ANALYSE VECTORIELLE

MARC ABBOUD

TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires 2
1.1. Topologie de $\mathbf{R}^n$ 3
1.2. Espaces métriques complets et théorème du point fixe 4
1.3. Fonctions d'une variable réelle 6
1.4. Intégration des fonctions à valeurs vectorielles 7
1.5. Exercices 8
2. Différentielles et dérivées partielles 9
2.1. Notations 9
2.2. Différentielle 9
2.3. Dérivées partielles 13
2.4. Fonctions de classe C^1 17
2.5. Dérivées d'ordre supérieur et lemme de Schwarz 19
2.6. Difféomorphismes, inversion locale et fonctions implicites 21
2.7. Les opérateurs de l'analyse vectorielle 25
2.8. Exercices 27
3. Intégrales et théorèmes de Stokes 28
3.1. Intégrales multiples 28
3.2. Courbes et intégrales curvilignes 31
3.3. Champs de gradients et potentiels 32
3.4. Le théorème de Green–Riemann 34
3.5. Surfaces, aire et flux 35
3.6. Surfaces compactes et orientation 37
3.7. Le théorème de Stokes 40
3.8. Le théorème de la divergence 42
3.9. Interprétations et conséquences 43
3.10. Exercices 44
4. Équations différentielles et champs de vecteurs 45
4.1. Équations différentielles : généralités 46
4.2. Le lemme de Grönwall 47

Date: 2026-2027.

4.3. Le théorème de Cauchy–Lipschitz 47
4.4. Solutions maximales 49
4.5. Dépendance par rapport aux conditions initiales 50
4.6. Le flot d'un champ de vecteurs 51
4.7. Redressement local 52
4.8. Flot et volume : le théorème de Liouville 53
4.9. Exercices 55
Références 55

Ce cours est une introduction au calcul différentiel et intégral en plusieurs variables. Le chapitre 1 rassemble les outils d'analyse à une variable et de topologie dont nous nous servirons constamment : le théorème des accroissements finis et le théorème du point fixe de Banach y jouent un rôle central, puisque le premier gouverne tout le calcul différentiel du chapitre 2 et que le second fournira aussi bien le théorème d'inversion locale que le théorème de Cauchy–Lipschitz. Le chapitre 2 développe le calcul différentiel : différentielle, dérivées partielles, inversion locale, fonctions implicites, et les opérateurs grad, div, rot. Le chapitre 3 est consacré à l'intégration et culmine avec les théorèmes de Green–Riemann, Stokes et de la divergence. Le chapitre 4 traite enfin des équations différentielles ordinaires et des flots de champs de vecteurs.

Les prérequis sont un cours d'analyse réelle à une variable et un cours d'algèbre linéaire. Les démonstrations laissées au lecteur sont signalées comme telles ; les rares énoncés admis sont clairement identifiés.

Convention de notation. Les lettres x, y, z, s, t, w sont réservées aux *coordonnées* et aux variables muettes : $x = (x_1, \ldots, x_n)$ désigne le point courant de $\mathbf{R}^n$ vu comme un système de coordonnées, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivation par rapport à la i-ème d'entre elles, et s, t des paramètres réels. Les *points* en lesquels on évalue les fonctions ou que l'on fixe dans un énoncé sont notés a, b, c, avec $a = (a_1, \ldots, a_n)$ pour leurs coordonnées. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se lit : la dérivée partielle de f par rapport à la i-ème coordonnée, évaluée au point a. Les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ vus comme accroissements ou directions sont notés u, v, et les paramètres d'une nappe (u, v).

1. PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre rassemble les résultats d'analyse à une variable et de topologie des espaces métriques que nous utiliserons dans tout le cours. La plupart sont connus du lecteur ; nous en redonnons les énoncés précis et, pour les deux plus importants, la démonstration. Ces deux théorèmes sont le *théorème des accroissements finis* (théorème 1.15) et le *théorème du point fixe de Banach* (théorème 1.10). Le premier est l'outil qui permet de contrôler l'accroissement d'une fonction par sa dérivée, et donc de transformer une information infinitésimale en une information sur un intervalle : c'est le

mécanisme de fond de tout le calcul différentiel. Le second est un théorème d'existence : il produit des solutions d'équations que l'on ne sait pas résoudre explicitement, et nous le rencontrerons deux fois, pour le théorème d'inversion locale (théorème 2.44) et pour le théorème de Cauchy–Lipschitz (théorème 4.7).

1.1. **Topologie de $\mathbf{R}^n$.** On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire euclidien et de la norme associée

$$\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad \|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle}. \tag{1}$$

On rappelle l'inégalité de Cauchy–Schwarz $|\langle a,b\rangle| \leqslant \|a\|\,\|b\|$, avec égalité si et seulement si a et b sont colinéaires. On utilisera aussi les normes $\|a\|_1 = \sum_i |a_i|$ et $\|a\|_\infty = \max_i |a_i|$.

Théorème 1.1 (Équivalence des normes)**.** *Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbf{R}^n$. Alors il existe des constantes $c, C > 0$ telles que*

$$cN_1(a) \leqslant N_2(a) \leqslant CN_1(a) \quad \textit{pour tout } a \in \mathbf{R}^n. \tag{2}$$

En conséquence, toutes les notions topologiques sur $\mathbf{R}^n$ (ouverts, fermés, compacts, suites convergentes, limites, continuité) sont indépendantes du choix de la norme. Nous travaillerons avec la norme euclidienne sauf mention explicite du contraire, et nous nous autoriserons à changer de norme quand cela simplifie un calcul.

On note

$$\mathbf{B}(a,r) = \{b \in \mathbf{R}^n \mid \|b-a\| < r\}, \qquad \overline{\mathbf{B}}(a,r) = \{b \in \mathbf{R}^n \mid \|b-a\| \leqslant r\} \tag{3}$$

les boules ouverte et fermée de centre a et de rayon $r > 0$. Un ensemble $U \subset \mathbf{R}^n$ est *ouvert* si pour tout $a \in U$ il existe $r > 0$ tel que $\mathbf{B}(a,r) \subset U$; un ensemble est *fermé* si son complémentaire est ouvert, ce qui équivaut à ce qu'il soit stable par passage à la limite des suites. Sauf mention du contraire, la lettre U désignera toujours un ouvert.

Définition 1.2. Un ensemble $K \subset \mathbf{R}^n$ est *compact* si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément de K.

Théorème 1.3 (Borel–Lebesgue, Heine–Borel)**.** *Un ensemble $K \subset \mathbf{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné. De plus :*

(1) l'image d'un compact par une application continue est compacte ;

(2) une fonction continue $f : K \to \mathbf{R}$ sur un compact non vide est bornée et atteint ses bornes ;

(3) (théorème de Heine) une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Définition 1.4. Un ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$ est *convexe* si pour tous $a, b \in A$ le segment

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\} \tag{4}$$

est contenu dans A. Il est *étoilé par rapport à $c \in A$* si $[c,a] \subset A$ pour tout $a \in A$. Il est *connexe par arcs* si deux points quelconques de A peuvent être joints par un chemin continu tracé dans A.

Tout convexe est étoilé, tout étoilé est connexe par arcs. Pour un ouvert de $\mathbf{R}^n$, être connexe et être connexe par arcs sont deux propriétés équivalentes ; on parlera indifféremment de l'une ou de l'autre.

Lemme 1.5. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert connexe et $A \subset U$ une partie non vide, à la fois ouverte et fermée dans U. Alors $A = U$.*

C'est la définition même de la connexité, mais il est utile de garder à l'esprit la stratégie qu'elle autorise : pour montrer qu'une propriété est vraie partout sur un ouvert connexe, il suffit de montrer qu'elle est vraie quelque part, qu'elle est stable par passage à la limite, et qu'elle se propage à un voisinage de tout point où elle est vérifiée. Nous emploierons cet argument à plusieurs reprises, par exemple au corollaire 2.29.

1.2. **Espaces métriques complets et théorème du point fixe.**

Définition 1.6. Soit (E,d) un espace métrique. Une suite (a_k) de E est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall k,l \geqslant N,\ d(a_k,a_l) \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

L'espace (E,d) est *complet* si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Toute suite convergente est de Cauchy ; la complétude est l'affirmation de la réciproque, et c'est une propriété d'existence : elle permet d'affirmer qu'un objet existe à partir d'une information purement interne à la suite qui devrait le construire.

Exemple 1.7.
(i) $\mathbf{R}$ est complet, et donc $\mathbf{R}^n$ également pour n'importe laquelle de ses normes.
(ii) Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète pour la distance induite. En particulier une boule fermée $\overline{\mathbf{B}}(a,r) \subset \mathbf{R}^n$ est un espace métrique complet.
(iii) L'espace $\mathbf{Q}$ n'est pas complet.

L'exemple suivant est celui dont nous nous servirons pour construire les solutions d'équations différentielles.

Proposition 1.8. *Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un compact (i.e un fermé borné) et soit $\mathcal{C}(K,\mathbf{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbf{R}^n$, muni de la distance de la convergence uniforme*

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in K} \|f(t)-g(t)\|. \tag{6}$$

Alors $(\mathcal{C}(K,\mathbf{R}^n), d_\infty)$ est un espace métrique complet.

Démonstration. La quantité $d_\infty(f,g)$ est finie car $f-g$ est continue sur un compact donc bornée, et c'est clairement une distance. Soit (f_k) une suite de Cauchy. Pour chaque $t \in K$ fixé, la suite $(f_k(t))$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}^n$ puisque $\|f_k(t)-f_l(t)\| \leqslant d_\infty(f_k,f_l)$; comme $\mathbf{R}^n$ est complet elle converge vers une limite que l'on note $f(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $d_\infty(f_k,f_l) \leqslant \varepsilon$ pour $k,l \geqslant N$. En faisant tendre l vers l'infini dans l'inégalité $\|f_k(t)-f_l(t)\| \leqslant \varepsilon$, on obtient $\|f_k(t)-f(t)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in K$ et tout $k \geqslant N$: la convergence est uniforme.

Il reste à voir que f est continue. Soient $t_0 \in K$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons k tel que $\|f_k - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$, puis un voisinage V de t_0 sur lequel $\|f_k(t) - f_k(t_0)\| \leqslant \varepsilon/3$ par continuité de f_k. Alors pour $t \in V$

$$\|f(t) - f(t_0)\| \leqslant \|f(t) - f_k(t)\| + \|f_k(t) - f_k(t_0)\| + \|f_k(t_0) - f(t_0)\| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

□

Définition 1.9. Soit (E,d) un espace métrique et $F : E \to E$. On dit que F est *lipschitzienne de rapport* $k \geqslant 0$ si

$$d(F(a),F(b)) \leqslant k\,d(a,b) \quad \text{pour tous } a,b \in E, \tag{8}$$

et *contractante* s'il existe un tel k avec $k < 1$.

Théorème 1.10 (Point fixe de Banach–Picard)**.** *Soit (E,d) un espace métrique complet* ***non vide*** *et soit $F : E \to E$ une application contractante de rapport $k < 1$. Alors F admet un unique point fixe $a_* \in E$. De plus, pour tout $a_0 \in E$ la suite définie par $a_{j+1} = F(a_j)$ converge vers a_* et*

$$d(a_j, a_*) \leqslant \frac{k^j}{1-k}\, d(a_0, a_1). \tag{9}$$

Démonstration. Unicité. Si a et b sont deux points fixes, alors $d(a,b) = d(F(a),F(b)) \leqslant k\,d(a,b)$, donc $(1-k)d(a,b) \leqslant 0$, et comme $k < 1$ il vient $d(a,b) = 0$.

Existence. Soit $a_0 \in E$ (ici on utilise que E est non vide) et $a_{j+1} = F(a_j)$. Une récurrence immédiate donne

$$d(a_{j+1}, a_j) \leqslant k^j d(a_1, a_0), \tag{10}$$

puis, pour $l > j$, par inégalité triangulaire et sommation géométrique,

$$d(a_j, a_l) \leqslant \sum_{i=j}^{l-1} d(a_i, a_{i+1}) \leqslant d(a_0, a_1) \sum_{i \geqslant j} k^i = \frac{k^j}{1-k} d(a_0, a_1). \tag{11}$$

Comme $k^j \to 0$, la suite (a_j) est de Cauchy ; E étant complet, elle converge vers un point $a_* \in E$. L'application F est continue (elle est lipschitzienne), donc en passant à la limite dans $a_{j+1} = F(a_j)$ on obtient $a_* = F(a_*)$. Enfin, en faisant tendre l vers l'infini dans (11) on obtient (9). □

Remarque 1.11. Aucune des hypothèses n'est superflue. Sur $E = \mathbf{R}$, complet, l'application $F(t) = t + 1$ vérifie $|F(s) - F(t)| = |s - t|$: elle est 1-lipschitzienne mais pas contractante, et n'a pas de point fixe. Sur $E =]0,1]$, non complet, l'application $F(t) = t/2$ est contractante et n'a pas de point fixe. Enfin la conclusion est fausse pour une application seulement *strictement* contractante au sens $d(F(a),F(b)) < d(a,b)$ pour $a \neq b$: sur $E = [1,+\infty[$ l'application $F(t) = t + 1/t$ vérifie cette inégalité et n'a pas de point fixe.

La variante suivante, où l'application n'est définie que sur une boule, est celle dont nous aurons besoin pour le théorème d'inversion locale.

Corollaire 1.12 (Point fixe sur une boule)**.** *Soit (E,d) un espace métrique complet, $a \in E$, $r > 0$, et soit $F : \overline{\mathbf{B}}(a,r) \to E$ contractante de rapport $k < 1$. Si*

$$d(a,F(a)) \leqslant (1-k)r, \tag{12}$$

alors $F\left(\overline{\mathbf{B}}(a,r)\right) \subset \overline{\mathbf{B}}(a,r)$ et F admet un unique point fixe dans $\overline{\mathbf{B}}(a,r)$.

Démonstration. Pour $b \in \overline{\mathbf{B}}(a,r)$,

$$d(F(b),a) \leqslant d(F(b),F(a)) + d(F(a),a) \leqslant kr + (1-k)r = r. \tag{13}$$

Ainsi F envoie $\overline{\mathbf{B}}(a,r)$ dans lui-même, et cette boule fermée est un espace métrique complet non vide par l'exemple 1.7. Le théorème 1.10 s'applique. □

Proposition 1.13 (Dépendance continue en un paramètre)**.** *Soit Λ un espace métrique, (E,d) un espace métrique complet non vide et $F : \Lambda \times E \to E$ une application continue telle qu'il existe $k < 1$ vérifiant*

$$d\left(F(\lambda,a),F(\lambda,b)\right) \leqslant k\,d(a,b) \quad \text{pour tous } \lambda \in \Lambda,\ a,b \in E. \tag{14}$$

Alors pour tout λ l'application $F(\lambda,\cdot)$ admet un unique point fixe $a_*(\lambda)$, et l'application $\lambda \mapsto a_*(\lambda)$ est continue.

Démonstration. L'existence et l'unicité résultent du théorème 1.10. Pour $\lambda,\mu \in \Lambda$,

$$d\left(a_*(\lambda),a_*(\mu)\right) = d\left(F(\lambda,a_*(\lambda)),F(\mu,a_*(\mu))\right) \tag{15}$$

$$\leqslant d\left(F(\lambda,a_*(\lambda)),F(\mu,a_*(\lambda))\right) + k\,d\left(a_*(\lambda),a_*(\mu)\right), \tag{16}$$

d'où $d(a_*(\lambda),a_*(\mu)) \leqslant (1-k)^{-1} d(F(\lambda,a_*(\lambda)),F(\mu,a_*(\lambda)))$, qui tend vers 0 lorsque $\mu \to \lambda$ par continuité de F. □

1.3. **Fonctions d'une variable réelle.**

Théorème 1.14 (Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$ donc y atteint son maximum et son minimum. Si les deux sont atteints aux extrémités, alors f est constante et f' s'annule partout sur $]a,b[$. Sinon, l'un des deux est atteint en un point $c \in]a,b[$, et en un extremum intérieur d'une fonction dérivable la dérivée est nulle : en effet si f admet par exemple un maximum en c, les taux d'accroissement $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ sont $\leqslant 0$ pour $h > 0$ et $\geqslant 0$ pour $h < 0$, donc la limite $f'(c)$ est à la fois $\leqslant 0$ et $\geqslant 0$. □

Théorème 1.15 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a). \tag{17}$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire

$$g(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a), \tag{18}$$

qui est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $g(a) = g(b) = 0$. Il existe donc $c \in]a,b[$ avec $g'(c) = 0$, ce qui est exactement (17). □

Corollaire 1.16 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ avec $|f'| \leqslant M$. Alors $|f(b)-f(a)| \leqslant M(b-a)$. En particulier, si $f' = 0$ alors f est constante.*

Remarque 1.17. L'égalité (17) est **fausse** pour les fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ avec $m \geqslant 2$: pour $f(t) = (\cos t, \sin t)$ sur $[0, 2\pi]$ on a $f(2\pi) - f(0) = 0$ alors que $\|f'(t)\| = 1$ pour tout t. Seule subsiste l'*inégalité* des accroissements finis, que nous démontrerons sous sa forme générale au théorème 2.28. C'est d'ailleurs l'inégalité, et non l'égalité, qui est utile en pratique.

Théorème 1.18 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f : I \to \mathbf{R}^m$ de classe C^{p+1} sur un intervalle I et soient $a, b \in I$. Alors*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Démonstration. Récurrence sur p. Pour $p = 0$ c'est le théorème fondamental de l'analyse. Le passage de p à $p+1$ s'obtient en intégrant par parties le reste. □

1.4. **Intégration des fonctions à valeurs vectorielles.** Si $f = (f_1, \ldots, f_m) : [a,b] \to \mathbf{R}^m$ est continue, on pose par définition

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b f_m(t)\,\mathrm{d}t \right) \in \mathbf{R}^m. \tag{20}$$

L'intégrale est linéaire et vérifie la relation de Chasles. Le théorème fondamental de l'analyse reste valable coordonnée par coordonnée : si f est continue alors $t \mapsto \int_a^t f$ est C^1 de dérivée f, et si F est C^1 alors $F(b) - F(a) = \int_a^b F'$.

Lemme 1.19. *Pour $f : [a,b] \to \mathbf{R}^m$ continue et $a \leqslant b$,*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{21}$$

Démonstration. Posons $u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Si $u = 0$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, par linéarité du produit scalaire,

$$\|u\|^2 = \left\langle u, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = \int_a^b \langle u, f(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \|u\|\,\|f(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

par Cauchy–Schwarz, et on divise par $\|u\|$. □

Proposition 1.20 (Interversion limite–intégrale, convergence uniforme)**.** *Soit (f_k) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ convergeant uniformément vers f. Alors f est continue et*

$$\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Démonstration. La continuité de f a été démontrée dans la proposition 1.8, et le lemme 1.19 donne la majoration $\left\|\int_a^b (f_k - f)\right\| \leqslant (b-a)\,\|f_k - f\|_\infty \to 0$. □

Le résultat suivant sera utilisé au chapitre 3 pour construire des potentiels.

Théorème 1.21 (Dérivation sous le signe intégral)**.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $[a,b] \subset \mathbf{R}$ un segment et $g : U \times [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tout t la fonction $x \mapsto g(x,t)$ soit C^1 et que $(x,t) \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t)$ soit continue sur $U \times [a,b]$ pour tout i. Alors la fonction*

$$G(x) = \int_a^b g(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

est de classe C^1 sur U et

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

Démonstration. Fixons un point $c \in U$, un indice $i \in \{1,\dots,n\}$ et $r > 0$ tel que $\overline{\mathbf{B}}(c,r) \subset U$. Pour $0 < |h| \leqslant r$, le théorème des accroissements finis appliqué à $s \mapsto g(c + se_i, t)$ fournit $\theta = \theta(h,t) \in]0,1[$ tel que

$$\frac{g(c+he_i,t) - g(c,t)}{h} = \frac{\partial g}{\partial x_i}(c + \theta h e_i, t). \tag{26}$$

La fonction $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ est continue sur le compact $\overline{\mathbf{B}}(c,r) \times [a,b]$, donc uniformément continue par le théorème 1.3. Le membre de droite converge donc uniformément en t vers $\frac{\partial g}{\partial x_i}(c,t)$ lorsque $h \to 0$, et il suffit d'intégrer et d'appliquer la proposition 1.20. La continuité de $\partial_{x_i} G$ s'obtient de la même façon par uniforme continuité. □

1.5. **Exercices.**

Exercice 1.22. Montrer que $\|a\|_\infty \leqslant \|a\| \leqslant \|a\|_1 \leqslant n\,\|a\|_\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}^n$. Ces constantes sont-elles optimales ?

