mathcal{J}(f)$, et vérifiant $f^* \mu_f = d\mu_f$.*

La démonstration est mot pour mot celle du théorème 4.2, l'estimée (136) remplaçant le lemme 4.1 ; l'homogénéité $G_F(\lambda v) = \log|\lambda| + G_F(v)$ résulte de $F(\lambda v) = \lambda^d F(v)$. Lorsque $f$ est un polynôme, $F(x,y) = \big(y^d f(x/y), y^d\big)$ et l'on retrouve $g = G_f$.

Tous les énoncés des chapitres 5 et 6 restent valables, avec les mêmes démonstrations une fois les potentiels remplacés par leurs analogues homogènes.

**Théorème 6.7** (Freire–Lopes–Mañé, Lyubich)**.** *Soit $f$ rationnelle de degré $d \geqslant 2$ et $\mu_f$ comme ci-dessus.*

*(1) $\mu_f$ est l'unique mesure de probabilité sans atome vérifiant $f^* \mu_f = d\mu_f$.*

*(2) Pour tout $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \backslash E_f$, $d^{-n}(f^n)^* \delta_a \to \mu_f$ ; l'ensemble exceptionnel $E_f$ contient au plus deux points.*

*(3) Les points périodiques répulsifs de période $n$ s'équidistribuent vers $\mu_f$.*

*(4) $\big(f, \mu_f\big)$ est mélangeant, d'entropie $\log d = h_{\mathrm{top}}(f)$, et c'est l'unique mesure d'entropie maximale.*

**Remarque 6.8.** Ce schéma — construire une fonction de Green par une limite $d^{-n} \log \|F^n\|$, en prendre le laplacien, montrer que la mesure obtenue est équilibrée et qu'elle est l'unique telle mesure — est robuste. Il s'étend aux endomorphismes de $\mathbf{P}^k$ (Fornæss–Sibony), aux applications de Hénon

du plan complexe (Bedford–Smillie), et, en remplaçant $\mathbf{C}$ par un corps ultramétrique et le plan par l'espace de Berkovich, à la dynamique arithmétique (Baker–Rumely, Chambert-Loir, Favre–Rivera-Letelier). Dans tous ces cadres, la théorie du potentiel joue exactement le rôle qu'elle joue ici.

### 6.5. **Exercices.**

**Exercice 6.9.** Pour $f(z) = z^d$, vérifier directement que $h_{\mu_f} = \log d$ et $\chi_{\mu_f} = \log d$, puis $\dim_H \mu_f = 1$.

**Exercice 6.10.** Soit $f(z) = z^2 + c$. Exprimer $\chi_{\mu_f}$ en fonction de $G_f(0)$ et en déduire que $c \mapsto \chi_{\mu_f}$ est continue sur $\mathbf{C}$, harmonique hors de l'ensemble de Mandelbrot, et minimale exactement sur celui-ci.

**Exercice 6.11.** Montrer que l'opérateur $\Lambda$ de (126) envoie fonctions continues sur fonctions continues, et que $\Lambda 1 = 1$. En déduire que $\mu_f$ est l'unique mesure de probabilité $\nu$ telle que $\int \Lambda\psi \, d\nu = \int \psi \, d\nu$ pour toute $\psi$ continue, parmi celles sans atome.

**Exercice 6.12.** Montrer, à partir du théorème 6.1, que $\mu_f$ est ergodique, puis que $\mu_f$-presque toute orbite est dense dans $\mathcal{J}(f)$.

**Exercice 6.13.** Vérifier (136) à partir de $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$, et démontrer le théorème 6.6 en suivant la démonstration du théorème 4.2.

**Exercice 6.14.** Calculer $\chi_\mu$ pour le polynôme de Tchebychev $T_d$ de l'exercice 4.16 et vérifier la formule de Manning. Que vaut $\dim_H \mu$ ?

## ANNEXE A. RAPPELS D'ANALYSE COMPLEXE ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Ce chapitre ne contient aucun résultat nouveau : il rassemble, avec des énoncés précis et des références, les théorèmes d'analyse dont nous nous servirons constamment. Le lecteur qui les connaît peut passer directement au chapitre 1 et revenir ici à l'occasion. Il vaut cependant la peine de remarquer dès maintenant que trois énoncés seulement portent l'essentiel du poids de la théorie. Le premier est le *principe du maximum*, sous ses diverses formes, qui est le mécanisme par lequel une information au bord contrôle une fonction à l'intérieur. Le deuxième est le *théorème d'Ascoli*, qui transforme une majoration uniforme en une propriété de compacité : c'est lui qui, combiné aux estimées de Cauchy, donnera les familles normales, et donc la définition même de l'ensemble de Fatou. Le troisième est le *théorème de Banach–Alaoglu* sous sa forme concrète — de toute suite de mesures de probabilité sur un compact on peut extraire une sous-suite faiblement convergente — qui joue exactement le même rôle du côté de la théorie de la mesure, et permet au chapitre 5 de parler de « la » limite d'une suite de mesures de comptage. Les trois sont des énoncés de compacité, et toute la dynamique holomorphe pourrait se décrire comme l'art de les appliquer au bon endroit.

