Une petite introduction à l'algèbre linéaire

1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

L'idée d'espace vectoriel consiste à généraliser la notion intuitive d'un espace géométrique qui ressemble à un point, une droite, un plan ou un espace à autant de dimensions qu'on veut.
On ne parlera ici que d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, mais il existe une notion plus générale d'espace vectoriel sur un corps, par exemple sur $\mathbb{C}$, mais celle-ci s'éloigne un peu de l'intuition physique.
Avant de donner des définitions, expliquons rapidement de quel type d'objet on parle. Les exemples typiques d'espaces vectoriels sont les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc qui sont définis de la façon suivante :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $n = 0$, on convient que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Ainsi, $\mathbb{R}^0$ est un point, $\mathbb{R}$ est une droite, $\mathbb{R}^2$ est un plan, etc...
Dans tous ces exemples, on constate qu'il est toujours possible d'additionner des éléments de notre espace et de les multiplier par un nombre réel. C'est là toute l'essence de la notion d'espace vectoriel que l'on va essayer d'extraire.

1. On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 0$ un entier (si ça vous aide, prenez $n = 3$ par exemple). L'addition des vecteurs y est définie de la façon suivante :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

pour $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E. La multiplication par un réel λ est définie par :

$$\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

comme on peut s'y attendre (c'est les mêmes formules que vous avez vues en seconde pour les vecteurs du plan).
Montrer que pour tous $X, Y, Z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a les relations suivantes :

$$X + Y = Y + X, \quad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z, \quad \lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y, \quad (\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X, \quad 1 \cdot X = X, \quad 0 \cdot X = 0.$$

Ici, le vecteur 0 désigne bien sûr le vecteur $(0, \ldots, 0)$.

Définition 1. *Un espace vectoriel est un ensemble E muni d'une opération $+$ qui prend deux éléments de E et retourne un élément de E, d'une opération $\cdot$ qui prend un réel λ et un élément $X \in E$ et retourne un élément (noté $\lambda \cdot X$ ou λX), d'un élément appelé vecteur nul et noté 0 ou 0_E neutre pour l'addition, et qui vérifie les relations de la question précédente.*
Ainsi, $\mathbb{R}^n$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ que l'on vient de définir est un espace vectoriel.

2. On considère l'ensemble suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 4z \text{ et } y = 3x\}$$

qui est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Montrer que F est stable par $+$ et par $\cdot$ au sens où pour tous $X, Y \in F$ on a $X + Y \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in F$ on a $\lambda X \in F$. Montrer aussi que F contient le vecteur nul.

3. En déduire que l'on peut restreindre $+$ et $\cdot$ sur F pour en faire un espace vectoriel aussi. On parle alors de *sous-espace vectoriel*.

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel et $F \subseteq E$ un sous-ensemble. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F contient le vecteur nul 0_E, que F est stable par $+$ et par $\cdot$.*

La définition est importante, mais ce qui l'est peut-être encore plus pour cette introduction, c'est l'image visuelle à avoir en tête. Si E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ à trois dimensions par exemple, un sous-espace vectoriel de E c'est par exemple une droite passant par 0_E, un plan passant par 0_E, mais ça peut aussi être tout l'espace E ou l'espace nul $\{0_E\}$. Il est important de comprendre qu'un sous-espace vectoriel est à son tour un espace vectoriel. Avec cette intuition en tête, on voit bien, sans faire aucun calcul, qu'un cercle qui passe par 0_E n'est pas un sous-espace vectoriel, parce qu'il ne ressemble pas à un point, une droite, un plan, etc...

4. Démontrer en utilisant la définition que le cercle passant par 0 de rayon 1 de centre $(1, 0)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

5. Dans chaque cas, dire si F est un sous-espace vectoriel de E ou non. Dans un premier temps, essayer de répondre sans calcul à l'intuition puis vérifiez votre intuition rigoureusement avec la définition.
5.a. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{Z}$.
5.b. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$.
5.c. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 8\}$.
5.d. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y^2 = 0\}$.
5.e. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(3t + u, t - u, 0, t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$.
5.f. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \emptyset$.
Une fois l'exercice fait, vérifiez vos réponses, vous devez obtenir 010010.

2 Familles libres, familles génératrices

On va vouloir définir la notion de *dimension* d'un espace vectoriel. Concrètement, un espace vectoriel E est de dimension n s'il y a besoin de n directions pour s'y repérer, pas plus, pas moins. Par exemple, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera de dimension n, et en quelque sorte ce sera le seul espace de dimension n puisque tout espace vectoriel de dimension n ressemble à s'y méprendre à $\mathbb{R}^n$. Une façon de dire qu'il faut n directions, pas plus, pas moins, est de donner ces directions par des vecteurs et de dire que ces vecteurs *engendrent l'espace*, c'est à dire qu'on peut bien visiter tout l'espace en combinant ces vecteurs là, et qu'ils sont *indépendants*, c'est à dire qu'aucun vecteur n'est redondant dans notre ensemble de n directions. Formellement, on est en train de découvrir la notion de famille *génératrice* et de famille *libre*.