Exercice 1.23. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 et $a \in \mathbf{R}$ avec $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. Montrer que l'application $N(t) = t - f(t)/f'(t)$ est bien définie et contractante au voisinage de a. En déduire la convergence de la méthode de Newton pour une donnée initiale assez proche de a.

Exercice 1.24. Soit $F : E \to E$ une application d'un espace métrique complet non vide dans lui-même telle que $F^{\circ p}$ soit contractante pour un certain $p \geqslant 1$. Montrer que F admet un unique point fixe.

Exercice 1.25. Soit (a_j) une suite d'un espace métrique telle que $\sum_j d(a_j, a_{j+1}) < \infty$. Montrer qu'elle est de Cauchy. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.26. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ dérivable avec $f(0) = 0$ et f' croissante. Montrer que $t \mapsto f(t)/t$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

2. Différentielles et dérivées partielles

2.1. **Notations.** Nous reprenons les notations du chapitre 1 : $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien et de la norme associée, $\mathbf{B}(a, r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r, et la lettre U désigne toujours un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ étant équivalentes (théorème 1.1), aucune des notions introduites dans ce chapitre ne dépend du choix de la norme.

On note $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^m$. Si $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, on pose

$$\|L\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|L(v)\| . \tag{27}$$

C'est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ et pour tout $v \in \mathbf{R}^n$ on a $\|L(v)\| \leqslant \|L\|_{\mathrm{op}} \|v\|$. En particulier toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie est lipschitzienne, donc continue.

Notation : soient $g : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $h : U \to \mathbf{R}$ deux fonctions et soit $a \in \overline{U}$, on note

$$g(b) =_{b \to a} o(h(b)) \tag{28}$$

s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbf{R}^m$ définie sur un voisinage V de a telle que $\varepsilon(b) \xrightarrow[b \to a]{} 0$ et

$$g(b) = \varepsilon(b) h(b) \tag{29}$$

sur V. De même on note $g(b) =_{b \to a} O(h(b))$ s'il existe une constante $C > 0$ et un voisinage V de a tels que $\|g(b)\| \leqslant C\,|h(b)|$ sur V. On omettra souvent la mention $b \to a$ lorsque le point est clair d'après le contexte.

Remarque 2.1. On utilisera constamment et sans commentaire les règles de calcul suivantes, qui découlent immédiatement de la définition : $o(h) + o(h) = o(h)$, $O(h) + O(h) = O(h)$, $o(O(h)) = o(h)$ et si L est une application linéaire alors $L(o(h)) = o(h)$ et $L(O(h)) = O(h)$.

2.2. **Différentielle.**

Définition 2.2. Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction avec U un ouvert et soit $a \in U$. On dit que f est *différentiable en a* s'il existe une application linéaire $L_a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ telle que localement en a :

$$f(a + v) =_{v \to 0} f(a) + L_a(v) + o(\|v\|) . \tag{30}$$

Ou de façon équivalente

$$f(b) =_{b \to a} f(a) + L_a(b - a) + o(\|b - a\|). \tag{31}$$

L'application linéaire L_a est appelée la *différentielle de f en a* et on la note $D_a f$.

On dit que f est *différentiable* sur U si elle est différentiable en chaque point de U.

Il faut lire cette définition comme suit : f est différentiable en a si elle admet au voisinage de a une approximation affine dont l'erreur est négligeable devant la distance à a. La différentiabilité est donc une propriété *locale* : elle ne dépend que de la restriction de f à un voisinage arbitrairement petit de a.

Avant toute chose, il faut vérifier que l'application L_a est bien déterminée par f et a, ce qui justifie la notation $D_a f$.

Proposition 2.3 (Unicité de la différentielle)**.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $a \in U$. Si L_a et L'_a sont deux applications linéaires vérifiant* (30)*, alors $L_a = L'_a$.*

Démonstration. Posons $M = L_a - L'_a$. En soustrayant les deux développements on obtient $M(v) =_{v\to 0} o(\|v\|)$. Soit $v \in \mathbf{R}^n$ un vecteur non nul et soit $t > 0$ un réel destiné à tendre vers 0. En appliquant ce qui précède au vecteur tv et en utilisant la linéarité de M on obtient

$$t\,\|M(v)\| = \|M(tv)\| = \varepsilon(tv)\,t\,\|v\| \tag{32}$$

avec $\varepsilon(tv) \to 0$ lorsque $t \to 0$. En divisant par $t > 0$ on obtient $\|M(v)\| = \varepsilon(tv)\,\|v\|$ pour tout $t > 0$, et en faisant tendre t vers 0 il vient $M(v) = 0$. Comme v était arbitraire, $M = 0$. □

Exemple 2.4. Pour les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on a que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a) \tag{33}$$

existe. On voit alors que f est également différentiable en a, on peut réécrire la limite comme

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} =_{t\to a} f'(a) + o(1) \Leftrightarrow f(t) =_{t\to a} f(a) + f'(a)(t - a) + o(|t - a|). \tag{34}$$

On voit donc que f est différentiable en un point a si et seulement si elle est dérivable en ce point et la différentielle de f en a est la multiplication par $f'(a)$.

Proposition 2.5. *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction et soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. On sait qu'une application linéaire $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est continue, si f est différentiable en a, alors

$$f(b) = f(a) + D_a f(b - a) + o(\|b - a\|) \tag{35}$$

et donc lorsque $b \to a$ on a que $b - a \to 0$ donc par continuité des applications linéaires on a que $D_a f(b - a) \to 0$ et finalement

$$f(b) \xrightarrow[b\to a]{} f(a). \tag{36}$$

□

Exemple 2.6. Une application linéaire $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est différentiable sur $\mathbf{R}^n$ et pour tout $a \in \mathbf{R}^n$

$$D_a L = L. \tag{37}$$

En effet $L(a+v) = L(a) + L(v)$ exactement, le reste est nul. De même une application constante est différentiable de différentielle nulle.

Exemple 2.7. Soit $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ une application bilinéaire. Alors B est différentiable sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ et, en un point (a,b),

$$D_{(a,b)}B(u,v) = B(u,b) + B(a,v). \tag{38}$$

En effet, par bilinéarité,

$$B(a+u,b+v) = B(a,b) + B(u,b) + B(a,v) + B(u,v) \tag{39}$$

et comme B est bilinéaire en dimension finie il existe $C > 0$ telle que $\|B(u,v)\| \leqslant C\|u\|\,\|v\|$, de sorte que le terme $B(u,v)$ est un $O(\|(u,v)\|^2) = o(\|(u,v)\|)$. L'application $(u,v) \mapsto B(u,b) + B(a,v)$ est bien linéaire.

Ce calcul contient en germe toutes les règles de dérivation de produits : produit de deux fonctions, produit scalaire, produit vectoriel, produit matriciel.

Exemple 2.8. La fonction $f(x) = \|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ est différentiable sur $\mathbf{R}^n$ et $D_a f(v) = 2\langle a,v\rangle$: c'est le cas particulier de l'exemple 2.7 appliqué au produit scalaire. En revanche la fonction $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0 : en dimension 1 c'est la fonction valeur absolue.

Proposition 2.9 (Composition et règle de la chaîne)**.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $g : V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ et supposons $f(U) \subset V$. Soit $a \in U$, si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a*

$$D_a(g \circ f) = D_{f(a)}g \circ D_a f. \tag{40}$$

La formule de la différentielle d'une composition de fonction est appelée *formule de la chaîne*. Une astuce pour se rappeler de cette formule, se rappeler de la formule de la dérivation des fonctions composées à une variable : $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$.

Démonstration. Notons $A = D_a f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ et $B = D_{f(a)}g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$. Par définition de la différentiabilité, il existe deux fonctions α et β, définies au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement, telles que $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$ et

$$f(a+v) = f(a) + A(v) + \alpha(v), \quad \|\alpha(v)\| = o(\|v\|) \tag{41}$$

$$g(f(a)+u) = g(f(a)) + B(u) + \beta(u), \quad \|\beta(u)\| = o(\|u\|). \tag{42}$$

Posons $u(v) = A(v) + \alpha(v)$, de sorte que $f(a+v) = f(a) + u(v)$. On a d'abord la majoration

$$\|u(v)\| \leqslant \|A\|_{\mathrm{op}}\|v\| + \|\alpha(v)\| = O(\|v\|). \tag{43}$$

En substituant $u = u(v)$ dans (42) on obtient

$$g \circ f(a+v) = g(f(a)) + B(A(v)) + B(\alpha(v)) + \beta(u(v)). \tag{44}$$

Il reste à voir que les deux derniers termes sont négligeables devant $\|v\|$. D'une part $\|B(\alpha(v))\| \leqslant \|B\|_{\mathrm{op}}\|\alpha(v)\| = o(\|v\|)$. D'autre part $\beta(u(v)) = o(\|u(v)\|) = o(O(\|v\|)) = o(\|v\|)$ par (43). Comme $B \circ A$ est linéaire, ceci prouve que $g \circ f$ est différentiable en a de différentielle $B \circ A$. □

Proposition 2.10. *Soit $f,g : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $a \in U$, si f et g sont différentiables en a, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ les fonctions λf et $f+g$ le sont aussi et*

(1) $D_a(\lambda f) = \lambda D_a f$.

(2) $D_a(f+g) = D_a f + D_a g$.

Si de plus $B : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ est une application bilinéaire, alors $x \mapsto B(f(x),g(x))$ est différentiable en a et

$$D_a\left(B(f,g)\right)(v) = B\left(D_a f(v), g(a)\right) + B\left(f(a), D_a g(v)\right). \tag{45}$$

Et plus généralement si $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ est une application bilinéaire et $f : U \subset \mathbf{R}^{n'} \to \mathbf{R}^n, g : V \subset \mathbf{R}^{m'} \to \mathbf{R}^m$ sont différentiables en $(a,b) \in U \times V$, alors $(x,y) \mapsto B(f(x),g(y))$ est différentiable en (a,b) et

$$D_{(a,b)}\left(B(f,g)\right)(v,w) = B\left(D_a f(v), g(b)\right) + B(a, D_b g(w)). \tag{46}$$

Démonstration. Comme l'espace des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^m$ est un espace vectoriel, il est clair sur la définition 2.2 que λf et $f+g$ sont différentiables en a avec les différentielles annoncées.

Pour la seconde assertion, considérons l'application $h = (f,g) : U \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$. Elle est différentiable en a de différentielle $v \mapsto (D_a f(v), D_a g(v))$ par la proposition 2.13 ci-dessous. Comme $B(f,g) = B \circ h$ et que B est différentiable par l'exemple 2.7, la formule de la chaîne donne

$$D_a(B \circ h)(v) = D_{h(a)} B\left(D_a h(v)\right) = B\left(D_a f(v), g(a)\right) + B\left(f(a), D_a g(v)\right). \tag{47}$$

□

La troisième assertion se prouve de façon similaire.

Corollaire 2.11. *Soit $f,g : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ deux fonctions différentiables en $a \in U$, alors fg est différentiable en a et*

$$D_a(fg)(v) = D_a(f)(v) \cdot g(a) + f(a) D_a g(v). \tag{48}$$

Exemple 2.12. En appliquant la proposition 2.10 aux applications bilinéaires usuelles on obtient, pour $f : U \to \mathbf{R}$ et $X, Y : U \to \mathbf{R}^n$ différentiables en a :

$$D_a(fX)(v) = D_a f(v) X(a) + f(a) D_a X(v), \tag{49}$$

$$D_a\langle X, Y\rangle(v) = \langle D_a X(v), Y(a)\rangle + \langle X(a), D_a Y(v)\rangle. \tag{50}$$

Proposition 2.13. *Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction et $a \in U$, alors f est différentiable en a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i est différentiable en a.*

Démonstration. Soit $\pi_i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ la projection sur la i-ème coordonnée, i.e $\pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i$. C'est une application linéaire donc différentiable. Comme $f_i = \pi_i \circ f$ on a que si f est différentiable en un point a toutes les fonctions coordonnées le sont également.

Réciproquement, supposons que toutes les fonctions coordonnées f_i soient différentiables en a, on a alors pour tout $i = 1, \ldots, m$

$$f_i(b) =_{b \to a} f_i(a) + D_a f_i(b-a) + o(\|b-a\|). \tag{51}$$

Et cela donne

$$f(b) = \begin{pmatrix} f_1(b) \\ \vdots \\ f_m(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + D_a f_1(b-a) + o(\|b-a\|) \\ \vdots \\ f_m(a) + D_a f_m(b-a) + o(\|b-a\|) \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$= f(a) + \begin{pmatrix} D_a f_1(b-a) \\ \vdots \\ D_a f_m(b-a) \end{pmatrix} + o(\|b-a\|). \tag{53}$$

On voit que f est différentiable en a et $D_a f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est l'application linéaire dont la i-ème coordonnée est la forme linéaire $D_a f_i$. □

Corollaire 2.14. *Toute application polynomiale $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est différentiable.*

Démonstration. Par la proposition 2.13 on peut supposer $m = 1$. Les fonctions coordonnées $x \mapsto x_i$ sont linéaires donc différentiables, et par la proposition 2.10 l'ensemble des fonctions différentiables en un point est stable par combinaison linéaire et par produit. Tout polynôme s'obtient à partir des x_i et des constantes par ces deux opérations. □

Définition 2.15 (Application différentielle)**.** On peut associer à toute application linéaire $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$, qui est de taille $m \times n$. Si $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est différentiable, on appelle *différentielle de f* l'application

$$Df : a \in U \mapsto D_a f \in M_{m\times n}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{mn} \tag{54}$$

qui à chaque point a associe la matrice de la différentielle de f en a par rapport aux bases canoniques de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$.

Exemple 2.16. Si $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est linéaire, alors la différentielle DL de L est l'application constante égale à L.

2.3. **Dérivées partielles.**

Définition 2.17. Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction, $a \in U$ et $v \in \mathbf{R}^n$. On dit que *f admet une dérivée dans la direction de v* si la limite

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in \mathbf{R}^m \tag{55}$$

existe. En particulier, on voit que si f est une fonction scalaire, alors $\partial_v f$ est également une fonction scalaire.

En particulier, les *dérivées partielles* de f en a sont les dérivées directionnelles par rapport aux vecteurs de la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. On notera souvent $\partial_{e_i} = \partial_i$ ou $\partial_{e_i} = \partial_{x_i}$ ou $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, où x_i désigne la i-ème coordonnée.

Remarque 2.18. Remarquons que si $\partial_v f(a)$ existe alors $\partial_{\lambda v} f(a)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et vaut $\lambda \partial_v f(a)$: l'application $v \mapsto \partial_v f(a)$ est toujours homogène de degré 1. Elle n'a en revanche aucune raison d'être additive, voir l'exemple 2.23.

Lemme 2.19. *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application et $a \in U$, alors les dérivées partielles ∂_i de f en a peuvent se calculer de la façon suivante. Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, soit ϕ_i la fonction*

$$\phi_i : t \in I \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \tag{56}$$

définie sur un intervalle ouvert $I \ni 0$ assez petit pour que le point reste dans U, alors $\partial_i f(a)$ existe si et seulement si ϕ_i est dérivable en 0 et dans ce cas

$$\partial_i f(a) = \phi_i'(0). \tag{57}$$

Autrement dit pour calculer une dérivée partielle par rapport à une coordonnée x_i, il suffit de considérer les autres coordonnées comme des constantes et de ne dériver que par rapport à la coordonnée x_i.

Proposition 2.20. *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application différentiable en $a \in U$, alors f admet une dérivée dans toute direction, on a*

$$\partial_v f(a) = D_a f(v) \quad \textit{pour tout } v \in \mathbf{R}^n, \tag{58}$$

et la matrice de la différentielle $D_a f$ dans les bases canoniques est la matrice des dérivées partielles des fonctions coordonnées :

$$D_a f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R}), \tag{59}$$

où j est l'indice de ligne et i l'indice de colonne. Cette matrice s'appelle la matrice jacobienne *de f en a et se note aussi* $\mathrm{Jac}_a f$.

Démonstration. Soit $v \in \mathbf{R}^n$. En appliquant la définition 2.2 au vecteur tv on obtient

$$f(a + tv) = f(a) + t D_a f(v) + o(|t| \, \|v\|), \tag{60}$$

d'où en divisant par t et en faisant tendre t vers 0 l'existence de $\partial_v f(a)$ et l'égalité (58). La i-ème colonne de la matrice de $D_a f$ est le vecteur $D_a f(e_i) = \partial_i f(a) = (\partial_i f_1(a), \ldots, \partial_i f_m(a))$, ce qui est exactement (59). □

Remarque 2.21. Attention la réciproque est fausse ! Il ne suffit pas d'admettre une dérivée dans toutes les directions pour être différentiable. La raison est claire : une dérivée directionnelle est une information *unidimensionnelle*, elle ne teste le comportement de f que le long d'une droite, alors que la différentiabilité demande un contrôle uniforme dans toutes les directions à la fois. Les trois exemples suivants montrent à quel point la situation peut être mauvaise.

Exemple 2.22. La fonction

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f(0,0) = 0 \tag{61}$$

admet des dérivées partielles en $(0,0)$: en effet f est identiquement nulle sur les deux axes donc $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$. Pourtant f n'est même pas continue en l'origine puisque $f(x,x) = 1/2$ pour tout $x \neq 0$. En particulier f n'est pas différentiable en $(0,0)$ par la proposition 2.5.

Exemple 2.23. La fonction

$$g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \qquad g(0,0) = 0 \tag{62}$$

est continue en $(0,0)$ car $|g(x,y)| \leqslant |x|$, et elle admet une dérivée dans toutes les directions : pour $v = (\alpha,\beta) \neq 0$,

$$\frac{g(t\alpha,t\beta)}{t} = \frac{t^3\alpha^3}{t\cdot t^2(\alpha^2+\beta^2)} = \frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{63}$$

Mais l'application $v \mapsto \partial_v g(0,0)$ n'est pas linéaire, alors qu'elle devrait coïncider avec $D_{(0,0)}g$ par la proposition 2.20 : la fonction g n'est donc pas différentiable en l'origine. Concrètement, les dérivées partielles valent 1 et 0, donc la seule candidate pour la différentielle serait $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha$; or le long de la diagonale $g(x,x) - x = -x/2$ n'est pas un $o(\|(x,x)\|)$.

Exemple 2.24. Le pire est possible : la fonction

$$h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, \qquad h(0,0) = 0 \tag{64}$$

admet une dérivée dans toutes les directions en l'origine (elles sont toutes nulles le long de l'axe des x, et valent α^2/β dans la direction (α,β) avec $\beta \neq 0$), et pourtant h n'est pas continue en $(0,0)$: le long de la parabole $y = x^2$ on a $h \equiv 1/2$. Les droites ne suffisent donc pas à détecter la continuité.

Définition 2.25 (Gradient)**.** Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable en a. La différentielle $D_a f$ est alors une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$; par dualité il existe un unique vecteur $\operatorname{grad} f(a) \in \mathbf{R}^n$, appelé le *gradient* de f en a et noté aussi $\nabla f(a)$, tel que

$$D_a f(v) = \big\langle \operatorname{grad}_f(a), v \big\rangle \quad \text{pour tout } v \in \mathbf{R}^n. \tag{65}$$

Dans la base canonique, ses coordonnées sont les dérivées partielles :

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{66}$$

Remarque 2.26. L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne, pour $\|v\| = 1$,

$$|\partial_v f(a)| = |\langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle| \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\|, \tag{67}$$

avec égalité si et seulement si v est colinéaire à $\operatorname{grad} f(a)$. Autrement dit, lorsque $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, le gradient indique la direction dans laquelle f croît le plus vite, et sa norme est la pente maximale. Nous verrons à la remarque 2.52 qu'il est de plus orthogonal aux lignes de niveau.