Sauf mention contraire, $U$ désigne un ouvert de $\mathbf{C}$ et $O(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $U$. Les démonstrations omises se trouvent dans [13] et [1] pour la partie complexe, dans [13] et [4] pour la partie fonctionnelle.

A.1. **Fonctions holomorphes.**

**Théorème A.1** (Cauchy)**.** *Soit $f \in O(U)$ et $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(a,r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta. \tag{139}$$

*En particulier $f$ est analytique, indéfiniment dérivable, et ses dérivées vérifient les* estimées de Cauchy

$$\left| f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{k!}{r^k} \sup_{\partial \mathbb{D}(a,r)} |f| \,. \tag{140}$$

Le cas $k = 1$ de (140) est celui que nous utiliserons : il dit qu'une famille de fonctions holomorphes uniformément bornée est automatiquement uniformément lipschitzienne sur les compacts. C'est le pont entre « borné » et « équicontinu », donc entre l'analyse complexe et le théorème d'Ascoli.

**Corollaire A.2** (Liouville)**.** *Toute fonction entière bornée est constante. Plus généralement, si $f$ est entière et $|f(z)| = O(|z|^k)$ à l'infini, alors $f$ est un polynôme de degré au plus $k$.*

**Théorème A.3** (Principe du maximum)**.** *Soit $f \in O(U)$ avec $U$ connexe.*

*(1) Si $|f|$ admet un maximum local en un point de $U$, alors $f$ est constante.*

*(2) Si $U$ est borné et si $f$ se prolonge continûment à $\overline{U}$, alors* $\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f|$.

**Théorème A.4** (Application ouverte, zéros isolés)**.** *Soit $f \in O(U)$ non constante, $U$ connexe. Alors $f$ est une application ouverte, et ses zéros sont isolés. En particulier, si $f$ et $g$ sont holomorphes sur $U$ connexe et coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans $U$, alors $f = g$.*

**Théorème A.5** (Weierstrass)**.** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions holomorphes sur $U$ convergeant uniformément sur tout compact de $U$ vers une fonction $f$. Alors $f$ est holomorphe et, pour tout $k$, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformément sur tout compact.*

Ce théorème n'a pas d'analogue réel, et c'est lui qui rend la notion de famille normale si puissante : une limite de fonctions holomorphes est holomorphe, sans hypothèse supplémentaire.

**Théorème A.6** (Singularité effaçable, Riemann)**.** *Soit $f$ holomorphe et bornée sur $\mathbb{D}(a,r)\backslash\{a\}$. Alors $f$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{D}(a,r)$.*

Rappelons enfin qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(a,r)\backslash\{a\}$ admet un développement de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k (z-a)^k$, et que la singularité est effaçable, un pôle, ou essentielle selon que $c_k = 0$ pour $k < 0$, pour $k < -m$ avec $c_{-m} \neq 0$, ou pour aucun rang. Une application *méromorphe* sur $U$ est une application holomorphe $U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ non identiquement égale à $\infty$ sur une composante connexe.

**Théorème A.7** (Casorati–Weierstrass ; Picard)**.** *Soit $a$ une singularité essentielle de $f$. Alors l'image de tout voisinage épointé de $a$ est dense dans $\mathbf{C}$ ; mieux, elle est égale à $\mathbf{C}$ privé d'au plus un point (grand théorème de Picard).*

Nous n'utiliserons pas le théorème de Picard, mais il est utile de le garder à l'esprit : le grand théorème de Montel (théorème 1.16) en est la version « en famille », et le nombre 2 de valeurs omises y joue le même rôle.