Proposition 2.27. *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to f(U) \subset \mathbf{R}^n$ un homémomorphisme, c'est à dire que $g = f^{-1} : f(U) \to U$ existe et est continue. Soit $a \in U$ tel que f est différentiable en a et $D_a f$ est inversible, alors g différentiable en $b = f(a)$ et*

$$D_b g = (D_a f)^{-1} = (D_{f^{-1}(b)})^{-1}. \tag{68}$$

Démonstration. Soit c dans un voisinage de b, on veut montrer que

$$g(c) - g(b) - (D_a f)^{-1}(c-b) = o(\|c-b\|). \tag{69}$$

Soit $k = \left\|(D_a f)^{-1}\right\|_{\text{op}}$, pour tout $x \in U$ notons $y = f(x)$ on a par définition de la différentiablitié en a que lorsque $x \to a$

$$y - b - D_a f(x-a) = \|x-a\| \, \varepsilon(x) \tag{70}$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Et donc

$$\|x-a\| = \left\|(D_a f)^{-1} D_a f(x-a)\right\| \leqslant k \, \|D_a f(x-a)\| \leqslant k \left(\|y-b\| + \|x-a\| \, |\varepsilon(x)|\right). \tag{71}$$

Ainsi, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a,r), |\varepsilon(x)| < \frac{1}{2k}$ et alors

$$\|x-a\| \leqslant 2k \, \|y-b\|. \tag{72}$$

L'ouvert $f(B(a,r))$ est un voisinage de b, on prend c dans ce voisinage. Lorsque $c \to b$ on a que $g(c) \to a$ et donc par la différentiabilité en a cela donne

$$c - b - D_a f(g(c) - a) =_{c\to b} \varepsilon(g(c)) \, \|g(c) - a\|. \tag{73}$$

avec $\varepsilon(g(c)) \to 0$ lorsque On applique $(D_a f)^{-1}$ à cette égalité :

$$(D_a f)^{-1}(c-b) + g(c) - g(b) =_{c\to b} \|g(c)-a\| \, (D_a f)^{-1}(\varepsilon(g(c))). \tag{74}$$

On définit $\varepsilon'(c)$ par l'égalité

$$\|b-c\| \, \varepsilon'(c) = \|g(c)-a\| \, (D_a f)^{-1}(\varepsilon(g(c))). \tag{75}$$

Montrons que $\varepsilon'(c) \to 0$ lorsque $c \to b$. Comme $c \in f(B(a,r))$ on a que

$$\|g(c)-a\| \leqslant 2k \, \|c-b\| \tag{76}$$

par (72), donc

$$\left\|\varepsilon'(c)\right\| \leqslant 2k \left\|(D_a f)^{-1}(\varepsilon(g(c)))\right\|. \tag{77}$$

Or lorsque $c \to b$ on a que $g(c) \to a$ et donc $\varepsilon'(g(c)) \to 0$ et le résultat suit. □

2.4. **Fonctions de classe C^1.** Nous avons vu que l'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la différentiabilité. Il suffit pourtant d'une hypothèse de continuité pour rétablir l'implication : c'est le théorème 2.30. Commençons par le résultat suivant.

Théorème 2.28 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction différentiable et soient $a, b \in U$ tels que le segment $[a,b] = \{a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$ soit contenu dans U. Alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \left(\sup_{c \in [a,b]} \|D_c f\|_{\mathrm{op}} \right) \|b - a\| . \tag{78}$$

En particulier, si $U = B(c,r)$ est une boule ouverte, alors pour tout $a, b \in U$

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in U} \|D_x f\|_{\mathrm{op}} \|b - a\| . \tag{79}$$

Démonstration. Notons $M = \sup_{c \in [a,b]} \|D_c f\|_{\mathrm{op}}$, que l'on peut supposer fini. Posons $u = f(b) - f(a)$; si $u = 0$ il n'y a rien à démontrer, on suppose donc $u \neq 0$. Considérons la fonction

$$\varphi : t \in [0,1] \mapsto \langle u, f(a + t(b-a)) \rangle \in \mathbf{R}. \tag{80}$$

Elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable, de dérivée $\varphi'(t) = \left\langle u, D_{a+t(b-a)} f(b-a) \right\rangle$ par la formule de la chaîne. Le théorème des accroissements finis (théorème 1.15) fournit $\theta \in]0,1[$ tel que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$, c'est-à-dire

$$\|u\|^2 = \langle u, f(b) - f(a) \rangle = \langle u, D_c f(b-a) \rangle, \qquad c = a + \theta(b-a) \in [a,b]. \tag{81}$$

Par Cauchy–Schwarz, $\|u\|^2 \leqslant \|u\| \, \|D_c f\|_{\mathrm{op}} \, \|b-a\| \leqslant \|u\| \, M \, \|b-a\|$, et en divisant par $\|u\| \neq 0$ on obtient (78).

Si U est une boule ouverte, alors pour tout $a, b \in U$, le segment $[a,b]$ est inclus dans U et le résultat suit. □

Corollaire 2.29. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbf{R}^m$ différentiable avec $D_a f = 0$ pour tout $a \in U$. Alors f est constante.*

Démonstration. Soit $c \in U$ et $A = f^{-1}(\{f(c)\})$. L'ensemble A est fermé dans U par continuité de f. Il est aussi ouvert : si $a \in A$, soit $r > 0$ tel que $\mathbf{B}(a,r) \subset U$; la boule étant convexe, le théorème 2.28 s'applique à tout $b \in \mathbf{B}(a,r)$ et donne $\|f(b) - f(a)\| \leqslant 0$, donc $\mathbf{B}(a,r) \subset A$. Comme A est non vide et que U est connexe, $A = U$. □

Théorème 2.30. *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une fonction et $a \in U$. On suppose que les dérivées partielles $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ existent en tout point d'un voisinage de a et qu'elles sont continues en a. Alors f est différentiable en a.*

Démonstration. Par la proposition 2.13 on peut supposer $m = 1$. Soit $r > 0$ tel que $\mathbf{B}(a,r) \subset U$ et que les dérivées partielles existent sur $\mathbf{B}(a,r)$. Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ avec $\|v\| < r$. Introduisons les points

intermédiaires

$$p_0 = a, \qquad p_k = a + \sum_{i=1}^{k} v_i e_i \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{82}$$

de sorte que $p_n = a + v$ et que $\|p_k - a\| \leqslant \|v\| < r$, donc tous ces points sont dans $\mathbf{B}(a,r)$. On écrit alors la somme télescopique

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(p_k) - f(p_{k-1}) \right). \tag{83}$$

Pour chaque k, les points p_{k-1} et $p_k = p_{k-1} + v_k e_k$ ne diffèrent que par la k-ème coordonnée. La fonction $t \mapsto f(p_{k-1} + te_k)$ est dérivable sur l'intervalle correspondant, de dérivée $\partial_k f(p_{k-1} + te_k)$; le théorème 1.15 fournit donc un point c_k sur le segment $[p_{k-1}, p_k]$ tel que

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) = \partial_k f(c_k)\, v_k. \tag{84}$$

Notons que $\|c_k - a\| \leqslant \|v\|$. En retranchant la quantité $\sum_k \partial_k f(a) v_k$ on obtient

$$\left| f(a+v) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(a) v_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k f(c_k) - \partial_k f(a) \right) v_k \right| \leqslant \|v\| \sum_{k=1}^{n} \left| \partial_k f(c_k) - \partial_k f(a) \right|. \tag{85}$$

Lorsque $v \to 0$ on a $c_k \to a$ pour tout k, et par continuité des dérivées partielles en a la somme du membre de droite tend vers 0. Le membre de gauche est donc un $o(\|v\|)$, ce qui prouve que f est différentiable en a de différentielle $v \mapsto \sum_k \partial_k f(a) v_k$. □

Définition 2.31. On dit que $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est C^1 ou *continûment différentiable* si l'application différentielle

$$Df : U \to M_{m\times n}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{mn} \tag{86}$$

est bien définie et continue. De façon équivalente par la proposition 2.20 et le théorème 2.30, il est équivalent de demander que toutes les dérivées partielles des fonctions coordonnées existent et soient continues sur U.

Par récurrence, on définit pour tout $k \geqslant 1$ la classe des fonctions C^k : une fonction $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est C^{k+1} si elle est C^k et si pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $j = 1, \ldots, m$ la fonction

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} (f_j) : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \tag{87}$$

est C^1. On dit que f est C^∞ ou *lisse* si elle est C^k pour tout $k \geqslant 1$.

De façon équivalente, f est C^k si et seulement si f est différentiable et $Df : U \to \mathbf{R}^{mn}$ est C^{k-1}.

Remarque 2.32. Le théorème 2.30 justifie a posteriori cette définition et fournit le critère pratique suivant, qu'on utilisera systématiquement :

Une fonction est C^1 si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues.

On prendra garde à ce que les trois conditions suivantes sont, dans cet ordre, de plus en plus fortes et deux à deux non équivalentes : (i) f admet des dérivées partielles en a ; (ii) f est différentiable en a ; (iii) f est C^1 au voisinage de a. Les exemples 2.22 et 2.23 montrent que (i) n'implique pas (ii) ; l'exercice 2.60 montre que (ii) n'implique pas (iii).

Proposition 2.33. *Toute fonction polynomiale $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est lisse. En particulier toute fonction bilinéaire $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ est lisse.*

Démonstration. On peut supposer $m = 1$, on sait par le corollaire 2.14 que f est différentiable. Ses dérivées partielles sont encore des fonctions polynomiales. On voit donc par récurrence que f est lisse.

Maintenant si $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ est bilinéaire alors B s'écrit

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j \tag{88}$$

avec $b_{ij} \in \mathbf{R}$ et on voit donc que B est une application polynomiale donc lisse. □

Proposition 2.34. *Soient $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $g : V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ de classe C^k avec $f(U) \subset V$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors $g \circ f$ est de classe C^k. De même toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions C^k est C^k.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur k. Si $k = 1$, le résultat découle de la formule de la châine car on sait que $D_a(g \circ f) = D_{f(a)}g \cdot D_a f$.

Supposons le résultat vrai au rang k et supposons f et g de classe C^{k+1}. Notons $M : M_{p\times n}(\mathbf{R}) \times M_{m\times n} \to M_{p\times n}(\mathbf{R})$ l'application de multiplication matricielle. Comme M est bilinéaire, on sait qu'elle est C^∞ par la proposition 2.33. On a par la formule de la chaîne

$$D(g \circ f) = M((Dg) \circ f, Df). \tag{89}$$

On sait que Dg, Df, f et M sont C^k, ainsi par récurrence la composée de fonctions C^k est C^k et donc $D(g \circ f)$ est C^k et ainsi $g \circ f$ est C^{k+1}. □

2.5. **Dérivées d'ordre supérieur et lemme de Schwarz.**

Théorème 2.35 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une application C^2, alors pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f. \tag{90}$$

Démonstration. Comme l'énoncé ne fait intervenir que deux variables, on peut supposer $n = 2$, les autres coordonnées étant gelées. Notons $c = (c_1, c_2) \in U$ le point considéré et introduisons, pour s, t petits, l'accroissement double

$$\Delta(s,t) = f(c_1 + s, c_2 + t) - f(c_1 + s, c_2) - f(c_1, c_2 + t) + f(c_1, c_2). \tag{91}$$

L'expression Δ est symétrique en les deux variables, au sens où on peut la regrouper de deux façons. Posons d'abord $\varphi(x) = f(x, c_2+t) - f(x,c_2)$, de sorte que $\Delta(s,t) = \varphi(c_1+s) - \varphi(c_1)$. La fonction φ est dérivable et le théorème 1.15 donne $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\Delta(s,t) = s\varphi'(c_1+\theta s) = s\left(\partial_1 f(c_1+\theta s, c_2+t) - \partial_1 f(c_1+\theta s, c_2)\right). \tag{92}$$

En appliquant à nouveau le théorème 1.15 à la fonction $y \mapsto \partial_1 f(c_1+\theta s, y)$, qui est dérivable puisque f est C^2, on obtient $\theta' \in]0,1[$ tel que

$$\Delta(s,t) = st\,\partial_2\partial_1 f(c_1+\theta s, c_2+\theta' t). \tag{93}$$

En faisant tendre (s,t) vers $(0,0)$ avec $s,t \neq 0$ et en utilisant la continuité de $\partial_2\partial_1 f$ on obtient

$$\frac{\Delta(s,t)}{st} \xrightarrow[(s,t)\to(0,0)]{} \partial_2\partial_1 f(c). \tag{94}$$

En reprenant le même raisonnement avec le regroupement $\psi(y) = f(c_1+s,y) - f(c_1,y)$, pour lequel $\Delta(s,t) = \psi(c_2+t) - \psi(c_2)$, on obtient de la même façon que $\Delta(s,t)/st$ tend vers $\partial_1\partial_2 f(c)$. Par unicité de la limite, $\partial_1\partial_2 f(c) = \partial_2\partial_1 f(c)$. □

Corollaire 2.36. *Si f est de classe C^k, alors pour tout $l \leqslant k$ et toute permutation σ de $\{1,\dots,l\}$ on a $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_l} f = \partial_{i_{\sigma(1)}}\cdots\partial_{i_{\sigma(l)}} f$. En particulier l'ordre de dérivation n'a pas d'importance et on peut noter sans ambiguïté*

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad \alpha \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n \leqslant k. \tag{95}$$

Démonstration. Toute permutation est produit de transpositions de deux indices consécutifs, et le lemme de Schwarz permet précisément d'échanger deux dérivations consécutives. □

Définition 2.37 (Hessienne)**.** Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^2 et $a \in U$. La *matrice hessienne* de f en a est la matrice

$$\mathrm{Hess}_a f = \left(\partial_i\partial_j f(a)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_{n\times n}(\mathbf{R}). \tag{96}$$

Par le lemme de Schwarz, c'est une matrice symétrique. On lui associe la forme quadratique $Q_a(v) = \langle \mathrm{Hess}_a f \cdot v, v\rangle = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j f(a) v_i v_j$.

Théorème 2.38 (Formule de Taylor–Young à l'ordre 2)**.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^2 et $a \in U$. Alors*

$$f(a+v) =_{v\to 0} f(a) + \langle \mathrm{grad}\, f(a), v\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess}_a f\cdot v, v\rangle + o(\|v\|^2). \tag{97}$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\mathbf{B}(a,r) \subset U$ et soit $\|v\| < r$. Posons $g(t) = f(a+tv)$ pour $t \in [0,1]$: par la formule de la chaîne g est C^2 et

$$g'(t) = \langle \mathrm{grad}\, f(a+tv), v\rangle, \qquad g''(t) = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j f(a+tv) v_i v_j. \tag{98}$$

La formule de Taylor avec reste intégral (théorème 1.18) donne

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t)\,\mathrm{d}t, \tag{99}$$

d'où, puisque $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = 1/2$,

$$f(a+v) - f(a) - \langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle - \frac{1}{2}Q_a(v) = \int_0^1 (1-t)\left(g''(t) - g''(0)\right)\mathrm{d}t. \tag{100}$$

Or

$$\left|g''(t) - g''(0)\right| \leqslant \|v\|^2 \sum_{i,j} \left|\partial_i\partial_j f(a+tv) - \partial_i\partial_j f(a)\right| \leqslant \|v\|^2\,\eta(v) \tag{101}$$

où $\eta(v) = \sup_{\|u\|\leqslant\|v\|} \sum_{i,j} \left|\partial_i\partial_j f(a+u) - \partial_i\partial_j f(a)\right|$ tend vers 0 quand $v \to 0$ par continuité des dérivées secondes en a. Le membre de droite de (100) est donc majoré en valeur absolue par $\|v\|^2\,\eta(v)/2 = o(\|v\|^2)$. □

Remarque 2.39. On en déduit comme à une variable l'étude des extrema locaux : si f est C^2 et admet un extremum local en a, alors $\operatorname{grad} f(a) = 0$ (on dit que a est un *point critique*). Réciproquement, si a est un point critique et si $\operatorname{Hess}_a f$ est définie positive (resp. définie négative) alors a est un minimum (resp. maximum) local strict ; si $\operatorname{Hess}_a f$ a des valeurs propres de signes opposés, a est un point selle.

2.6. **Difféomorphismes, inversion locale et fonctions implicites.** On aura ici besoin du théorème de point fixe de Banach , c'est à dire le théorème 1.10. Rappelons tout d'abord que par la proposition 1.8, si $K \subset \mathbf{R}^n$ est un compact (i.e un fermé borné), alors l'espace $\mathcal{C}(K, \mathbf{R}^n)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ munies de la distance uniforme est un espace métrique complet.

Définition 2.40. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset \mathbf{R}^n$ deux ouverts et $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. Une application $f : U \to V$ est un *C^k-difféomorphisme* si f est une bijection de classe C^k dont la réciproque $f^{-1} : V \to U$ est également de classe C^k.

Proposition 2.41. *Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, alors pour tout $a \in U$ la différentielle $D_a f$ est un isomorphisme linéaire et*

$$D_{f(a)}\left(f^{-1}\right) = (D_a f)^{-1}. \tag{102}$$

En particulier n est bien déterminé et $\det \operatorname{Jac}_a f \neq 0$ *en tout point.*

Démonstration. Il suffit de différentier les identités $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V$ en utilisant la formule de la chaîne et l'exemple 2.6. □

La réciproque est vraie *localement* : c'est le théorème d'inversion locale. Sa démonstration est notre première application du théorème du point fixe de Banach. Nous aurons besoin du lemme suivant d'algèbre linéaire.

Lemme 2.42. *L'ensemble* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ *des matrices inversibles est un ouvert de* $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ *et l'application* $\mathrm{Inv} : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ *est de classe* C^∞.

Démonstration. L'application $A \mapsto \det A$ est polynomiale donc continue, et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \{\det \neq 0\}$ est l'image réciproque d'un ouvert. La formule des cofacteurs $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{com}(A)$ exprime chaque coefficient de A^{-1} comme une fonction rationnelle en les coefficients de A dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. □

On énonce aussi le résultat suivant qui nous servira pour la preuve du théorème d'inversion locale.

Proposition 2.43. *Soit* $f : U \subset \mathbf{R}^n \to V \subset \mathbf{R}^n$ *de classe* C^k. *Si* f *est un homéomorphisme et pour tout* $a \in U, D_a f$ *est inversible, alors* $g = f^{-1}$ *est également* C^k.

Démonstration. Par la proposition 2.27, on sait que $g : V \to U$ est différentiable sur V et on a la formule

$$Dg = \mathrm{Inv} \circ Df \circ g \tag{103}$$

où $\mathrm{Inv} : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est l'application d'inversion du lemme 2.42 qui est C^∞. On procède par récurrence sur k. Si $k = 1$, alors f est C^1 et Df est continue. Comme g est continue et Inv est C^∞ on a que Dg est continue et donc g est C^1.

Maintenant, supposons la proposition vraie pour un entier k et soit f de classe C^{k+1}, alors f est en particulier C^k donc par hypothèse de récurrence g est C^k. L'application Df est C^k car f est C^{k+1} donc comme Inv est lisse on a que Dg est C^k et donc g est C^{k+1}. □

Théorème 2.44 (Inversion locale)**.** *Soit* $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *une application de classe* C^k, $k \geqslant 1$, *et soit* $a \in U$ *tel que* $D_a f$ *soit inversible. Alors il existe un ouvert* $V \subset U$ *contenant* a *et un ouvert* $W \subset \mathbf{R}^n$ *contenant* $f(a)$ *tels que* $f_{|V} : V \to W$ *soit un* C^k*-difféomorphisme.*

Exemple 2.45. Prenons la fonction $f(x,y) = (x^2, y^2)$ sur $\mathbf{R}^2$. La matrice jacobienne de f est donnée par

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \tag{104}$$

Et on voit que son déterminant est $4xy$. Cette matrice est inversible dès que $xy \neq 0$. On voit alors que f est bien un difféomorphisme local sur $(\mathbf{R}^\times)^2$. En effet, prenons par exemple le point $(-1,1)$. On a $f(-1,1) = (1,1)$ et son inverse local est donné sur un petit voisinage de $(1,1)$ par

$$(u,v) \mapsto (-\sqrt{u}, \sqrt{v}). \tag{105}$$

Mais f n'est pas un difféomorphisme de $(\mathbf{R}^\times)$ car elle n'y est pas injective.

Démonstration. L'idéé de la preuve est d'utiliser le théorème du point fixe de Banach. On cherche à trouver un inverse local de f c'est à dire de résoudre localement l'équation $f \circ h = \mathrm{id}$ d'inconnue

h. Il faut se ramener à un problème de point fixe et on voit que si on ajoute h des deux côtés de l'équation, l'équation est équivalente à

$$f\circ h+h=\mathrm{id}+h\Leftrightarrow h=\mathrm{id}+h-f\circ h\Leftrightarrow h=\mathrm{id}+(\mathrm{id}-f)\circ h. \tag{106}$$

On cherche donc un point fixe de $\Psi(h)=\mathrm{id}+(\mathrm{id}-f)\circ h$ et pour cela on va utiliser le théorème du point fixe de Banach.

Réductions.– Quitte à remplacer f par $x\mapsto (D_af)^{-1}\left(f(x+a)-f(a)\right)$, ce qui ne change ni les hypothèses ni la conclusion, on peut supposer

$$a=0,\qquad f(0)=0,\qquad D_0f=\mathrm{id}\,. \tag{107}$$

Choix du rayon.– Posons $g(x)=(\mathrm{id}-f)(x)=x-f(x)$, de sorte que $D_0g=0$ et $g(0)=0$ Comme f est C^1, l'application $b\mapsto D_bg$ est continue et il existe $r>0$ tel que $\overline{\mathbf{B}}(0,2r)\subset U$ et

$$\|D_bg\|_{\mathrm{op}}\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{pour tout } b\in\overline{\mathbf{B}}(0,2r). \tag{108}$$

Par l'inégalité des accroissements finis (théorème 2.28) on a que g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\overline{\mathbf{B}}(0,2r)$ et donc $g(B(0,2r))\subset B(0,r)$. De plus, on a que f est injective sur $B(0,2r)$ en effet si $f(a)=f(a')$ avec $a,a'\in B(0,2r)$ alors

$$\left\|g(a)-g(a')\right\|=\left\|a-a'\right\|\leqslant\frac{1}{2}\left\|a-a'\right\| \tag{109}$$

et donc $\|a-a'\|=0\Rightarrow a=a'$. Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues de $\overline{B}(0,r)$ vers $\overline{B}(0,2r)$:

$$\mathscr{C}=\mathscr{C}\left(\overline{B}(0,r),\overline{B}(0,2r)\right). \tag{110}$$

C'est un espace de Banach munie de la distance de la convergence uniforme par la proposition 1.8. On pose l'opérateur

$$\Psi:h\in\mathscr{C}\mapsto\mathrm{id}+g\circ h\in\mathscr{C}. \tag{111}$$

Montrons que Ψ est bien défini. On a par définition $h(\overline{B}(0,r))\subset\overline{B}(0,2r)$ et comme g est $1/2$-Lipschitzienne cela donne $g\circ h(\overline{B}(0,r))\subset g(\overline{B}(0,2r))\subset B(0,r)$ et donc

$$(\mathrm{id}+g\circ h)(\overline{B}(0,r))\subset B(0,2r). \tag{112}$$

Donc $\Psi(h)\in\mathscr{C}$ et Ψ est bien définie. On a que Ψ est $1/2$-contractante car

$$\left\|\Psi(h)-\Psi(h')\right\|_\infty=\left\|g\circ h-g\circ h'\right\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\left\|h-h'\right\|_\infty \tag{113}$$

Par le théorème du point fixe de Banach, Ψ admet un point fixe h et $\Psi(h)=h$ donne

$$h=\mathrm{id}+g\circ h=\mathrm{id}+(\mathrm{id}-f)\circ h\Rightarrow\mathrm{id}=f\circ h. \tag{114}$$

Maintenant, soit $W=B(0,r)$ et $V=f^{-1}(W)\cap B(0,2r)$. Par construction on a que la fonction f induit $f:V\to W$ qu'on note encore f. Comme $V\subset B(0,2r)$ on a que f est injective et f est surjective car $\mathrm{id}_W=f\circ h$. Donc f est un homéomorphisme de V vers W et $h:W\to V$ est son inverse. On a alors que $h:W\to V$ est également de classe C^k par la proposition 2.43 et $f:V\to W$ est bien un difféomorphisme de classe C^k. □

Remarque 2.46. L'énoncé est purement local et ne peut pas l'être davantage : l'application $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, c'est-à-dire $z \mapsto e^z$ vue dans $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$, a une différentielle inversible en tout point mais n'est pas injective puisqu'elle est $2i\pi$-périodique.

Définition 2.47. Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ une application C^1. On note x l'ensemble des coordonnées sur $\mathbf{R}^n$ et y l'ensemble des coordonnées sur $\mathbf{R}^m$. Les *différentielles partielles* $D_x f(a,b), D_y f(a,b)$ de f en un point $(a,b) \in U$ sont définies de la façon suivante. Pour la différentielle par rapport à x on la définit comme la différentielle de l'application $x \in \mathbf{R}^n \mapsto f(x,b)$ en a et pour $D_y f(a,b)$ on la définit comme la différentielle de $y \in \mathbf{R}^m \mapsto f(a,y)$ en b.

Proposition 2.48. *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, alors la matrice jacobienne de $D_x f(a,b)$ correspond aux n premières colonnes de la matrice jacobienne de f en (a,b) et celle de $D_y f(a,b)$ correspond aux m dernières colonnes.*

Démonstration. Cela vient du fait que la matrice jacobienne de f est donnée par

$$\mathrm{Jac}_{(a,b)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a,b) \\ & & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} \tag{115}$$

□

Théorème 2.49 (Fonctions implicites)**.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ de classe C^k, $k \geqslant 1$, et soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$. On note $D_y f(a,b) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ la différentielle partielle par rapport aux m dernières variables. Si $D_y f(a,b)$ est inversible, alors il existe des ouverts $A \ni a$ dans $\mathbf{R}^n$ et $B \ni b$ dans $\mathbf{R}^m$ avec $A \times B \subset U$, et une application $\varphi : A \to B$ de classe C^k, tels que pour tout $(x,y) \in A \times B$*

$$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x). \tag{116}$$

De plus

$$D_a \varphi = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b). \tag{117}$$

Démonstration. Considérons $F : U \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ définie par $F(x,y) = (x, f(x,y))$. Elle est de classe C^k et sa matrice jacobienne en (a,b) s'écrit par blocs

$$\mathrm{Jac}_{(a,b)} F = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \partial_x f(a,b) & \partial_y f(a,b) \end{pmatrix}, \tag{118}$$

qui est inversible puisque triangulaire par blocs à blocs diagonaux inversibles. Le théorème d'inversion locale fournit des ouverts $\Omega \ni (a,b)$ et $\Omega' \ni F(a,b) = (a,0)$ tels que $F : \Omega \to \Omega'$ soit un C^k-difféomorphisme. Par construction F^{-1} est de la forme $F^{-1}(x,z) = (x, \psi(x,z))$ avec ψ de classe C^k. Quitte à rétrécir, choisissons $A \times B \subset \Omega$ avec $A \ni a$, $B \ni b$ et $A \times \{0\} \subset \Omega'$, et posons $\varphi(x) = \psi(x,0)$. Alors pour $(x,y) \in A \times B$

$$f(x,y) = 0 \iff F(x,y) = (x,0) \iff (x,y) = F^{-1}(x,0) \iff y = \varphi(x). \tag{119}$$

Enfin, en différentiant l'identité $f(x,\varphi(x)) = 0$ au point a par la formule de la chaîne on obtient $\partial_x f(a,b) + \partial_y f(a,b) \circ D_a\varphi = 0$, d'où (117). □

Exemple 2.50 (Coordonnées polaires)**.** L'application

$$\Phi : (r,\theta) \in \mathbf{R}_{>0} \times]-\pi,\pi[\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbf{R}^2 \tag{120}$$

est un C^∞-difféomorphisme sur son image $\mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_{\leqslant 0} \times \{0\})$, et

$$\mathrm{Jac}_{(r,\theta)}\,\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det \mathrm{Jac}_{(r,\theta)}\,\Phi = r > 0. \tag{121}$$

Ce déterminant réapparaîtra au chapitre 3 dans la formule de changement de variables.

Exemple 2.51 (Coordonnées sphériques)**.** De même

$$\Psi(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta) \tag{122}$$

définit un C^∞-difféomorphisme de $\mathbf{R}_{>0} \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$ sur son image, et $\det \mathrm{Jac}\,\Psi = r^2 \sin\theta$.

Remarque 2.52 (Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau)**.** Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1 et $a \in U$ tel que $\mathrm{grad}\, f(a) \neq 0$, disons $\partial_n f(a) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites appliqué à $f - f(a)$ montre qu'au voisinage de a l'ensemble de niveau

$$\Sigma = \{b \in U \mid f(b) = f(a)\} \tag{123}$$

est le graphe d'une fonction C^1 de $n-1$ variables : c'est une *hypersurface*. De plus, si $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \Sigma$ est une courbe C^1 tracée sur Σ avec $\gamma(0) = a$, alors en dérivant $f \circ \gamma \equiv f(a)$ on obtient

$$\big\langle \mathrm{grad}\, f(a), \gamma'(0) \big\rangle = 0. \tag{124}$$

Le gradient est donc orthogonal à tous les vecteurs tangents à Σ en a : il dirige la normale à l'hypersurface de niveau. Cette observation sera le point de départ de l'étude des surfaces au chapitre 3.

2.7. **Les opérateurs de l'analyse vectorielle.** Nous pouvons enfin introduire les trois opérateurs différentiels qui donnent son nom à ce cours. Dans toute cette section, U désigne un ouvert de $\mathbf{R}^3$, dont les coordonnées sont notées (x,y,z) ; on appelle *champ de vecteurs* sur U une application $X : U \to \mathbf{R}^3$, et *fonction* ou *champ scalaire* une application $f : U \to \mathbf{R}$.

Définition 2.53. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ de classe C^1 et $X = (P,Q,R) : U \to \mathbf{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. On pose

$$\mathrm{grad}\, f = (\partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f)\,, \tag{125}$$

$$\mathrm{div}\, X = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R, \tag{126}$$

$$\mathrm{rot}\, X = (\partial_y R - \partial_z Q,\ \partial_z P - \partial_x R,\ \partial_x Q - \partial_y P)\,. \tag{127}$$

Ainsi grad transforme une fonction en champ de vecteurs, rot un champ de vecteurs en champ de vecteurs, et div un champ de vecteurs en fonction. Si f est C^2, on définit également le *laplacien*

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f. \tag{128}$$

Remarque 2.54 (L'opérateur nabla)**.** Il est commode d'introduire le symbole formel $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ et de traiter les trois opérateurs comme des produits :

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \qquad \operatorname{div} X = \langle \nabla, X \rangle, \qquad \operatorname{rot} X = \nabla \wedge X. \tag{129}$$

Cette notation est un moyen mnémotechnique très efficace, en particulier pour retrouver la formule du rotationnel comme un déterminant formel

$$\operatorname{rot} X = \det \begin{pmatrix} e_1 & \partial_x & P \\ e_2 & \partial_y & Q \\ e_3 & \partial_z & R \end{pmatrix}, \tag{130}$$

mais il faut se rappeler que ∇ n'est pas un vecteur : ses « coordonnées » ne commutent pas avec les fonctions.

Proposition 2.55. *Soient $f, g : U \to \mathbf{R}$ et $X, Y : U \to \mathbf{R}^3$ de classe C^1. On a*

(1) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

(2) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$.

(3) $\operatorname{rot}(fX) = f \operatorname{rot} X + \operatorname{grad} f \wedge X$.

(4) $\operatorname{div}(X \wedge Y) = \langle \operatorname{rot} X, Y \rangle - \langle X, \operatorname{rot} Y \rangle$.

Démonstration. Ce sont des calculs directs à partir des définitions, en utilisant la règle de Leibniz pour les dérivées partielles. Démontrons par exemple (2) : si $X = (P, Q, R)$ alors $fX = (fP, fQ, fR)$ et

$$\operatorname{div}(fX) = \partial_x(fP) + \partial_y(fQ) + \partial_z(fR) = f\left(\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R\right) + P\partial_x f + Q\partial_y f + R\partial_z f, \tag{131}$$

ce qui est exactement l'égalité annoncée. Les autres se traitent de la même façon. □

Théorème 2.56. *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ de classe C^2 et $X : U \to \mathbf{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^2. Alors*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0. \tag{132}$$

Démonstration. Les deux identités sont des conséquences immédiates du lemme de Schwarz. Pour la première, la première coordonnée de $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$ vaut

$$\partial_y(\partial_z f) - \partial_z(\partial_y f) = 0, \tag{133}$$

et de même pour les deux autres par permutation circulaire. Pour la seconde, en écrivant $X = (P, Q, R)$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = \partial_x\left(\partial_y R - \partial_z Q\right) + \partial_y\left(\partial_z P - \partial_x R\right) + \partial_z\left(\partial_x Q - \partial_y P\right) \tag{134}$$

et les six termes s'annulent deux à deux par le théorème 2.35. □

Définition 2.57. Un champ de vecteurs X sur U est dit *irrotationnel* si $\mathrm{rot}\, X = 0$, et il est dit *conservatif* ou *à potentiel scalaire* s'il existe $f : U \to \mathbf{R}$ telle que $X = \mathrm{grad}\, f$. De même X est *à divergence nulle* ou *incompressible* si $\mathrm{div}\, X = 0$, et il *dérive d'un potentiel vecteur* s'il existe Y tel que $X = \mathrm{rot}\, Y$.

Le théorème 2.56 dit exactement que tout champ conservatif est irrotationnel et que tout champ dérivant d'un potentiel vecteur est à divergence nulle. Les réciproques sont beaucoup plus délicates : elles sont vraies sur $\mathbf{R}^3$ tout entier, ou plus généralement sur un ouvert étoilé, mais fausses en général.

Exemple 2.58. Sur l'ouvert $U = \mathbf{R}^3 \backslash (\{0\} \times \{0\} \times \mathbf{R})$, c'est-à-dire le complémentaire de l'axe Oz, le champ

$$X(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0 \right) \tag{135}$$

vérifie $\mathrm{rot}\, X = 0$ mais n'est le gradient d'aucune fonction définie sur U tout entier. Nous verrons au chapitre 3 que l'obstruction se mesure par la circulation de X le long d'un lacet entourant l'axe, qui vaut 2π et non 0. C'est le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.

De même, sur $\mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ le champ coulombien $Y(x,y,z) = (x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ vérifie $\mathrm{div}\, Y = 0$ mais n'est le rotationnel d'aucun champ global : son flux à travers une sphère centrée en l'origine vaut 4π.

Ces phénomènes, où une équation différentielle locale n'admet de solution globale que si le domaine n'a pas de « trous », constituent le fil conducteur des chapitres suivants. Le lien précis entre les propriétés topologiques de U et les opérateurs $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}, \mathrm{div}$ est l'objet de la *cohomologie de De Rham*, que nous n'aborderons pas dans ce cours, mais dont les théorèmes de Green, Stokes et Gauss du chapitre 3 sont les premières manifestations.

2.8. **Exercices.**

Exercice 2.59. Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles, l'existence des dérivées directionnelles et la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions suivantes, prolongées par 0 en l'origine :

$$\frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^3}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \qquad \frac{x^3y}{x^4+y^2}, \qquad (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \tag{136}$$

Exercice 2.60. Soit $f(t) = t^2 \sin(1/t)$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbf{R}$ mais n'est pas C^1. En déduire un exemple de fonction de deux variables différentiable en tout point mais dont la différentielle n'est pas continue.

Exercice 2.61. Soit $f : \mathbf{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbf{R}$ une fonction C^1 homogène de degré d, c'est-à-dire telle que $f(\lambda a) = \lambda^d f(a)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout a. Montrer l'identité d'Euler

$$\langle \mathrm{grad}\, f(a), a \rangle = d\, f(a). \tag{137}$$

Exercice 2.62. Soit

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f(0,0) = 0. \tag{138}$$

Montrer que f est C^1 sur $\mathbf{R}^2$, que $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ et $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ existent mais sont différentes. Pourquoi cela ne contredit-il pas le lemme de Schwarz ?

Exercice 2.63. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Déterminer l'ensemble des points où f est un difféomorphisme local. L'application f est-elle injective ?

Exercice 2.64. Déterminer les points de la courbe $\{x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ au voisinage desquels elle est le graphe d'une fonction C^1 de x, et calculer la dérivée de cette fonction en ces points.

Exercice 2.65. Démontrer les identités (1), (3) et (4) de la proposition 2.55, puis établir la formule

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} X) - \Delta X, \tag{139}$$

où ΔX désigne le champ obtenu en appliquant le laplacien à chaque coordonnée de X.

Exercice 2.66. Soit X un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\operatorname{rot} X = 0$. En posant

$$f(a) = \int_0^1 \langle X(ta), a\rangle \, \mathrm{d}t, \tag{140}$$

montrer que $\operatorname{grad} f = X$. Où l'hypothèse que le domaine est $\mathbf{R}^3$ tout entier (et non un ouvert quelconque) est-elle utilisée ?

3. Intégrales et théorèmes de Stokes

Nous y construisons d'abord les différentes notions d'intégrale dont on a besoin en dimension supérieure : intégrales multiples sur des domaines de $\mathbf{R}^n$, intégrales le long d'une courbe, intégrales sur une surface. Nous démontrons ensuite les trois grands théorèmes qui relient ces intégrales aux opérateurs grad, rot et div introduits au chapitre 2 : le théorème de Green–Riemann dans le plan, le théorème de Stokes pour le rotationnel et le théorème de la divergence. Il faut les voir comme trois avatars d'un unique énoncé, généralisant le théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a) : \tag{141}$$

l'intégrale d'une dérivée sur un domaine ne dépend que des valeurs de la fonction au bord du domaine.

3.1. Intégrales multiples.

Nous nous contentons ici de la théorie de l'intégrale de Riemann, suffisante pour les fonctions continues sur des domaines raisonnables. Le lecteur qui connaît l'intégrale de Lebesgue peut lire tout ce qui suit dans ce cadre, plus confortable, sans rien changer aux énoncés.

Définition 3.1. Un *pavé compact* de $\mathbf{R}^n$ est un produit $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Son volume est $\operatorname{Vol}(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Une *subdivision* de P est la donnée, pour chaque i, d'une subdivision de $[a_i, b_i]$; elle découpe P en un nombre fini de sous-pavés $P_1, \ldots, P_N$ d'intérieurs deux à deux disjoints.

Pour $f : P \to \mathbf{R}$ bornée et σ une subdivision, on pose

$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Vol}(P_j) \inf_{P_j} f, \qquad S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Vol}(P_j) \sup_{P_j} f. \tag{142}$$

On dit que f est *Riemann-intégrable* si $\sup_\sigma s(f,\sigma) = \inf_\sigma S(f,\sigma)$, et on note alors $\int_P f$ cette valeur commune.

Proposition 3.2. *Toute fonction continue sur un pavé compact P y est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine (théorème 1.3), f est uniformément continue sur P : il existe $\delta > 0$ tel que $\|x-y\| \leqslant \delta$ entraîne $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Si σ est une subdivision dont tous les sous-pavés ont un diamètre $\leqslant \delta$, alors $\sup_{P_j} f - \inf_{P_j} f \leqslant \varepsilon$ pour tout j, d'où $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leqslant \varepsilon\,\mathrm{Vol}(P)$. □

L'intégrale ainsi définie est linéaire, croissante, et vérifie $\left|\int_P f\right| \leqslant \mathrm{Vol}(P) \sup_P |f|$. Le théorème suivant est l'outil de calcul fondamental : il ramène une intégrale multiple à une succession d'intégrales simples.

Théorème 3.3 (Fubini)**.** *Soient $P \subset \mathbf{R}^p$ et $Q \subset \mathbf{R}^q$ deux pavés compacts et $f : P \times Q \to \mathbf{R}$ continue. Alors*

$$\int_{P\times Q} f = \int_P \left(\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_Q \left(\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{143}$$

Démonstration. Notons $g(x) = \int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y$, qui est bien définie et continue en x par uniforme continuité de f sur le compact $P \times Q$. Soit $\sigma = (\sigma_P, \sigma_Q)$ une subdivision produit de $P \times Q$, découpant P en P_i et Q en Q_j. Pour $x \in P_i$ on a

$$\sum_j \mathrm{Vol}(Q_j) \inf_{P_i\times Q_j} f \;\leqslant\; g(x) \;\leqslant\; \sum_j \mathrm{Vol}(Q_j) \sup_{P_i\times Q_j} f, \tag{144}$$

et en multipliant par $\mathrm{Vol}(P_i)$ puis en sommant sur i on obtient $s(f,\sigma) \leqslant \int_P g \leqslant S(f,\sigma)$. Comme f est intégrable, les sommes de Darboux encadrent aussi $\int_{P\times Q} f$ et leur écart tend vers 0 ; les deux quantités coïncident donc. Le second membre de (143) s'obtient en échangeant les rôles de P et Q. □

Il faut maintenant intégrer sur des domaines qui ne sont pas des pavés. Si $D \subset \mathbf{R}^n$ est borné et $f : D \to \mathbf{R}$ est bornée, on choisit un pavé $P \supset D$ et on pose

$$\int_D f = \int_P \tilde{f}, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{145}$$

lorsque $\tilde{f}$ est intégrable sur P ; cette définition ne dépend pas du pavé choisi. Le problème est que $\tilde{f}$ est discontinue le long de ∂D, et il faut donc contrôler la taille du bord.