### A.2. **Zéros, indice et théorème de Rouché.**

**Théorème A.8** (Principe de l'argument)**.** *Soit $f$ méromorphe sur $U$, et $\gamma$ un lacet homotope à un point dans $U$, ne rencontrant ni les zéros ni les pôles de $f$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_a \mathrm{Ind}(\gamma,a)\ \mathrm{ord}_a(f), \tag{141}$$

*où $\mathrm{ord}_a(f)$ est l'ordre d'annulation de $f$ en $a$ (négatif en un pôle) et $\mathrm{Ind}(\gamma,a)$ l'indice de $\gamma$ autour de $a$.*

**Théorème A.9** (Rouché)**.** *Soient $f,g$ holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$ telles que $|f-g|<|f|$ sur $\partial\mathbb{D}(a,r)$. Alors $f$ et $g$ ont le même nombre de zéros dans $\mathbb{D}(a,r)$, comptés avec multiplicité.*

Ce théorème est notre outil de comptage : il dit que le nombre de solutions d'une équation holomorphe est stable par petite perturbation, et c'est sous cette forme que nous établirons la continuité du degré (lemme 1.18).

**Proposition A.10** (Forme locale)**.** *Soit $f$ holomorphe au voisinage de $a$, non constante, et $k\geqslant 1$ l'ordre d'annulation de $f-f(a)$ en $a$. Alors il existe un biholomorphisme $\varphi$ d'un voisinage de $a$ sur un voisinage de $0$, avec $\varphi(a)=0$, tel que*

$$f(z) = f(a)+\varphi(z)^k. \tag{142}$$

*En particulier $f$ est de degré topologique $k$ au voisinage de $a$, au-dessus de tout point $\neq f(a)$ assez proche de $f(a)$.*

**Corollaire A.11.** *Une application holomorphe injective est un biholomorphisme sur son image, et sa dérivée ne s'annule pas.*

**Théorème A.12** (Hurwitz)**.** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions holomorphes sur $U$ connexe, convergeant uniformément sur tout compact vers $f$. Si aucune $f_n$ ne s'annule, alors $f$ ne s'annule pas ou $f\equiv 0$. Si toutes les $f_n$ sont injectives, alors $f$ est injective ou constante.*

### A.3. **Le lemme de Schwarz et la métrique de Poincaré.**

**Lemme A.13** (Schwarz)**.** *Soit $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorphe avec $f(0)=0$. Alors $|f(z)|\leqslant|z|$ pour tout $z$ et $|f'(0)|\leqslant 1$. Si l'une de ces inégalités est une égalité en un point, alors $f$ est une rotation.*

Les automorphismes du disque sont exactement les applications

$$z\longmapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\qquad \theta\in\mathbf{R},\ a\in\mathbb{D}, \tag{143}$$

et le groupe qu'ils forment agit transitivement sur $\mathbb{D}$. Ceci permet de définir la *métrique de Poincaré*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z)\,|\mathrm{d}z| = \frac{2\,|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}, \tag{144}$$

invariante par (143), complète, et de courbure constante $-1$.

**Théorème A.14** (Schwarz–Pick)**.** *Toute application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est* 1*-lipschitzienne pour la distance de Poincaré, et c'est une isométrie si et seulement si $f$ est un automorphisme.*

**Théorème A.15** (Uniformisation)**.** *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, à $\mathbf{C}$ ou à $\mathbb{D}$. Par conséquent, si $X$ est une surface de Riemann dont le revêtement universel est $\mathbb{D}$ — ce qui est le cas dès que $X$ est un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont le complémentaire contient au moins trois points — alors $X$ hérite d'une métrique complète $\rho_X$, dite* hyperbolique*, pour laquelle toute application holomorphe $X \to Y$ entre deux telles surfaces est* 1*-lipschitzienne.*

C'est exactement cet énoncé qui produit le grand théorème de Montel : une famille d'applications à valeurs dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ est uniformément lipschitzienne pour les métriques hyperboliques, donc équicontinue, donc normale par le théorème A.17. Voir [11], §2–3, pour une exposition complète.

A.4. **Convergence uniforme sur les compacts et théorème d'Ascoli.** Soit $U \subset \mathbf{C}$ ouvert et $(X,\delta)$ un espace métrique. On munit l'ensemble $\mathcal{C}(U,X)$ des applications continues de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. En choisissant une exhaustion $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ de $U$ par des compacts, cette topologie est induite par la distance

$$D(f,g) = \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j} \min\left(1, \sup_{K_j} \delta(f,g)\right), \tag{145}$$

qui est complète dès que $X$ l'est.

**Définition A.16.** Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U,X)$ est *équicontinue en $a \in U$* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$|z-a| < \eta \implies \delta(f(z),f(a)) < \varepsilon \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{F}. \tag{146}$$

Elle est équicontinue si elle l'est en tout point.

Le point essentiel est que $\eta$ ne dépend pas de $f$ : c'est une condition uniforme *en famille*, et c'est elle qui exprimera la stabilité dynamique.