Définition 3.4. Une partie $A \subset \mathbf{R}^n$ est *négligeable* si pour tout $\varepsilon > 0$ elle peut être recouverte par une famille finie de pavés de volume total $\leqslant \varepsilon$. Un compact $D \subset \mathbf{R}^n$ est un *domaine admissible* si son bord ∂D est négligeable.

Théorème 3.5. *Si D est un domaine admissible et $f : D \to \mathbf{R}$ est continue et bornée, alors f est intégrable sur D. Le nombre* $\mathrm{Vol}(D) = \int_D 1$ *s'appelle le* volume *(l'*aire *si $n = 2$) de D.*

Nous admettons cet énoncé, ainsi que le fait que le graphe d'une fonction continue $\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ est négligeable dans $\mathbf{R}^n$; c'est ce dernier point qui garantit que les domaines rencontrés en pratique sont admissibles.

Définition 3.6. Un *domaine élémentaire* de $\mathbf{R}^2$ (relativement à l'axe des y) est un ensemble de la forme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\big\} \tag{146}$$

avec $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ continues sur $[a,b]$. On définit de même les domaines élémentaires relativement à l'axe des x, et en dimension n quelconque.

Corollaire 3.7. *Avec les notations ci-dessus, pour f continue sur D,*

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{147}$$

Exemple 3.8. Soit D le disque de centre 0 et de rayon R. C'est un domaine élémentaire avec $\varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ $\varphi_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, et

$$\mathrm{Aire}(D) = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \pi R^2. \tag{148}$$

Le dernier outil est la formule de changement de variables, qui généralise la substitution $u = \varphi(t)$ à une variable. C'est le seul résultat important de ce cours dont nous ne donnerons pas la démonstration, qui est longue et technique.

Théorème 3.9 (Changement de variables ; admis)**.** *Soient U, V deux ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $\Phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Soit $D \subset U$ un domaine admissible tel que $\Phi(D) \subset V$ soit admissible, et f continue bornée sur $\Phi(D)$. Alors*

$$\int_{\Phi(D)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_D f\left(\Phi(x)\right) \left|\det \mathrm{Jac}_x \Phi\right| \mathrm{d}x. \tag{149}$$

Le facteur $\left|\det \mathrm{Jac}_x \Phi\right|$ s'interprète géométriquement : en un point a, la différentielle $D_a\Phi$ envoie un petit cube de côté h sur un parallélépipède de volume $\left|\det \mathrm{Jac}_a \Phi\right| h^n$, et le déterminant mesure donc la dilatation infinitésimale des volumes par Φ. C'est exactement cette interprétation qui réapparaîtra au théorème de Liouville (théorème 4.29).

Exemple 3.10 (Coordonnées polaires et sphériques)**.** Avec les difféomorphismes des exemples 2.50 et 2.51,

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta, \tag{150}$$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int f(\Psi(r,\theta,\phi))\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{151}$$

On en déduit par exemple le volume de la boule de rayon R dans $\mathbf{R}^3$:

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{B}(0,R)) = \int_0^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{152}$$

Exemple 3.11 (Intégrale de Gauss)**.** En passant en polaires,

$$\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi, \tag{153}$$

d'où $\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. (On applique ici le théorème 3.9 sur des disques de rayon R puis on fait tendre R vers l'infini.)

3.2. **Courbes et intégrales curvilignes.**

Définition 3.12. Un *arc paramétré* de classe C^1 dans $\mathbf{R}^n$ est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1. Il est *régulier* si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t. C'est un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On dit que γ est C^1 *par morceaux* s'il existe une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ telle que γ soit C^1 sur chaque $[t_{i-1}, t_i]$; tout ce qui suit s'étend à ce cadre en sommant sur les morceaux.

Deux arcs $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ et $\tilde\gamma : [c,d] \to \mathbf{R}^n$ sont *équivalents* s'il existe un C^1-difféomorphisme croissant $h : [c,d] \to [a,b]$ tel que $\tilde\gamma = \gamma \circ h$; on dit alors que $\tilde\gamma$ est un *reparamétrage* de γ et que les deux arcs définissent la même *courbe orientée*.

Définition 3.13. La *longueur* de l'arc γ est

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{154}$$

Plus généralement, pour f continue au voisinage de l'image de γ, l'*intégrale curviligne par rapport à l'abscisse curviligne* est

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{155}$$

Définition 3.14. Soit X un champ de vecteurs continu au voisinage de l'image de γ. La *circulation* (ou *travail*) de X le long de γ est

$$\int_\gamma \langle X, \mathrm{d}\ell\rangle = \int_a^b \big\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t. \tag{156}$$

Proposition 3.15. *La longueur et l'intégrale $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$ sont invariantes par reparamétrage, croissant ou décroissant. La circulation est invariante par reparamétrage croissant et change de signe par reparamétrage décroissant.*

Démonstration. Soit $\tilde\gamma = \gamma\circ h$ avec $h:[c,d]\to[a,b]$ un C^1-difféomorphisme. Alors $\tilde\gamma'(u) = h'(u)\gamma'(h(u))$ et le changement de variable $t = h(u)$ à une variable donne

$$\int_c^d \big\langle X(\tilde\gamma(u)),\tilde\gamma'(u)\big\rangle\,\mathrm{d}u = \int_c^d \big\langle X(\gamma(h(u))),\gamma'(h(u))\big\rangle h'(u)\,\mathrm{d}u = \pm\int_a^b \big\langle X(\gamma(t)),\gamma'(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t \qquad (157)$$

avec le signe $+$ si h est croissante. Pour (155) le calcul est le même, mais $\|\tilde\gamma'(u)\| = |h'(u)|\,\|\gamma'(h(u))\|$ fait apparaître une valeur absolue qui compense le changement d'orientation. □

Ainsi la circulation dépend de la courbe *et* de son orientation, mais pas du paramétrage choisi. On notera $-\gamma$ l'arc parcouru en sens inverse, de sorte que $\int_{-\gamma}\langle X,\mathrm{d}\ell\rangle = -\int_\gamma\langle X,\mathrm{d}\ell\rangle$.

Remarque 3.16 (Formes différentielles de degré 1)**.** Si $X = (P_1,\dots,P_n)$, on écrit traditionnellement

$$\omega = P_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + P_n\,\mathrm{d}x_n, \qquad \int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle X,\mathrm{d}\ell\rangle. \qquad (158)$$

L'objet ω s'appelle une *forme différentielle de degré* 1 : c'est la donnée, en chaque point x, de la forme linéaire $v\mapsto\langle X(x),v\rangle$. En dimension 3, avec $X=(P,Q,R)$, cela s'écrit $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$. Cette notation est commode car elle rend le changement de variables automatique. Ici on prend cet objet comme une notation. Ce qu'il faut comprendre est que si $\gamma(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, alors $\mathrm{d}x_i = x_i'(t)\,\mathrm{d}t$ et alors

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle X,\mathrm{d}\ell\rangle = \int_a^b \left(\sum_i P_i(t)x_i'(t)\right)\mathrm{d}t. \qquad (159)$$

3.3. **Champs de gradients et potentiels.**

Théorème 3.17. *Soit $U\subset\mathbf{R}^n$ un ouvert connexe et $X:U\to\mathbf{R}^n$ un champ de vecteurs continu. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) il existe $f:U\to\mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $X = \operatorname{grad} f$;

(2) pour tout lacet C^1 par morceaux γ tracé dans U, $\int_\gamma\langle X,\mathrm{d}\ell\rangle = 0$;

(3) la circulation de X le long d'un arc tracé dans U ne dépend que de ses extrémités.

Dans ce cas f est unique à une constante additive près et on l'appelle un potentiel *de X.*

Démonstration. (1) ⇒ (3) : si $X = \operatorname{grad} f$ et $\gamma\colon[a,b]\to U$, alors par la formule de la chaîne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t)) = \langle\operatorname{grad} f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle$, donc

$$\int_\gamma\langle X,\mathrm{d}\ell\rangle = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t))\,\mathrm{d}t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \qquad (160)$$

C'est exactement l'analogue de (141) pour les courbes.

(3) ⇒ (2) : un lacet a ses deux extrémités confondues, et sa circulation est donc égale à celle du chemin constant, à savoir 0.

(2) ⇒ (3) : si γ_1 et γ_2 ont mêmes extrémités, la concaténation de γ_1 et de $-\gamma_2$ est un lacet, dont la circulation nulle donne $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$.

(3) ⇒ (1) : fixons un point $c \in U$. Comme U est un ouvert connexe, il est connexe par arcs et tout point $a \in U$ peut être joint à c par un chemin C^1 par morceaux γ_a tracé dans U. Posons $f(a) = \int_{\gamma_a} \langle X, \mathrm{d}\ell \rangle$, qui est bien défini par (3). Soit $a \in U$ et $r > 0$ tel que $\mathbf{B}(a,r) \subset U$. Pour $|h| < r$ et i fixé, on peut aller de c à $a + he_i$ en suivant γ_a puis le segment $[a, a+he_i]$, d'où

$$f(a+he_i) - f(a) = \int_0^h \langle X(a+se_i), e_i \rangle \,\mathrm{d}s = \int_0^h X_i(a+se_i)\,\mathrm{d}s. \tag{161}$$

Comme X_i est continue, le théorème fondamental de l'analyse donne $\partial_i f(a) = X_i(a)$. Les dérivées partielles de f existent et sont continues, donc f est C^1 (théorème 2.30) et $\operatorname{grad} f = X$.

Enfin si $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g$ alors $\operatorname{grad}(f-g) = 0$ et $f-g$ est constante sur U connexe par le corollaire 2.29. □

Définition 3.18. Un champ de vecteurs $X = (P_1, \dots, P_n)$ de classe C^1 sur U est dit *fermé* si

$$\partial_i P_j = \partial_j P_i \quad \text{pour tous } i, j. \tag{162}$$

En dimension 3, cela équivaut à $\operatorname{rot} X = 0$.

Par le lemme de Schwarz, tout champ de gradients de classe C^1 est fermé (c'est le théorème 2.56). La réciproque est fausse en général, mais vraie sur un ouvert étoilé.

Théorème 3.19 (Lemme de Poincaré)**.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert étoilé par rapport à un point a et soit X un champ de vecteurs C^1 fermé sur U. Alors X admet un potentiel sur U : il existe $f \in C^2(U)$ telle que $X = \operatorname{grad} f$. Explicitement,*

$$f(b) = \int_0^1 \langle X\left(a + t(b-a)\right), b-a \rangle \,\mathrm{d}t. \tag{163}$$

Démonstration. Quitte à translater, supposons $a = 0$, de sorte que $tb \in U$ pour tous $b \in U$ et $t \in [0,1]$. Posons $f(x) = \int_0^1 \sum_j P_j(tx) x_j \,\mathrm{d}t$. L'intégrande est C^1 en x, à dérivées partielles continues en (x,t), donc le théorème 1.21 permet de dériver sous le signe intégral : en un point $b \in U$,

$$\partial_i f(b) = \int_0^1 \left(P_i(tb) + \sum_j t\, \partial_i P_j(tb)\, b_j \right) \mathrm{d}t. \tag{164}$$

L'hypothèse $\partial_i P_j = \partial_j P_i$ permet de récrire le second terme, et l'on reconnaît alors une dérivée totale :

$$P_i(tb) + t \sum_j \partial_j P_i(tb) b_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\, P_i(tb)\right). \tag{165}$$

Par conséquent $\partial_i f(b) = [tP_i(tb)]_{t=0}^{t=1} = P_i(b)$, ce qui est le résultat voulu. □

Exemple 3.20. L'hypothèse sur U est essentielle. Sur $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, qui n'est pas étoilé, le champ

$$X(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \tag{166}$$

est fermé (calcul immédiat) mais sa circulation le long du cercle unité $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, vaut

$$\int_\gamma \langle X, \mathrm{d}\ell \rangle = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t))\,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0. \tag{167}$$

Par le théorème 3.17, X n'admet pas de potentiel sur U. Localement il en admet un, à savoir l'argument θ, mais celui-ci ne peut pas être défini continûment sur tout U : c'est le phénomène de monodromie. Le nombre 2π mesure le « trou » de U en l'origine.

3.4. **Le théorème de Green–Riemann.**

Théorème 3.21 (Green–Riemann)**.** *Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ un domaine compact dont le bord ∂D est un lacet C^1 par morceaux, orienté dans le sens direct. Soient P, Q deux fonctions C^1 au voisinage de D. Alors*

$$\oint_{\partial D} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{168}$$

Remarque 3.22. On peut reformuler le théorème de Green de la façon suivante, si $X = (P, Q)$ est un champ de vecteurs sur un voisinage de D et $r(X)$ est la fonction $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ alors

$$\int_D r(X) = \int_{\partial D} \langle X, d\ell \rangle. \tag{169}$$

Démonstration. Nous traitons le cas où D est élémentaire dans les deux directions ; le cas général s'obtient en découpant D en un nombre fini de tels domaines, les intégrales curvilignes le long des coupures s'annulant deux à deux puisqu'elles sont parcourues deux fois en sens contraires.

Rappelons que si $X = (P, Q)$ est un champ de vecteurs et $\gamma : [c, d] \to \mathbf{R}^2$ est un arc C^1, alors

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x = \int_c^d P(x(t), y(t)) x'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{170}$$

Écrivons $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ et montrons

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{171}$$

Le bord de D se décompose en le graphe inférieur $y = \varphi_1(x)$ parcouru de $x = a$ à $x = b$, le segment vertical en $x = b$, le graphe supérieur $y = \varphi_2(x)$ parcouru de $x = b$ à $x = a$, et le segment vertical en

$x = a$. Sur les segments verticaux x est constant, donc $\mathrm{d}x = 0$ et leur contribution est nulle. Il reste

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,\mathrm{d}x. \tag{172}$$

D'autre part, par le corollaire 3.7 et le théorème fondamental de l'analyse,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right)\mathrm{d}x, \tag{173}$$

ce qui est l'opposé de (172) et prouve (171). En écrivant D comme domaine élémentaire relativement à l'axe des x et en refaisant le même calcul, on obtient de même $\oint_{\partial D} Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \partial_x Q$. La somme des deux identités donne (168). □

Corollaire 3.23 (Aire par une intégrale de bord)**.** *Avec les hypothèses du théorème,*

$$\mathrm{Aire}(D) = \oint_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\,. \tag{174}$$

Démonstration. Prendre $(P,Q) = (0,x)$, puis $(P,Q) = (-y,0)$, puis la demi-somme. □

Exemple 3.24. Pour l'ellipse $\gamma(t) = (\alpha\cos t, \beta\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$, la dernière formule donne

$$\mathrm{Aire} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\alpha\cos t \cdot \beta\cos t + \beta\sin t \cdot \alpha\sin t)\,\mathrm{d}t = \pi\alpha\beta. \tag{175}$$

Remarque 3.25. Le théorème de Green admet une seconde lecture. En appliquant (168) au couple $(P,Q) = (-Y,X)$ où $Z = (X,Y)$ est un champ de vecteurs du plan, on obtient

$$\iint_D \mathrm{div}\,Z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} \langle Z, \nu\rangle\,\mathrm{d}s, \tag{176}$$

où ν est la normale unitaire extérieure à ∂D. C'est le théorème de la divergence en dimension 2. Ainsi la même identité se lit soit comme un énoncé sur le rotationnel (circulation au bord), soit comme un énoncé sur la divergence (flux sortant) : c'est la première manifestation de l'unité des trois théorèmes de ce chapitre.

3.5. **Surfaces, aire et flux.**

Définition 3.26. Dans toute la suite, $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ désigne un domaine admissible compact égal à l'adhérence de son intérieur. On dit qu'une application $\sigma : \Delta \to \mathbf{R}^3$ est *de classe C^1 sur* Δ si elle est la restriction à Δ d'une application de classe C^1 définie sur un ouvert contenant Δ ; une telle application s'appelle une *nappe paramétrée* de classe C^1. Elle est *régulière* si

$$\partial_u\sigma(u,v) \wedge \partial_v\sigma(u,v) \neq 0 \quad \text{pour tout } (u,v) \in \Delta, \tag{177}$$

y compris aux points du bord de Δ. On note $S = \sigma(\Delta)$ son image. Le *plan tangent* en $\sigma(u,v)$ est le plan vectoriel engendré par $\partial_u\sigma$ et $\partial_v\sigma$, et le vecteur

$$\nu_\sigma(u,v) = \frac{\partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma}{\|\partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\|} \tag{178}$$

est la *normale unitaire associée au paramétrage*.

Remarque 3.27. La régularité étant requise sur le compact Δ tout entier, la fonction $\partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma$ y est continue et ne s'y annule pas : la normale ν_σ est donc définie et continue sur Δ, bord compris. C'est ce qui permettra, à la section 3.6, de comparer les normales de deux nappes le long d'une couture, c'est-à-dire précisément sur des points du bord.

On prendra garde que cette exigence au bord n'est pas automatique : pour le paramétrage sphérique de l'exemple 3.31, on a $\partial_\theta\sigma \wedge \partial_\phi\sigma = R\sin\theta\cdot\sigma$, qui s'annule aux pôles, situés sur le bord de Δ. Ce paramétrage n'est donc pas une nappe régulière, bien que la direction normale, elle, admette une limite en ces points.

On prendra garde à ce que ν_σ est définie sur le *domaine de paramètres* Δ, et non sur l'image S : si σ n'est pas injective, rien ne garantit que deux paramètres ayant la même image aient la même normale. C'est toute la question de l'orientation, à laquelle la section 3.6 est consacrée. Jusque-là, les définitions qui suivent sont attachées à la nappe σ, non à son image.

Définition 3.28. Soit $\sigma : \Delta \to \mathbf{R}^3$ une nappe paramétrée de classe C^1, non nécessairement régulière, f une fonction continue et X un champ de vecteurs continu au voisinage de S. On pose

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint_\Delta \|\partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{179}$$

$$\iint_S f\,\mathrm{d}S = \iint_\Delta f(\sigma(u,v))\,\|\partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{180}$$

$$\iint_S \langle X, \nu_\sigma\rangle\,\mathrm{d}S = \iint_\Delta \langle X(\sigma(u,v)), \partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\rangle\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{181}$$

La dernière quantité s'appelle le *flux* de X à travers la nappe σ.

La justification de (179) est la même que celle du facteur jacobien : l'image par $D\sigma$ du petit carré $[u,u+h]\times[v,v+h]$ est approximativement le parallélogramme engendré par $h\partial_u\sigma$ et $h\partial_v\sigma$, dont l'aire vaut $h^2\,\|\partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\|$.

Proposition 3.29. *L'aire et l'intégrale* $\iint_S f\,\mathrm{d}S$ *ne dépendent pas du paramétrage régulier choisi. Le flux n'en dépend qu'au signe près, et il est invariant si le changement de paramétrage préserve l'orientation, c'est-à-dire si le jacobien du changement de variables est positif.*

Démonstration. Soit $\Theta : \tilde{\Delta} \to \Delta$ un C^1-difféomorphisme et $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Theta$. La formule de la chaîne donne

$$\partial_{\tilde{u}}\tilde{\sigma} \wedge \partial_{\tilde{v}}\tilde{\sigma} = (\det \mathrm{Jac}\ \Theta)\,(\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma) \circ \Theta, \tag{182}$$

ce qui se vérifie en développant par bilinéarité du produit vectoriel. Le théorème 3.9 fait alors apparaître le facteur $|\det \mathrm{Jac}\,\Theta|$, qui compense exactement. □

Exemple 3.30 (Graphe)**.** Si S est le graphe d'une fonction C^1, $S = \{(x,y,h(x,y)) \mid (x,y) \in \Delta\}$, on prend $\sigma(x,y) = (x,y,h(x,y))$ et

$$\partial_x \sigma \wedge \partial_y \sigma = (-\partial_x h, -\partial_y h, 1), \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, h\|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{183}$$

Exemple 3.31 (Sphère)**.** Considérons la sphère de rayon R, paramétrée par

$$\sigma(\theta,\phi) = R\,(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)\,, \qquad (\theta,\phi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]. \tag{184}$$

On trouve $\|\partial_\theta \sigma \wedge \partial_\phi \sigma\| = R^2 \sin\theta$, d'où

$$\mathrm{Aire}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = 4\pi R^2. \tag{185}$$

La normale $\partial_\theta \sigma \wedge \partial_\phi \sigma$ est ici dirigée vers l'extérieur. Pour $0 < \theta < \pi$, on a $\partial_\theta \sigma \wedge \partial_\phi \sigma = R \sin\theta \sigma(\theta,\phi)$, de sorte que la normale est dirigée vers l'extérieur.

Ce paramétrage n'est pas régulier, le produit vectoriel ci-dessus s'annule aux pôles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, qui appartiennent au bord de Δ. Le calcul (185) reste néanmoins licite, la définition 3.28 ne demandant que σ soit de classe C^1. On pourra vérifier que la valeur obtenue coïncide avec celle que fournit le découpage régulier de la spèhre en 6 morceaux de l'exemple 3.38.

3.6. **Surfaces compactes et orientation.** Les définitions précédentes sont attachées à une *nappe*, c'est-à-dire à une application σ. Il faut maintenant passer à la *surface*, c'est-à-dire à la partie de $\mathbf{R}^3$ qu'elle décrit. Une seule nappe n'y suffit pas : le paramétrage (184) de la sphère n'est pas régulier aux pôles, et l'on montre qu'aucune nappe régulière définie sur un domaine admissible du plan n'a la sphère pour image. On autorise donc le recollement d'un nombre fini de morceaux.

Rappelons que toute nappe régulière $\sigma : \Delta \to \mathbf{R}^3$ définit par (178) une normale unitaire $\nu_\sigma : \Delta \to \mathbf{R}^3$ sur son domaine de paramètres. Toute la difficulté de ce qui suit tient à ce que ν_σ vit sur Δ et non sur l'image de σ.

Définition 3.32 (Surface compacte)**.** Une *surface compacte* de $\mathbf{R}^3$ est une partie $S \subset \mathbf{R}^3$ telle qu'il existe une famille finie de nappes régulières $\sigma_i : \Delta_i \to \mathbf{R}^3$, $1 \leqslant i \leqslant N$, vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) chaque σ_i est injective et les ouverts $\sigma_i(\mathring{\Delta}_i)$ sont deux à deux disjoints ;

(ii) $S = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(\Delta_i)$.

Une telle famille s'appelle un *découpage* de S, et les ensembles $S_i = \sigma_i(\Delta_i)$ ses *morceaux*.

L'ensemble S est bien compact pour la topologie induite par $\mathbf{R}^3$, comme réunion finie d'images de compacts par des applications continues. La condition (i) exprime que les morceaux ne se chevauchent pas : ils ne peuvent se rencontrer que le long de leurs bords, qui sont d'aire nulle. Une même surface admet évidemment une infinité de découpages, et rien dans la définition n'en privilégie un.

Définition 3.33 (Topologie quotient)**.** On définit sur S la *topologie quotient* qui est l'unique topologie sur S qui rend l'application $\Sigma : \bigsqcup_i \Delta_i \to S$ définie par $\Sigma_{|\Delta_i} = \sigma_i$ comme une application quotient.

En particulier, il est équivalent de se donner une fonction continue $\phi : S \to X$ et une famille d'applications continues $\phi_i : \Delta_i \to X$ telles que $\sigma_i(q) = \sigma_j(q') \Rightarrow \phi_i(q) = \phi_j(q')$ par la propriété de la topologie quotient. On admet les résultats suivants :

— La topologie quotient sur S ne dépend pas du découpage.

— Elle est équivalente à la topologie induite par $\mathbf{R}^3$.

Définition 3.34 (Découpage cohérent, orientabilité)**.** Un découpage $(\sigma_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ d'une surface compacte S est *cohérent* si

$$\sigma_i(q) = \sigma_j(q') \implies \nu_{\sigma_i}(q) = \nu_{\sigma_j}(q') \tag{186}$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $q \in \Delta_i$ et $q' \in \Delta_j$.

La surface S est dite *orientable* s'il **existe** un découpage cohérent de S.

Remarque 3.35. La cohérence est une propriété d'un découpage donné, l'orientabilité une propriété de S. Un découpage quelconque d'une surface orientable n'a aucune raison d'être cohérent : il suffit de remplacer l'un des σ_i par $\sigma_i \circ \tau$, où $\tau(u,v) = (v,u)$, pour retourner la normale de ce seul morceau et détruire la cohérence sans rien changer à S. Il faut donc lire la définition 3.34 comme : S est orientable si l'on peut la découper *de façon compatible*.

Proposition 3.36 (Orientation)**.** *Soit (σ_i) un découpage cohérent d'une surface compacte S. Il existe alors une unique application*

$$n : S \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad \textit{telle que} \quad n \circ \sigma_i = \nu_{\sigma_i} \ \textit{pour tout } i, \tag{187}$$

*et cette application est continue et unitaire. On l'appelle l'*orientation *définie par le découpage, et le couple (S,n) une* surface orientée*.*

Démonstration. Existence et unicité. Tout point $p \in S$ s'écrit $p = \sigma_i(q)$ pour au moins un couple (i,q) par la condition (2), et la formule (187) impose $n(p) = \nu_{\sigma_i}(q)$: l'unicité est claire. La condition de cohérence (186) dit exactement que cette valeur ne dépend pas du couple (i,q) choisi, ce qui rend la définition licite. L'application n est unitaire puisque chaque ν_{σ_i} l'est.

Le fait que cette application est continue provient de la propriété de la topologie quotient et de la propriété de cohérence d'un découpage cohérent. □

Remarque 3.37. Si n est une orientation, $-n$ en est une autre : on l'obtient en remplaçant chaque σ_i par $\sigma_i \circ \tau$ avec $\tau(u,v) = (v,u)$. Sur une surface connexe, ce sont les deux seules. Orienter une surface, c'est donc choisir l'un de ses deux « côtés », et c'est précisément ce choix qui est impossible sur le ruban de Möbius.

Exemple 3.38 (La sphère est orientable)**.** Soit $R > 0$ et soit Q le cube $[-1,1]^3$. La projection radiale $p \mapsto R\,p/\|p\|$ envoie chacune des six faces de Q sur un morceau de la sphère de rayon R. En paramétrant la face $\{w = 1\}$ par

$$\sigma(u,v) = \frac{R}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\,(u,v,1), \qquad (u,v) \in [-1,1]^2, \tag{188}$$

et de même pour les cinq autres, on obtient un découpage de la sphère en six morceaux, chacun paramétré par une nappe C^∞ régulière et injective sur un carré. Les normales ν_{σ_i} sont toutes radiales ; quitte à composer par τ celles qui pointent vers l'intérieur, on obtient un découpage cohérent d'orientation $n(p) = p/R$. La sphère est donc orientable, et n est la normale sortante.

Définition 3.39 (Aire, intégrales et flux sur une surface)**.** Soit (σ_i) un découpage d'une surface compacte S, f une fonction continue et X un champ de vecteurs continu au voisinage de S. On pose

$$\mathrm{Aire}(S) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Aire}\,(\sigma_i(\Delta_i))\,, \qquad \iint_S f\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\Delta_i} f(\sigma_i)\,\|\partial_u\sigma_i \wedge \partial_v\sigma_i\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{189}$$

et, si le découpage est cohérent d'orientation n,

$$\iint_S \langle X, n\rangle \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\Delta_i} \langle X(\sigma_i(u,v)), \partial_u\sigma_i \wedge \partial_v\sigma_i\rangle \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{190}$$

Ces quantités ne dépendent pas du découpage choisi (le flux dépendant bien sûr de l'orientation, et changeant de signe si l'on remplace n par $-n$). Nous l'admettons : la démonstration repose sur la proposition 3.29 et sur le fait que deux morceaux ne se rencontrent que le long d'un ensemble d'aire nulle, qui ne contribue à aucune de ces intégrales.

Définition 3.40 (Découpage adapté, bord)**.** Soit (σ_i) un découpage d'une surface compacte S dans lequel chaque bord $\partial\Delta_i$ est un lacet C^1 par morceaux, découpé en un nombre fini d'arcs réguliers. On dit que le découpage est *adapté* si chacun de ces arcs $c \subset \partial\Delta_i$ est de l'un des deux types suivants :

(i) *arc libre* : aucun autre arc de la famille n'a la même image que c par les σ_j ;

(ii) *couture* : il existe un unique autre arc $c' \subset \partial\Delta_j$, avec $(j,c') \neq (i,c)$, tel que $\sigma_i(c) = \sigma_j(c')$, et cette courbe est parcourue en **sens opposés** par les deux paramétrages induits par le parcours direct de $\partial\Delta_i$ et de $\partial\Delta_j$.

Le *bord* de S est alors la réunion ∂S des images des arcs libres, orientée comme image des $\partial\Delta_i$ parcourus dans le sens direct. On dit que S est *fermée*, ou *sans bord*, s'il n'y a aucun arc libre.

Remarque 3.41 (Pourquoi les coutures sont parcourues en sens opposés)**.** La condition de sens opposé du point (2) n'est pas une hypothèse technique arbitraire : c'est la traduction du fait que les deux morceaux sont situés *de part et d'autre* de la couture. Elle s'énonce commodément sous la forme de la *règle du bonhomme d'Ampère* : un observateur placé le long de n, parcourant le bord

d'un morceau dans le sens positif, a ce morceau à sa gauche. Si le découpage est cohérent, les deux morceaux adjacents à une couture ont la même normale n ; étant de part et d'autre, ils se trouvent à gauche pour des sens de parcours opposés.

C'est exactement cette condition qui tombe en défaut pour le ruban de Möbius : les deux arêtes verticales du rectangle des paramètres ont la même image, mais le recollement avec retournement les fait parcourir cette image dans le même sens (exercice 3.62). Aucun découpage du ruban n'est donc à la fois cohérent et adapté, ce qui est une autre manière de dire qu'il n'est pas orientable.

3.7. **Le théorème de Stokes.** Le théorème de Stokes affirme que la circulation d'un champ le long du bord d'une surface est égale au flux de son rotationnel à travers cette surface. Nous l'établissons en deux temps : d'abord pour une seule nappe, en ramenant tout au domaine de paramètres où l'on applique Green–Riemann ; puis pour une surface compacte orientée quelconque, en sommant sur les morceaux d'un découpage et en vérifiant que les coutures se compensent.

Théorème 3.42 (Stokes pour une nappe)**.** *Soit $\sigma : \Delta \to \mathbf{R}^3$ une nappe régulière de classe C^2, où $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ est un domaine compact dont le bord $\partial\Delta$ est un lacet C^1 par morceaux, et soit X un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\sigma(\Delta)$. Si $c : [\alpha,\beta] \to \partial\Delta$ est un paramétrage de $\partial\Delta$ dans le sens direct, alors*

$$\int_{\sigma\circ c} \langle X, \mathrm{d}\ell\rangle = \iint_{\Delta} \langle \mathrm{rot}\, X(\sigma(u,v)), \partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{191}$$

Commençons par un lemme d'algèbre linéaire.

Lemme 3.43. *Soit $M \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ la matrice jacobienne d'un champ X en un point, c'est-à-dire $M_{ij} = \partial_j X_i$. Alors pour tous $a, b \in \mathbf{R}^3$,*

$$\langle Ma, b\rangle - \langle Mb, a\rangle = \langle \mathrm{rot}\, X, a \wedge b\rangle. \tag{192}$$

Démonstration. Le membre de gauche vaut $\langle (M - {}^tM)a, b\rangle$. La matrice $A = M - {}^tM$ est antisymétrique de coefficients $A_{ij} = \partial_j X_i - \partial_i X_j$. Or toute matrice antisymétrique 3×3 s'écrit $Aw = \omega \wedge w$ pour un unique vecteur ω, et l'identification des coefficients donne ici $\omega = \mathrm{rot}\, X$: par exemple $A_{12} = \partial_2 X_1 - \partial_1 X_2 = -(\mathrm{rot}\, X)_3$, ce qui est bien le coefficient $(1,2)$ de la matrice de $w \mapsto \mathrm{rot}\, X \wedge w$. Ainsi

$$\big\langle (M - {}^tM)a, b\big\rangle = \langle \mathrm{rot}\, X \wedge a, b\rangle = \det(\mathrm{rot}\, X, a, b) = \langle \mathrm{rot}\, X, a \wedge b\rangle. \tag{193}$$

□

Démonstration du théorème 3.42. Notons $Y = X \circ \sigma$ et introduisons les deux fonctions sur Δ

$$A(u,v) = \langle Y(u,v), \partial_u\sigma(u,v)\rangle, \qquad B(u,v) = \langle Y(u,v), \partial_v\sigma(u,v)\rangle. \tag{194}$$

Le membre de gauche. On a $(\sigma\circ c)' = \partial_u\sigma\, c_1' + \partial_v\sigma\, c_2'$, donc

$$\int_{\sigma\circ c} \langle X, \mathrm{d}\ell\rangle = \int_\alpha^\beta \big(A(c(t))c_1'(t) + B(c(t))c_2'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \oint_{\partial\Delta} (A\,\mathrm{d}u + B\,\mathrm{d}v). \tag{195}$$

Le théorème de Green–Riemann appliqué dans le plan des paramètres donne alors

$$\int_{\sigma\circ c} \langle X, \mathrm{d}\ell\rangle = \iint_{\Delta} (\partial_u B - \partial_v A)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{196}$$

Calcul de l'intégrande. En dérivant (194),

$$\partial_u B - \partial_v A = \langle \partial_u Y, \partial_v \sigma\rangle + \langle Y, \partial_u\partial_v \sigma\rangle - \langle \partial_v Y, \partial_u \sigma\rangle - \langle Y, \partial_v\partial_u \sigma\rangle. \tag{197}$$

Comme σ est C^2, le lemme de Schwarz (théorème 2.35) assure que $\partial_u\partial_v\sigma = \partial_v\partial_u\sigma$ et les deux termes du milieu se compensent. Par ailleurs la formule de la chaîne donne $\partial_u Y = D_\sigma X\,(\partial_u\sigma)$, et de même pour v. En notant $M = \mathrm{Jac}_\sigma X$ et en appliquant le lemme 3.43 avec $a = \partial_u\sigma$ et $b = \partial_v\sigma$,

$$\partial_u B - \partial_v A = \langle M\partial_u\sigma, \partial_v\sigma\rangle - \langle M\partial_v\sigma, \partial_u\sigma\rangle = \langle \mathrm{rot}\, X, \partial_u\sigma \wedge \partial_v\sigma\rangle, \tag{198}$$

ce qui, reporté dans (196), donne (191). □

Le passage au cas général repose sur l'observation suivante, qui est le seul endroit où l'orientabilité intervient.

Lemme 3.44 (Annulation des coutures)**.** *Soit (σ_i) un découpage adapté d'une surface compacte S et soit X un champ de vecteurs continu au voisinage de S. Alors la somme, étendue à toutes les coutures $c \subset \partial\Delta_i$ de la famille, des circulations de X le long des courbes $\sigma_i \circ c$ orientées par le parcours direct de $\partial\Delta_i$, est nulle.*

Démonstration. Par définition d'un découpage adapté, les coutures se répartissent en paires $\{(i,c),(j,c')\}$ telles que $\sigma_i(c) = \sigma_j(c')$, cette courbe étant parcourue en sens opposés par les deux paramétrages. Par la proposition 3.15, les circulations correspondantes sont donc opposées et leur somme est nulle. En sommant sur les paires, on obtient le résultat. □

Théorème 3.45 (Stokes)**.** *Soit S une surface compacte munie d'un découpage cohérent et adapté $(\sigma_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ de classe C^2, soit n l'orientation associée et ∂S le bord orienté de la définition 3.40. Alors, pour tout champ de vecteurs X de classe C^1 au voisinage de S,*

$$\oint_{\partial S} \langle X, \mathrm{d}\ell\rangle = \iint_S \langle \mathrm{rot}\, X, n\rangle\,\mathrm{d}S. \tag{199}$$

Démonstration. Appliquons le théorème 3.42 à chacune des nappes σ_i et sommons sur i.

Le membre de droite de (191) donne, après sommation, exactement la définition (190) du flux de $\mathrm{rot}\, X$ à travers S orientée par n. C'est ici qu'intervient la cohérence du découpage, sans laquelle ce flux n'aurait pas de sens.

Le membre de gauche donne la somme, étendue à tous les arcs des bords $\partial\Delta_i$, des circulations de X le long de leurs images, orientées par le parcours direct. Le découpage étant adapté, ces arcs sont de deux types. Les coutures fournissent une contribution totale nulle par le lemme 3.44. Les arcs libres fournissent, par définition du bord orienté, la circulation de X le long de ∂S. Il reste donc $\oint_{\partial S}\langle X, \mathrm{d}\ell\rangle$. □

Corollaire 3.46. *Soit S une surface compacte orientée sans bord, par exemple une sphère ou un tore. Alors*

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} X, n\rangle \,\mathrm{d}S = 0 \tag{200}$$

pour tout champ X de classe C^1 au voisinage de S.

Démonstration. Il n'y a aucun arc libre, donc $\partial S = \varnothing$ et le membre de gauche de (199) est une somme vide. □

Remarque 3.47. Le membre de gauche de (199) ne dépend que de S, de son orientation et de X. Le théorème contient donc l'énoncé, remarquable, que le flux du rotationnel à travers deux surfaces orientées ayant le *même* bord orienté est le même. C'est cette invariance qui permet, en pratique, de remplacer une surface compliquée par une surface commode : pour calculer la circulation le long d'un lacet, on choisit la surface qui rend le calcul du flux le plus simple.

Exemple 3.48. Prenons $X(x,y,z) = (-y,x,0)$, dont le rotationnel vaut $(0,0,2)$, et pour S le disque unité du plan $z=0$ orienté par $n = e_3$. Le flux vaut $2\,\mathrm{Aire}(S) = 2\pi$; la circulation le long du cercle unité vaut $\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$. Les deux coïncident.

3.8. **Le théorème de la divergence.**

Théorème 3.49 (Divergence, Green–Ostrogradski, Gauss)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domaine compact dont le bord $\partial\Omega$ est une surface compacte sans bord au sens de la définition 3.32, orientée par la normale unitaire **sortante** n. Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de Ω. Alors*

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} X \,\mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} \langle X, n\rangle \,\mathrm{d}S. \tag{201}$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de traiter le cas $X = (0,0,R)$, les deux autres se déduisant par permutation des rôles des coordonnées. Comme pour Green–Riemann, on se ramène par découpage au cas où Ω est élémentaire relativement à l'axe des z :

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Delta,\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y)\} \tag{202}$$

avec $\psi_1 \leqslant \psi_2$ de classe C^1 sur un domaine $\Delta \subset \mathbf{R}^2$. Le théorème de Fubini et le théorème fondamental de l'analyse donnent

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V = \iint_\Delta \big(R(x,y,\psi_2(x,y)) - R(x,y,\psi_1(x,y))\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{203}$$

Le bord de Ω se compose de trois parties : le couvercle $S_2 = \{z = \psi_2\}$, le fond $S_1 = \{z = \psi_1\}$ et la surface latérale S_ℓ. Sur S_ℓ la normale est horizontale, donc $\langle X, n\rangle = R n_3 = 0$ et la contribution est

nulle. Sur S_2, paramétrée comme un graphe, l'exemple 3.30 donne $\partial_x\sigma \wedge \partial_y\sigma = (-\partial_x\psi_2, -\partial_y\psi_2, 1)$, qui pointe vers le haut, donc vers l'extérieur ; ainsi

$$\iint_{S_2} \langle X, n\rangle \,\mathrm{d}S = \iint_{\Delta} R(x,y,\psi_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{204}$$

Sur S_1 la normale extérieure pointe vers le bas et le même calcul donne $-\iint_\Delta R(x,y,\psi_1)$. La somme des trois contributions est exactement le membre de droite de (203). □

Exemple 3.50. Pour $X(x) = x$ on a $\operatorname{div} X = 3$, donc pour tout domaine Ω

$$\iint_{\partial\Omega} \langle x, n\rangle \,\mathrm{d}S = 3\,\mathrm{Vol}(\Omega). \tag{205}$$

Sur la boule de rayon R, la normale sortante est $n = x/R$ et le membre de gauche vaut $R \cdot 4\pi R^2$, d'où $\mathrm{Vol} = \frac{4}{3}\pi R^3$: on retrouve (152).