**Théorème A.17** (Ascoli–Arzelà)**.** *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U,X)$ avec $(X,\delta)$ métrique complet. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(U,X)$ si et seulement si :*

*(1) $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de $U$ ;*

*(2) pour tout $z \in U$, l'ensemble $\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $X$.*

*Comme $\mathcal{C}(U,X)$ est métrisable, la compacité relative équivaut à la possibilité d'extraire de toute suite de $\mathcal{F}$ une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de $U$.*

**Remarque A.18.** Lorsque $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ muni de la distance sphérique, $X$ est compact et la condition (2) est automatiquement vérifiée. Le théorème d'Ascoli se réduit alors à l'équivalence

$$\mathcal{F} \text{ normale} \iff \mathcal{F} \text{ équicontinue}, \tag{147}$$

qui sera notre définition de travail au chapitre 2 : l'ensemble de Fatou est à la fois l'ouvert de normalité et l'ouvert d'équicontinuité. Il est utile de retenir les deux points de vue, car le premier se prête aux arguments d'extraction et le second aux estimations.

**Corollaire A.19.** *Soit $\mathcal{F} \subset O(U)$ uniformément bornée sur tout compact de $U$. Alors de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe.*

*Démonstration.* Soit $K \subset U$ compact et $r > 0$ tel que $K_r = \{z \mid \operatorname{dist}(z,K) \leqslant r\} \subset U$. Si $M = \sup_{\mathcal{F}} \sup_{K_r} |f|$, l'estimée (140) donne $|f'| \leqslant M/r$ sur $K$, donc toutes les $f \in \mathcal{F}$ sont $M/r$-lipschitziennes sur $K$ : la famille est équicontinue. Le théorème A.17 fournit l'extraction, et le théorème A.5 l'holomorphie de la limite. □

A.5. **Mesures, dualité et convergence faible.** Soit $X$ un espace métrique localement compact séparable — pour nous, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ou un compact de $\mathbf{C}$. On note $\mathcal{C}_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact et $\mathcal{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon complexes.

**Théorème A.20** (Riesz–Markov)**.** *Toute forme linéaire positive $L$ sur $\mathcal{C}_c(X)$ s'écrit de façon unique $L(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$ pour une mesure borélienne positive $\mu$, finie sur les compacts et régulière.*

**Définition A.21.** Une suite $(\mu_n)$ de mesures positives sur $X$ *converge faiblement* vers $\mu$, ce que l'on note $\mu_n \to \mu$, si

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_n \longrightarrow \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}_c(X). \tag{148}$$

**Théorème A.22** (Banach–Alaoglu)**.** *Soit $K$ un compact métrique. L'ensemble des mesures de probabilité sur $K$, muni de la topologie faible, est compact et métrisable. En particulier, de toute suite de mesures de probabilité portées par un même compact on peut extraire une sous-suite faiblement convergente, dont la limite est encore une mesure de probabilité.*

C'est sous cette forme, et presque uniquement sous cette forme, que nous utiliserons l'analyse fonctionnelle : elle garantit l'existence de valeurs d'adhérence, à charge pour la théorie du potentiel de montrer qu'il n'y en a qu'une. Signalons que l'hypothèse de compacité du support est indispensable : la masse peut fuir à l'infini, comme le montre $\mu_n = \delta_n$ sur $\mathbf{C}$.

**Proposition A.23** (Critères de convergence)**.** *Soit $(\mu_n)$ une suite de mesures de probabilité portées par un compact fixe $K$.*

*(1) Si* $\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_n$ *converge pour toute* $\varphi$ *dans une partie dense de* $\mathcal{C}(K)$*, alors* $(\mu_n)$ *converge faiblement.*

*(2) (Portmanteau)* $\mu_n \to \mu$ *si et seulement si* $\limsup \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ *pour tout fermé* $F$*, si et seulement si* $\liminf \mu_n(V) \geqslant \mu(V)$ *pour tout ouvert* $V$*.*

*(3) Si* $\mu_n \to \mu$ *et si* $A$ *est un borélien avec* $\mu(\partial A) = 0$*, alors* $\mu_n(A) \to \mu(A)$*.*

Nous aurons également besoin, au chapitre 3, de la notion de laplacien au sens des distributions.

**Définition A.24.** Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Son *laplacien au sens des distributions* est la forme linéaire

$$\varphi \longmapsto \langle \Delta u, \varphi \rangle = \int_U u \, \Delta\varphi \, \mathrm{dLeb}, \qquad \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(U). \tag{149}$$

On dit que $\Delta u \geqslant 0$ si $\langle \Delta u, \varphi \rangle \geqslant 0$ pour toute $\varphi \geqslant 0$.

Le théorème A.20 montre alors que $\Delta u$ est une mesure positive, ce qui donnera un sens à la mesure de Riesz d'une fonction sous-harmonique. Rappelons enfin le lemme de Weyl : si $\Delta u = 0$ au sens des distributions, alors $u$ coïncide presque partout avec une fonction harmonique, en particulier $\mathcal{C}^\infty$.

Nous utiliserons librement les théorèmes de convergence monotone et dominée, le théorème de Fubini–Tonelli, ainsi que les deux énoncés élémentaires suivants, qui interviendront dans la démonstration du théorème de Brolin.

**Lemme A.25** (Markov, Borel–Cantelli)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace de probabilité.*

*(1) Si* $\Psi \geqslant 0$ *est mesurable et* $t > 0$*, alors* $\mathbf{P}(\Psi > t) \leqslant \frac{1}{t} \int \Psi \, \mathrm{d}\mathbf{P}$*.*

*(2) Si* $(A_n)$ *sont mesurables avec* $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$*, alors presque sûrement* $\omega$ *n'appartient qu'à un nombre fini de* $A_n$*.*

A.6. **Exercices.**

**Exercice A.26.** Déduire des estimées de Cauchy (140) que si $\mathcal{F} \subset O(U)$ est uniformément bornée par $M$ sur $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subset U$, alors toutes les $f \in \mathcal{F}$ sont $\frac{4M}{r}$-lipschitziennes sur $\overline{\mathbb{D}}(a, r/2)$.

**Exercice A.27.** Soit $f$ holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, avec $|f| = 1$ sur $\mathbb{S}^1$ et $f$ non constante. Montrer que $f$ s'annule dans $\mathbb{D}$. (Appliquer le principe du maximum à $f$ et à $1/f$.)

**Exercice A.28.** Soit $f$ holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(a,r)$ avec $f(a) = b$ et $f - b$ d'ordre $k$ en $a$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $b'$ avec $|b' - b| < \varepsilon$, l'équation $f(z) = b'$ a exactement $k$ solutions dans $\mathbb{D}(a,r)$ comptées avec multiplicité. En déduire la proposition A.10.

**Exercice A.29.** Montrer que la famille $\{z \mapsto z^n \mid n \geqslant 1\}$ est équicontinue sur $\mathbb{D}$, mais pas sur un voisinage de 1 dans $\mathbf{C}$. Que vaut la limite sur $\mathbb{D}$ ?

**Exercice A.30.** Montrer qu'une famille $\mathcal{F} \subset O(U)$ équicontinue en un point $a$ est uniformément bornée au voisinage de $a$ dès qu'elle l'est en $a$. La réciproque du corollaire A.19 est-elle vraie, c'est-à-dire une famille normale de fonctions holomorphes est-elle toujours localement uniformément bornée ?

**Exercice A.31.** Soit $\mu_n$ la mesure uniforme sur les racines $n$-ièmes de l'unité. Montrer que $\mu_n$ converge faiblement vers la mesure de Lebesgue normalisée de $\mathbb{S}^1$. Montrer que $\mu_n(\mathbb{S}^1) \nrightarrow 0$ bien que chaque $\mu_n$ soit atomique : la convergence faible ne préserve aucune propriété de régularité.

**Exercice A.32.** Donner un exemple de suite de mesures de probabilité sur $\mathbf{C}$ n'admettant aucune valeur d'adhérence faible qui soit une mesure de probabilité, et expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème A.22.

## RÉFÉRENCES


[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3e édition, McGraw–Hill, 1979.

[2] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Graduate Texts in Mathematics 132, Springer, 1991.

[3] F. Berteloot, V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés 7, SMF/EDP Sciences, 2001.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod, 2005.

[5] H. Brolin, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark. Mat. **6** (1965), 103–144.

[6] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext, Springer, 1993.

[7] A. Freire, A. Lopes, R. Mañé, *An invariant measure for rational maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **14** (1983), 45–62.

[8] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. **49** (2003), 217–235.

[9] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics 127, Birkhäuser, 1994.

[10] M. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynam. Systems **3** (1983), 351–385.

[11] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, 3e édition, Annals of Mathematics Studies 160, Princeton University Press, 2006.

[12] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Mathematical Society Student Texts 28, Cambridge University Press, 1995.

[13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3e édition, McGraw–Hill, 1987.

[14] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 316, Springer, 1997.

[15] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbf{P}^k$, dans *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas et Synthèses 8, SMF, 1999, 97–185.