3.9. **Interprétations et conséquences.**

Proposition 3.51 (Interprétation locale de la divergence)**.** *Soit X un champ C^1 au voisinage d'un point $a \in \mathbf{R}^3$. Alors*

$$\operatorname{div} X(a) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbf{B}(a,r))} \iint_{\partial\mathbf{B}(a,r)} \langle X, n\rangle \,\mathrm{d}S. \tag{206}$$

Démonstration. Par le théorème 3.49 le membre de droite vaut $\mathrm{Vol}(\mathbf{B})^{-1} \iiint_{\mathbf{B}} \operatorname{div} X$, et $\operatorname{div} X$ est continue : la moyenne d'une fonction continue sur une boule de rayon r tend vers sa valeur au centre. □

La divergence est donc la *densité de sources* du champ : elle mesure le flux sortant par unité de volume. De la même façon, le théorème de Stokes montre que $\langle \operatorname{rot} X(a), n\rangle$ est la limite, quand $r \to 0$, de la circulation de X le long d'un petit cercle de rayon r centré en a et orthogonal à n, divisée par l'aire πr^2 : le rotationnel est la *densité de circulation*, et sa direction est l'axe autour duquel le champ tourne le plus.

Corollaire 3.52 (Formules de Green)**.** *Soit Ω comme au théorème 3.49 et soient f, g de classe C^2 au voisinage de Ω. En notant $\partial_n g = \langle \operatorname{grad} g, n\rangle$ la dérivée normale, on a*

$$\iiint_{\Omega} \left(f\Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle\right) \mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} f\,\partial_n g \,\mathrm{d}S, \tag{207}$$

$$\iiint_{\Omega} \left(f\Delta g - g\Delta f\right) \mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} \left(f\partial_n g - g\partial_n f\right) \mathrm{d}S. \tag{208}$$

Démonstration. On applique le théorème de la divergence au champ $X = f \operatorname{grad} g$, dont la divergence vaut $f\Delta g + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$ par la proposition 2.55(2). La seconde formule s'obtient en retranchant à (207) la même identité où f et g sont échangées. □

Exemple 3.53 (Le champ coulombien)**.** Soit Y le champ défini sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ par $Y(x,y,z) = (x,y,z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$. Un calcul direct donne $\operatorname{div} Y = 0$. Pourtant son flux à travers la sphère de rayon R vaut

$$\iint_{S_R} \langle Y, n \rangle \, \mathrm{d}S = \iint_{S_R} \frac{1}{R^2} \, \mathrm{d}S = 4\pi \neq 0. \tag{209}$$

Il n'y a aucune contradiction avec le théorème 3.49 : le champ n'est pas défini en l'origine, qui est à l'intérieur de la boule. En revanche, le théorème de la divergence appliqué à la couronne comprise entre deux sphères centrées montre que le flux est le même à travers toute surface fermée entourant l'origine. Ce nombre 4π, indépendant de la surface, est l'analogue en dimension 3 du 2π de l'exemple 3.20, et c'est le théorème de Gauss de l'électrostatique.

En particulier Y n'est le rotationnel d'aucun champ défini sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ tout entier : sinon son flux à travers la sphère, qui est une surface fermée, serait nul par le corollaire 3.46.

Remarque 3.54 (Un seul théorème)**.** Les identités (141), (168), (199) et (201) ont toutes la même forme

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega, \tag{210}$$

où M est un domaine de dimension k, ω une forme différentielle de degré $k-1$ et d un opérateur, la *différentielle extérieure*, qui se lit successivement comme grad, rot et div selon le degré. Le formalisme des formes différentielles, que nous n'aborderons pas ici, permet de démontrer les trois théorèmes de ce chapitre d'un seul coup et en toute dimension. Il explique aussi les identités $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$ et $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$ du théorème 2.56, qui deviennent la seule relation $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, ainsi que les exemples 3.20 et 3.53 : les nombres 2π et 4π y mesurent des classes de *cohomologie de De Rham*, invariants topologiques de l'ouvert considéré.

3.10. **Exercices.**

Exercice 3.55. Calculer $\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où D est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Calculer $\iiint_\Omega z \, \mathrm{d}V$ où Ω est le demi-boule $\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\}$.

Exercice 3.56. Calculer l'aire du domaine du premier quadrant délimité par les courbes $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ et $y = 4x$, en utilisant le changement de variables $u = xy$, $v = y/x$.

Exercice 3.57. Soit $V_n(R)$ le volume de la boule euclidienne de rayon R dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que $V_n(R) = c_n R^n$ et établir la relation de récurrence $c_n = c_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{(n-1)/2} \, \mathrm{d}t$. En déduire c_4.

Exercice 3.58. Calculer la circulation du champ $X(x,y,z) = (y,z,x)$ le long du cercle intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $x + y + z = 0$, orienté convenablement. On pourra utiliser le théorème de Stokes.

Exercice 3.59. Sur $U = \mathbf{R}^3 \setminus \Big(\{0\}^2 \times \mathbf{R} \Big)$, montrer que le champ (135) est fermé et calculer sa circulation le long d'un lacet faisant k tours autour de l'axe Oz. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.60. Calculer, à l'aide du corollaire 3.23, l'aire délimitée par la cardioïde $r = 1 + \cos\theta$ en coordonnées polaires.

Exercice 3.61. Une fonction f de classe C^2 est dite *harmonique* si $\Delta f = 0$. Montrer, à l'aide de (207), que si f est harmonique sur un voisinage de Ω et nulle sur $\partial\Omega$, alors f est nulle sur Ω. En déduire l'unicité de la solution du problème de Dirichlet $\Delta u = h$ sur Ω, $u = g$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 3.62 (Le ruban de Möbius)**.** On considère la nappe $\sigma : \Delta = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$\sigma(u,v) = \left(\left(1 + v\cos\tfrac{u}{2}\right)\cos u,\ \left(1 + v\cos\tfrac{u}{2}\right)\sin u,\ v\sin\tfrac{u}{2} \right). \tag{211}$$

(1) Montrer que $\partial_v\sigma$ est unitaire, orthogonal à $\partial_u\sigma$, et que $\|\partial_u\sigma\| \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que σ est une nappe régulière et que $S = \sigma(\Delta)$ est une surface compacte.

(2) Vérifier que $\sigma(0,v) = \sigma(2\pi, -v)$ et que $\nu_\sigma(0,v) = -\nu_\sigma(2\pi,-v)$. Ce découpage à un seul morceau est-il cohérent ?

(3) Soit $\gamma(u) = \sigma(u,0)$, qui est un lacet. Montrer que $\nu_\sigma(0,0) = -\nu_\sigma(2\pi,0)$.

(4) On suppose qu'il existe une application continue $n : S \to \mathbf{R}^3$ unitaire et orthogonale au plan tangent en tout point. Montrer que $u \mapsto \langle n(\gamma(u)), \nu_\sigma(u,0)\rangle$ est continue à valeurs dans $\{-1,1\}$, donc constante, et en déduire une contradiction. Conclure que S n'est pas orientable.

(5) Montrer que l'aire de S est en revanche parfaitement bien définie. Pourquoi n'y a-t-il pas de contradiction ?

Exercice 3.63. Construire un découpage cohérent et adapté du tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oz le cercle de centre $(R,0,0)$ et de rayon $r < R$ situé dans le plan Oxz. En déduire que le tore est orientable, puis calculer son aire.

Exercice 3.64. Soit γ le cercle unité du plan $z = 0$. Calculer le flux de $\mathrm{rot}X$, pour $X(x,y,z) = (-y,x,z)$, à travers le disque unité de ce plan, puis à travers la demi-sphère supérieure $\left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\right\}$, les deux étant orientées vers le haut. Commenter à l'aide de la remarque 3.47.

Exercice 3.65. Soit Ω un solide immergé dans un fluide de masse volumique ρ, soumis à la pression $p(x,y,z) = p_0 - \rho g z$. La force de pression exercée sur Ω est $F = -\iint_{\partial\Omega} p\, n\, \mathrm{d}S$. En appliquant le théorème de la divergence à chaque coordonnée, démontrer le principe d'Archimède : $F = \rho g\, \mathrm{Vol}(\Omega) e_3$.

4. Équations différentielles et champs de vecteurs

Un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ peut se lire de deux façons. Statiquement, c'est une application $X : U \to \mathbf{R}^n$, et c'est ainsi que nous l'avons traité au chapitre 3 en calculant sa circulation et son flux. Dynamiquement, c'est un champ de vitesses : il prescrit en chaque point la direction et la

vitesse d'une particule qui s'y trouverait, et détermine donc un mouvement. Ce chapitre est consacré à ce second point de vue. La question centrale est celle de l'existence et de l'unicité des trajectoires, à laquelle répond le théorème de Cauchy–Lipschitz, et l'objet qui en résulte est le *flot* du champ de vecteurs.

4.1. **Équations différentielles : généralités.**

Définition 4.1. Soit $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ un ouvert et $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ une application continue. L'*équation différentielle ordinaire* associée est

$$y' = X(t,y). \tag{212}$$

Une *solution* de (212) est la donnée d'un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbf{R}$ et d'une application $y : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que $(t,y(t)) \in \Omega$ et $y'(t) = X(t,y(t))$ pour tout $t \in I$.

Étant donné $(t_0,a) \in \Omega$, le *problème de Cauchy* consiste à chercher une solution vérifiant de plus la *condition initiale* $y(t_0) = a$.

L'équation est dite *autonome* si X ne dépend pas de t, c'est-à-dire si X est un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ et si $\Omega = \mathbf{R} \times U$.

Remarque 4.2 (Réduction à l'ordre 1)**.** Une équation d'ordre p, $y^{(p)} = F(t,y,y',\dots,y^{(p-1)})$ avec y à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, se ramène à (212) en posant $Y = (y,y',\dots,y^{(p-1)}) \in \mathbf{R}^{pd}$ et

$$Y' = (Y_2, Y_3, \dots, Y_p, F(t,Y_1,\dots,Y_p)). \tag{213}$$

De même, une équation non autonome se ramène à une équation autonome en ajoutant la variable t comme coordonnée : on pose $Z = (t,y) \in \mathbf{R}^{1+n}$ et $Z' = (1, X(Z))$. Il n'y a donc aucune perte de généralité à ne traiter que les systèmes autonomes du premier ordre, et nous le ferons dès que cela simplifiera les énoncés.

Lemme 4.3 (Forme intégrale)**.** *Soit I un intervalle contenant t_0 et $y : I \to \mathbf{R}^n$ continue avec $(t,y(t)) \in \Omega$. Alors y est solution du problème de Cauchy en (t_0,a) si et seulement si*

$$y(t) = a + \int_{t_0}^{t} X(s,y(s))\,\mathrm{d}s \quad \textit{pour tout } t \in I. \tag{214}$$

Démonstration. Si y est C^1 et vérifie (212) avec $y(t_0) = a$, il suffit d'intégrer. Réciproquement, si y est continue et vérifie (214), alors $s \mapsto X(s,y(s))$ est continue, donc le membre de droite est C^1 de dérivée $X(t,y(t))$ par le théorème fondamental de l'analyse ; ainsi y est C^1 et vérifie (212), et $y(t_0) = a$. □

Cette reformulation transforme un problème de dérivation en un problème de *point fixe* pour l'opérateur $y \mapsto a + \int_{t_0}^{\cdot} X(s,y(s))\,\mathrm{d}s$, auquel nous appliquerons le théorème 1.10.

4.2. **Le lemme de Grönwall.**

Lemme 4.4 (Grönwall)**.** *Soient $I = [t_0, T]$, $u : I \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ continue, et $C \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ deux constantes telles que*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} \lambda u(s)\,\mathrm{d}s \quad \textit{pour tout } t \in I. \tag{215}$$

Alors $u(t) \leqslant C e^{\lambda(t-t_0)}$ pour tout $t \in I$.

Démonstration. Posons $v(t) = C + \int_{t_0}^{t} \lambda u(s)\,\mathrm{d}s$, de sorte que $u \leqslant v$ et que v est C^1 avec $v' = \lambda u \leqslant \lambda v$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\right) = \left(v'(t) - \lambda v(t)\right)e^{-\lambda(t-t_0)} \leqslant 0, \tag{216}$$

donc $t \mapsto v(t)e^{-\lambda(t-t_0)}$ est décroissante et majorée par sa valeur en t_0, à savoir C. Ainsi $u(t) \leqslant v(t) \leqslant Ce^{\lambda(t-t_0)}$. □

4.3. **Le théorème de Cauchy–Lipschitz.**

Définition 4.5. Une application continue $X : \Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est *localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable* si pour tout $(t_0, a) \in \Omega$ il existe $\tau, r > 0$ et $k \geqslant 0$ tels que le cylindre $\mathcal{V} = [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{\mathbf{B}}(a, r)$ soit contenu dans Ω et

$$\|X(t,x) - X(t,\tilde{x})\| \leqslant k\,\|x - \tilde{x}\| \quad \text{pour tous } (t,x), (t,\tilde{x}) \in \mathcal{V}. \tag{217}$$

Lemme 4.6. *Si X est de classe C^1 sur Ω, alors X est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.*

Démonstration. Soit $(t_0, a) \in \Omega$ et $\tau, r > 0$ tels que le cylindre $\mathcal{V}$ ci-dessus soit contenu dans Ω. L'application $(t,x) \mapsto \partial_x X(t,x)$ est continue sur le compact $\mathcal{V}$, donc bornée par une constante k. Pour t fixé, l'application $x \mapsto X(t,x)$ est différentiable sur la boule $\overline{\mathbf{B}}(a,r)$, qui est convexe, et l'inégalité des accroissements finis (théorème 2.28) donne (217). □

Théorème 4.7 (Cauchy–Lipschitz, version locale)**.** *Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et soit $(t_0, a) \in \Omega$. Alors il existe $T > 0$ tel que le problème de Cauchy*

$$y' = X(t,y), \qquad y(t_0) = a \tag{218}$$

admette une solution sur l'intervalle $]t_0 - T, t_0 + T[$. De plus, deux solutions quelconques de (218) *coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition.*

Démonstration. Existence. Choisissons τ, r, k comme dans la définition 4.5 et posons

$$M = \sup_{\mathcal{V}} \|X\| < \infty, \qquad T = \min\left(\tau,\ \frac{r}{M},\ \frac{1}{2k}\right) \tag{219}$$

(avec la convention $r/M = +\infty$ si $M = 0$), puis $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. Considérons

$$E = \left\{ y \in C(I, \mathbf{R}^n) \mid \|y(t) - a\| \leqslant r \text{ pour tout } t \in I \right\}. \tag{220}$$

C'est une partie fermée non vide (elle contient la fonction constante a) de l'espace complet $\mathcal{C}(I,\mathbf{R}^n)$ de la proposition 1.8, donc un espace métrique complet non vide pour la distance de la convergence uniforme.

Définissons l'*opérateur de Picard*

$$\Phi(y)(t) = a + \int_{t_0}^{t} X(s,y(s))\,\mathrm{d}s. \tag{221}$$

Il est bien défini sur E puisque $(s,y(s)) \in \mathcal{V} \subset \Omega$ pour $y \in E$, et $\Phi(y)$ est continue. Vérifions que $\Phi(E) \subset E$: par le lemme 1.19,

$$\|\Phi(y)(t) - a\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|X(s,y(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \leqslant M\,|t-t_0| \leqslant MT \leqslant r. \tag{222}$$

Vérifions ensuite que Φ est contractante : pour $y,z \in E$ et $t \in I$,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|X(s,y(s)) - X(s,z(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \leqslant kT\,\|y-z\|_\infty \leqslant \tfrac{1}{2}\,\|y-z\|_\infty . \tag{223}$$

Le théorème du point fixe de Banach (théorème 1.10) fournit donc un unique $y \in E$ tel que $\Phi(y) = y$, et le lemme 4.3 montre que y est solution du problème de Cauchy sur $]t_0 - T, t_0 + T[$.

Unicité. Soient $y : I_1 \to \mathbf{R}^n$ et $z : I_2 \to \mathbf{R}^n$ deux solutions du problème (218) et soit $J = I_1 \cap I_2$, qui est un intervalle ouvert contenant t_0. L'ensemble $A = \{t \in J \mid y(t) = z(t)\}$ est non vide et fermé dans J par continuité. Montrons qu'il est ouvert. Soit $t_1 \in A$ et posons $b = y(t_1) = z(t_1)$. Choisissons un cylindre $\mathcal{V}_1 = [t_1 - \tau_1, t_1 + \tau_1] \times \overline{\mathbf{B}}(b, r_1) \subset \Omega$ sur lequel X est k_1-lipschitzienne en la seconde variable. Par continuité il existe $0 < \sigma \leqslant \tau_1$ tel que y et z soient à valeurs dans $\overline{\mathbf{B}}(b,r_1)$ sur $[t_1 - \sigma, t_1 + \sigma] \cap J$. Pour t dans cet intervalle, avec $t \geqslant t_1$, la forme intégrale donne

$$\|y(t) - z(t)\| \leqslant \int_{t_1}^{t} \|X(s,y(s)) - X(s,z(s))\|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_1}^{t} k_1\,\|y(s) - z(s)\|\,\mathrm{d}s. \tag{224}$$

Le lemme de Grönwall 4.4 appliqué avec $C = 0$ donne $\|y(t) - z(t)\| \leqslant 0$, donc $y = z$ sur $[t_1, t_1 + \sigma] \cap J$; le même raisonnement en renversant le temps traite $t \leqslant t_1$. Ainsi A est ouvert, et J étant connexe, $A = J$ par le lemme 1.5. □

Remarque 4.8. La condition $kT \leqslant 1/2$ dans (219) est un artefact de la démonstration : on peut s'en dispenser en munissant $\mathcal{C}(I,\mathbf{R}^n)$ de la norme équivalente $\|y\|_\lambda = \sup_t e^{-\lambda|t-t_0|}\,\|y(t)\|$ avec $\lambda > k$, pour laquelle Φ est contractante de rapport k/λ quel que soit T. Le rayon d'existence est alors seulement limité par $\min(\tau, r/M)$.

Remarque 4.9 (Le rôle de l'hypothèse de Lipschitz)**.** La continuité seule de X suffit à garantir l'existence d'une solution (théorème de Cauchy–Peano, que nous n'aborderons pas), mais **pas** son unicité. L'exemple classique est $y' = 2\sqrt{|y|}$ avec $y(0) = 0$, qui admet la solution nulle mais aussi,

pour tout $c \geqslant 0$, la solution

$$y_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant c \\ (t-c)^2 & \text{si } t \geqslant c. \end{cases} \tag{225}$$

La fonction $x \mapsto 2\sqrt{|x|}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0 : sa pente y est infinie.

4.4. **Solutions maximales.**

Définition 4.10. Une solution $y : I \to \mathbf{R}^n$ de (212) est *maximale* s'il n'existe pas de solution $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbf{R}^n$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$ et $\tilde{y}_{|I} = y$.

Proposition 4.11. *Sous les hypothèses du théorème 4.7, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale, et son intervalle de définition est ouvert.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy en (t_0, a) ; il est non vide. Par la partie unicité du théorème 4.7, deux éléments de $\mathcal{S}$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines. On peut donc définir $I_{\max}$ comme la réunion de tous les intervalles de définition et $y_{\max}$ par recollement : c'est une solution, manifestement maximale et unique. Son domaine est ouvert car toute solution définie sur $]\alpha, \beta]$ se prolongerait au-delà de β par le théorème 4.7 appliqué en $(\beta, y(\beta))$. □

Théorème 4.12 (Théorème des bouts)**.** *Soit $y :]t_-, t_+[\to \mathbf{R}^n$ la solution maximale du problème de Cauchy en (t_0, a). Si $t_+ < +\infty$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $t < t_+$ tel que $(t, y(t)) \notin K$. Autrement dit, la trajectoire sort de tout compact de Ω lorsque $t \to t_+$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et $t_1 < t_+$ tels que $(t, y(t)) \in K$ pour tout $t \in [t_1, t_+[$. Posons $M = \sup_K \|X\| < \infty$. Alors $\|y'\| \leqslant M$ sur $[t_1, t_+[$, donc y est M-lipschitzienne sur cet intervalle ; comme $t_+ < \infty$, le critère de Cauchy montre que $y(t)$ admet une limite b lorsque $t \to t_+^-$. Le point (t_+, b) appartient à K car K est fermé, donc à Ω.

Le théorème 4.7 appliqué en (t_+, b) fournit une solution z sur un intervalle $]t_+ - T, t_+ + T[$ avec $z(t_+) = b$. La fonction obtenue en recollant y sur $]t_-, t_+[$ et z sur $[t_+, t_+ + T[$ est continue, vérifie la forme intégrale (214), donc est une solution qui prolonge strictement y : cela contredit la maximalité. □

Corollaire 4.13 (Critère d'existence globale)**.** *Soit $J \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $X : J \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ continue, localement lipschitzienne en x, et à croissance au plus linéaire : il existe des fonctions continues $\alpha, \beta \geqslant 0$ sur J telles que*

$$\|X(t,x)\| \leqslant \alpha(t)\,\|x\| + \beta(t) \quad \textit{pour tous } (t,x) \in J \times \mathbf{R}^n. \tag{226}$$

Alors toute solution maximale est définie sur J tout entier.

Démonstration. Soit y la solution maximale sur $]t_-, t_+[$ et supposons $t_+ < \sup J$. Soit $T \in]t_0, \sup J[$ avec $t_+ \leqslant T$ et posons $A = \sup_{[t_0,T]} \alpha$, $B = \sup_{[t_0,T]} \beta$. La forme intégrale donne, pour $t \in [t_0, t_+[$,

$$\|y(t)\| \leqslant \|a\| + \int_{t_0}^{t} (A\,\|y(s)\| + B)\,\mathrm{d}s \leqslant (\|a\| + B(T - t_0)) + \int_{t_0}^{t} A\,\|y(s)\|\,\mathrm{d}s. \tag{227}$$

Le lemme de Grönwall montre que $\|y\|$ est bornée sur $[t_0, t_+[$, disons par une constante R. La trajectoire reste donc dans le compact $[t_0, t_+] \times \overline{\mathbf{B}}(0,R) \subset \Omega$, ce qui contredit le théorème 4.12. Donc $t_+ = \sup J$, et de même $t_- = \inf J$. □

Exemple 4.14 (Explosion en temps fini)**.** L'hypothèse de croissance linéaire n'est pas superflue : l'équation $y' = y^2$ avec $y(0) = 1$ a pour solution maximale $y(t) = 1/(1-t)$ sur $]-\infty, 1[$. Ici $t_+ = 1$ et $\|y(t)\| \to +\infty$: la solution sort de tout compact en explosant.

Exemple 4.15 (Systèmes linéaires)**.** Si $A : J \to M_{n\times n}(\mathbf{R})$ et $b : J \to \mathbf{R}^n$ sont continues, l'équation $y' = A(t)y + b(t)$ vérifie (226) : toutes ses solutions maximales sont définies sur J entier. Lorsque A est constante et $b = 0$, la solution du problème de Cauchy en $(0,a)$ est $y(t) = e^{tA}a$, où $e^{tA} = \sum_{j\geqslant 0} t^j A^j / j!$; l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n.

4.5. **Dépendance par rapport aux conditions initiales.**

Proposition 4.16. *Soit X continue et k-lipschitzienne en la seconde variable sur un cylindre $\mathcal{V} = I \times \overline{\mathbf{B}}(a,r)$, et soient y, z deux solutions de* (212) *à valeurs dans $\overline{\mathbf{B}}(a,r)$ sur I. Alors pour tout $t \in I$*

$$\|y(t) - z(t)\| \leqslant \|y(t_0) - z(t_0)\|\, e^{k|t-t_0|}. \tag{228}$$

En particulier, deux trajectoires issues de points voisins restent voisines sur un intervalle de temps borné.

Démonstration. La forme intégrale donne, pour $t \geqslant t_0$,

$$\|y(t) - z(t)\| \leqslant \|y(t_0) - z(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} k\,\|y(s) - z(s)\|\,\mathrm{d}s, \tag{229}$$

et le lemme de Grönwall conclut ; on renverse le temps pour $t \leqslant t_0$. □

Remarque 4.17. Le facteur $e^{k|t-t_0|}$ est optimal, comme le montre l'équation scalaire $y' = ky$. La dépendance est continue, mais l'écart entre deux trajectoires peut croître exponentiellement : c'est la sensibilité aux conditions initiales, à la base de la théorie du chaos. Sur un intervalle de temps *borné* l'estimation reste utilisable ; sur un temps long elle ne dit plus rien.

Nous admettrons le raffinement suivant, dont la démonstration suit le même schéma que celle du théorème 4.7 mais demande de contrôler simultanément la solution et sa différentielle par rapport à la donnée initiale.

Théorème 4.18 (Régularité du flot ; admis)**.** *Si X est de classe C^k ($k \geqslant 1$) sur Ω, alors la solution du problème de Cauchy dépend de façon C^k du triplet (t, t_0, a) formé du temps, du temps initial et de la position initiale, sur son domaine de définition.*

4.6. **Le flot d'un champ de vecteurs.** Nous nous plaçons désormais dans le cas autonome : $X : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un champ de vecteurs de classe C^k, $k \geqslant 1$, sur un ouvert U. Pour $x \in U$, notons $t \mapsto \varphi(t,x)$ la solution maximale de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = X(\varphi(t,x)), \qquad \varphi(0,x) = x, \tag{230}$$

définie sur un intervalle ouvert $I_x \ni 0$, et posons

$$\mathcal{D} = \{(t,x) \in \mathbf{R} \times U \mid t \in I_x\}. \tag{231}$$

Théorème 4.19. *L'ensemble $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbf{R} \times U$ contenant $\{0\} \times U$, l'application $\varphi : \mathcal{D} \to U$ est de classe C^k, et :*

(1) $\varphi(0,x) = x$ pour tout $x \in U$;

(2) (propriété de groupe) *si $s \in I_x$ et $t \in I_{\varphi(s,x)}$, alors $t+s \in I_x$ et*

$$\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x); \tag{232}$$

(3) pour tout t, l'ensemble $U_t = \{x \in U \mid (t,x) \in \mathcal{D}\}$ est ouvert et $\varphi_t = \varphi(t,\cdot) : U_t \to U_{-t}$ est un C^k-difféomorphisme d'inverse φ_{-t}.

L'application φ s'appelle le flot *de X.*

Démonstration. L'ouverture de $\mathcal{D}$ et la régularité C^k de φ constituent le théorème 4.18. Le point (1) est la condition initiale.

(2) Fixons $s \in I_x$ et posons $z(t) = \varphi(t+s,x)$, définie pour $t+s \in I_x$. Alors $z(0) = \varphi(s,x)$ et $z'(t) = X(z(t))$ puisque l'équation est autonome : z est donc une solution du problème de Cauchy issu de $\varphi(s,x)$. Par unicité (théorème 4.7) elle coïncide avec $t \mapsto \varphi(t, \varphi(s,x))$ sur l'intersection des domaines, et par maximalité les domaines coïncident, ce qui donne (232). Notons que c'est ici que l'hypothèse d'autonomie est essentielle : pour une équation non autonome, translater le temps change l'équation.

(3) L'ensemble U_t est ouvert comme section de l'ouvert $\mathcal{D}$. En appliquant (2) avec s et $-s$ on obtient $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \mathrm{id}_{U_t}$ et $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \mathrm{id}_{U_{-t}}$, et ces applications sont C^k. □

Définition 4.20. Le champ X est *complet* si $\mathcal{D} = \mathbf{R} \times U$, c'est-à-dire si toutes ses trajectoires sont définies pour tout temps. Dans ce cas $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de U.

Proposition 4.21. *Si $U = \mathbf{R}^n$ et si X est de classe C^1 à support compact (ou plus généralement borné et globalement lipschitzien), alors X est complet.*

Démonstration. Un champ à support compact est borné, donc vérifie (226) avec $\alpha = 0$; on applique le corollaire 4.13. □

Exemple 4.22. (i) Le champ constant $X = e_1$ sur $\mathbf{R}^n$ a pour flot $\varphi_t(x) = x + te_1$: le groupe des translations.

(ii) Le champ linéaire $X(x) = Ax$ a pour flot $\varphi_t(x) = e^{tA}x$. La propriété de groupe est exactement $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

(iii) Le champ $X(x,y) = (-y,x)$ engendre les rotations $\varphi_t = R_\theta$ d'angle $\theta = t$.

(iv) Le champ $X(x) = x^2$ sur $\mathbf{R}$ n'est pas complet (exemple 4.14).

Définition 4.23. Une fonction $g : U \to \mathbf{R}$ de classe C^1 est une *intégrale première* de X si g est constante le long de chaque trajectoire.

Proposition 4.24. *Une fonction C^1 g est une intégrale première de X si et seulement si $\langle \operatorname{grad} g, X\rangle = 0$ sur U, c'est-à-dire si $\partial_X g = 0$.*

Démonstration. Par la formule de la chaîne, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\varphi(t,x)) = \langle \operatorname{grad} g(\varphi(t,x)), X(\varphi(t,x))\rangle$. Cette quantité est nulle pour tous t,x si et seulement si $\langle \operatorname{grad} g, X\rangle$ est nulle sur U, puisque tout point de U est de la forme $\varphi(0,x)$. □

Exemple 4.25. Pour un système hamiltonien dans $\mathbf{R}^{2d}$, de champ $X_H = (\partial_p H, -\partial_q H)$ associé à $H : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}$ de classe C^2, on a

$$\langle \operatorname{grad} H, X_H\rangle = \big\langle \partial_q H, \partial_p H\big\rangle + \big\langle \partial_p H, -\partial_q H\big\rangle = 0. \tag{233}$$

Le hamiltonien est donc une intégrale première : c'est la conservation de l'énergie.

4.7. **Redressement local.** Le théorème suivant dit qu'au voisinage d'un point où il ne s'annule pas, tout champ de vecteurs est, à changement de coordonnées près, le champ constant e_1. Toute la complexité d'un système dynamique se concentre donc au voisinage de ses *points singuliers*, ceux où X s'annule.

Théorème 4.26 (Redressement local)**.** *Soit X un champ de vecteurs de classe C^k, $k \geqslant 1$, sur $U \subset \mathbf{R}^n$ et soit $a \in U$ avec $X(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un C^k-difféomorphisme $\Theta : W \to V$ tels que*

$$D_w\Theta(e_1) = X(\Theta(w)) \quad \text{pour tout } w \in W. \tag{234}$$

Autrement dit, dans les coordonnées données par Θ, l'équation $y' = X(y)$ devient $w_1' = 1$, $w_2' = \cdots = w_n' = 0$, et les trajectoires sont les droites parallèles au premier axe.

Démonstration. Quitte à translater et à composer par un isomorphisme linéaire envoyant $X(a)$ sur e_1, on peut supposer $a = 0$ et $X(0) = e_1$. Soit φ le flot de X et posons, pour $w = (w_1, w') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ assez petit,

$$\Theta(w_1, w') = \varphi\big(w_1, (0, w')\big). \tag{235}$$

L'application Θ est bien définie sur un voisinage de 0 et de classe C^k par le théorème 4.19. Calculons sa différentielle en 0. D'une part

$$D_0\Theta(e_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,0) = X(0) = e_1. \tag{236}$$

D'autre part, pour $j \geqslant 2$, la courbe $s \mapsto \Theta(0, se'_j) = \varphi(0, se_j) = se_j$ a pour vitesse e_j en $s = 0$, donc $D_0\Theta(e_j) = e_j$. Ainsi $D_0\Theta = \mathrm{id}$, qui est inversible : le théorème d'inversion locale (théorème 2.44) montre que Θ est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage W de 0 sur un voisinage V de a.

Enfin, par définition du flot et par la propriété de groupe,

$$D_w\Theta(e_1) = \frac{\partial}{\partial w_1}\varphi(w_1,(0,w')) = X\left(\varphi(w_1,(0,w'))\right) = X(\Theta(w)), \tag{237}$$

ce qui est (234). □

Remarque 4.27. Le théorème de redressement fournit immédiatement $n-1$ intégrales premières indépendantes au voisinage d'un point non singulier : les fonctions $w_2, \dots, w_n$ lues dans les coordonnées Θ, c'est-à-dire les composantes de Θ^{-1} autres que la première. Il ne dit rien en revanche sur le comportement global des trajectoires, qui peut être arbitrairement compliqué.

4.8. **Flot et volume : le théorème de Liouville.** Nous terminons par un résultat qui relie ce chapitre au précédent : il donne l'interprétation dynamique de la divergence, comme taux de variation infinitésimal des volumes le long du flot.

Lemme 4.28 (Formule de Jacobi)**.** *Soit $R : I \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ une application dérivable. Alors $t \mapsto \det R(t)$ est dérivable et*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det R(t) = \det R(t) \cdot \mathrm{Tr}\left(R(t)^{-1}R'(t)\right). \tag{238}$$

Démonstration. L'application det : $M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est polynomiale donc différentiable, et sa différentielle en l'identité est la trace : en effet le développement de $\det(I+hH)$ ne fait apparaître au premier ordre que le produit des termes diagonaux, soit $\prod_i(1+hH_{ii}) = 1 + h\,\mathrm{Tr}\,H + O(h^2)$. Alors

$$\det R(t+h) = \det\left(R(t)\left(I + hR(t)^{-1}R'(t) + o(h)\right)\right) = \det R(t)\left(1 + h\,\mathrm{Tr}(R^{-1}R') + o(h)\right), \tag{239}$$

ce qui donne (238) en divisant par h et en faisant tendre h vers 0. □

Théorème 4.29 (Liouville)**.** *Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur U, de flot φ, et posons $J(t,x) = \det(D_x\varphi_t)$. Alors*

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,x) = \mathrm{div}\,X(\varphi(t,x))\,J(t,x), \qquad J(0,x) = 1, \tag{240}$$

et par conséquent

$$J(t,x) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{div}\,X(\varphi(s,x))\,\mathrm{d}s\right) > 0. \tag{241}$$

Démonstration. Posons $R(t) = D_x\varphi_t$. En différentiant l'équation $\partial_t\varphi(t,x) = X(\varphi(t,x))$ par rapport à x et en utilisant le lemme de Schwarz pour échanger les dérivations, on obtient l'*équation variationnelle*

$$R'(t) = D_{\varphi(t,x)}X \cdot R(t), \qquad R(0) = \mathrm{id}. \tag{242}$$

Comme $R(0) = \mathrm{id}$ est inversible et que R satisfait une équation différentielle linéaire, $R(t)$ reste inversible pour tout t (c'est aussi une conséquence du théorème 4.19(3), φ_t étant un difféomorphisme). La formule de Jacobi donne alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det R(t) = \det R(t)\cdot \mathrm{Tr}\left(R(t)^{-1} D_{\varphi(t,x)} X\, R(t)\right) = \det R(t)\cdot \mathrm{Tr}\left(D_{\varphi(t,x)} X\right), \tag{243}$$

où l'on a utilisé l'invariance de la trace par conjugaison. Or la trace de la matrice jacobienne de X est précisément $\sum_i \partial_i X_i = \mathrm{div}\, X$. L'équation (240) est donc établie, et (241) s'obtient en résolvant cette équation différentielle linéaire scalaire. □

Corollaire 4.30 (Champs à divergence nulle)**.** *Soit X un champ C^1 sur U et $A \subset U$ un domaine admissible compact tel que $\varphi_t(A)$ soit défini. Alors*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Vol}\left(\varphi_t(A)\right) = \int_{\varphi_t(A)} \mathrm{div}\, X\,\mathrm{d}V. \tag{244}$$

En particulier, $\mathrm{div}\, X = 0$ *sur U si et seulement si le flot de X préserve les volumes, c'est-à-dire* $\mathrm{Vol}(\varphi_t(A)) = \mathrm{Vol}(A)$ *pour tous t et A.*

Démonstration. Par le théorème de changement de variables (théorème 3.9) appliqué au difféomorphisme φ_t,

$$\mathrm{Vol}\left(\varphi_t(A)\right) = \int_A |\det D_x \varphi_t|\,\mathrm{d}x = \int_A J(t,x)\,\mathrm{d}x \tag{245}$$

puisque $J > 0$. En dérivant sous le signe intégral (théorème 1.21) et en utilisant (240),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Vol}(\varphi_t(A)) = \int_A \mathrm{div}\, X(\varphi(t,x)) J(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi_t(A)} \mathrm{div}\, X\,\mathrm{d}V, \tag{246}$$

la dernière égalité étant à nouveau le changement de variables $y = \varphi_t(x)$. Si $\mathrm{div}\, X = 0$ le volume est constant ; réciproquement, si le volume est constant pour tout A, alors $\int_A \mathrm{div}\, X = 0$ pour tout domaine A, et la continuité de $\mathrm{div}\, X$ force $\mathrm{div}\, X \equiv 0$. □

Remarque 4.31. On retrouve ainsi, du côté dynamique, l'interprétation de la divergence obtenue au chapitre précédent par le théorème de la divergence (proposition 3.51) : $\mathrm{div}\, X$ mesure le taux de dilatation des volumes. Un champ à divergence nulle décrit un fluide incompressible.

L'exemple le plus important est celui des systèmes hamiltoniens de l'exemple 4.25 : on vérifie immédiatement que

$$\mathrm{div}\, X_H = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \tag{247}$$

par le lemme de Schwarz. Le flot hamiltonien préserve donc le volume de l'espace des phases : c'est le théorème de Liouville de la mécanique classique, point de départ de la mécanique statistique.

4.9. **Exercices.**

Exercice 4.32. Résoudre explicitement les problèmes de Cauchy suivants et déterminer l'intervalle maximal : (a) $y' = y\sin t$, $y(0) = 1$; (b) $y' = ty^2$, $y(0) = 1$; (c) $y' = \sqrt{1+y^2}$, $y(0) = 0$.

Exercice 4.33. Montrer que le problème $y' = |y|^\alpha$, $y(0) = 0$, admet une unique solution si $\alpha \geqslant 1$ et une infinité si $0 < \alpha < 1$.

Exercice 4.34. Démontrer la variante suivante du lemme de Grönwall : si u est continue positive et $u(t) \leqslant a(t) + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s$ avec a croissante et $b \geqslant 0$ continues, alors $u(t) \leqslant a(t)\exp\left(\int_{t_0}^t b\right)$.

Exercice 4.35. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Montrer que $t \mapsto e^{tA}$ est l'unique solution de $R' = AR$, $R(0) = I$. En déduire, à l'aide du théorème 4.29, l'identité $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}A}$.

Exercice 4.36. Soit X un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbf{R}^n$ tel que $\langle X(x), x\rangle \leqslant 0$ pour tout x. Montrer que $t \mapsto \|\varphi(t,x)\|^2$ est décroissante, puis que X est complet en temps positif.

Exercice 4.37. Soit X un champ C^1 complet sur U et $a \in U$ tel que $\varphi(T,a) = a$ pour un certain $T > 0$. Montrer que la trajectoire de a est périodique et que l'ensemble des périodes est un sous-groupe fermé de $\mathbf{R}$. Que peut-on en déduire si $X(a) \neq 0$?

Exercice 4.38. Soit $X(x,y) = (1,x)$ sur $\mathbf{R}^2$. Calculer explicitement son flot, puis un difféomorphisme de redressement, et vérifier le théorème 4.26 sur cet exemple. Le champ admet-il une intégrale première globale ?

Exercice 4.39. Soit $X(x,y) = (y, -x - \varepsilon y)$ avec $\varepsilon > 0$ (oscillateur amorti). Calculer $\mathrm{div}\,X$ et décrire le comportement de l'aire d'un domaine transporté par le flot. Comparer avec le cas $\varepsilon = 0$.

RÉFÉRENCES

[1] V. I. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, 1974.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2016.

[3] J. H. Hubbard, B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms : A Unified Approach*, 5e édition, Matrix Editions, 2015.

[4] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, 4e édition, Cassini, 2014.

[5] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e édition, McGraw–Hill, 1976.

[6] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.