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel et soit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ une famille de vecteurs de E. On définit un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k)$ et appelé l'espace engendré par la famille $\underline{X}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.*
Il faut y penser comme l'espace de tous les vecteurs que l'on peut visiter avec les directions données par la famille $\underline{X}$.
On dit que $\underline{X}$ engendre E, ou que c'est une famille génératrice de E, si :

$$\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k) = E$$

autrement dit si on peut aller dans tout l'espace juste avec les directions X_i.

1. Expliquer pourquoi $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_k)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^2$ et $X = (1,0)$, $Y = (0,1)$. Montrer que tout vecteur $(x,y) \in E$ est combinaison linéaire de X et Y, et en déduire que (X,Y) est une famille génératrice de E.

3. Montrer que la famille (X,Y,Z) avec $Z = (2,4)$ est aussi une famille génératrice de $E = \mathbb{R}^2$, et expliquer en quoi Z est "redondant" dans cette famille génératrice.

4. Montrer que la famille $(X, 2X)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

5. Quelle est la taille minimale d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

6. Sans essayer de faire une démonstration, quelle est la taille minimale d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ à votre avis ?
On se rapproche du concept de dimension. Pour finaliser notre étude, il faut expliquer clairement ce principe de redondance de certains vecteurs, en parlant d'indépendance linéaire, ou (c'est la même chose), de familles libres de vecteurs.

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel et soit $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\underline{X}$ est une famille libre (ou, c'est la même chose, que les X_i sont linéairement indépendants) si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ qui vérifient $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k = 0$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.*
De façon équivalente, $\underline{X}$ est une famille libre si aucun des vecteurs X_i ne s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Par exemple, la famille $(X, 2X)$ de la question 4 n'est pas libre car on peut faire la combinaison linéaire $2(X) + (-1)(2X) = 0$ avec $2 \neq 0$.
7. Expliquer pourquoi une famille de deux vecteurs (X,Y) est libre si et seulement si X et Y ne sont pas colinéaires (i.e. aucun n'est un multiple de l'autre par un réel).

8. Dans chaque cas, dire si la famille $\underline{X}$ est libre :
8.a Dans $\mathbb{R}^2$, la famille (X,Y,Z) avec $X = (1,2)$, $Y = (1,4)$ et $Z = (0,1)$.
8.b Dans $\mathbb{R}^2$, la famille (X,Y) avec $X = (1,2)$, $Y = (1,4)$.
8.c Dans $\mathbb{R}$, la famille (X) avec $X = 0$.

9. Quel est la taille maximale d'une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

10. Même question pour $\mathbb{R}^3$, sans faire de démonstration.

On constate alors la chose suivante : dans $\mathbb{R}^n$, les familles libres ont au plus n vecteurs et les familles génératrices ont au moins n vecteurs. Pour démontrer ce fait rigoureusement, on a en fait un résultat très général, le lemme de Steinitz :

Lemme 5. *Soit E un espace vectoriel et $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$ et $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_\ell)$ deux familles de vecteurs de E. Si $\underline{X}$ est libre et $\underline{Y}$ est génératrice, alors :*

$$k \leq \ell.$$

La preuve de ce lemme n'est pas très difficile, elle revient à peu de chose près au pivot de Gauss tel qu'on l'a vu en TD en exprimant les vecteurs de $\underline{X}$ en fonction des vecteurs de $\underline{Y}$. En effet, en écrivant $X_j = \sum_j a_{ij} Y_i$, on obtient une matrice rectangulaire $A = (a_{ij})_{i,j}$ à ℓ lignes et k colonnes dont les colonnes sont linéairement indépendantes car $\underline{X}$ est libre. En échelonnant cette matrice, on se rend compte qu'elle doit être de rang k ce qui impose que le nombre de lignes est au moins égal à k, et donc $\ell \geq k$. On peut aussi le démontrer par récurrence, mais laissons cette preuve de côté.

11. En utilisant le lemme de Steinitz, expliquer pourquoi les familles libres de $\mathbb{R}^n$ ont au plus n vecteurs et les familles génératrices de $\mathbb{R}^n$ ont au moins n vecteurs.

3 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 6. *Soit E un espace vectoriel. Une famille de vecteurs $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.*

12. Montrer que la famille (E_1, E_2, E_3) avec $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$ et $E_3 = (0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

13. Donner une autre base de $\mathbb{R}^3$. Peut-on en trouver une avec 2 vecteurs ? Avec 4 vecteurs ?

14. Donner une base de $\mathbb{R}^n$ pour tout n. On pourra considérer les vecteurs $E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec le 1 à la position i.

15. En utilisant le lemme de Steinitz, expliquer pourquoi toutes les bases de E, s'il en existe, ont le même nombre de vecteurs. Ceci permet d'introduire la définition suivante.

Définition 7. *Soit E un espace vectoriel qui possède une base. La dimension de E, notée* $\dim E$, *est le nombre de vecteurs d'une base de E.*

15. Montrer que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

16. Soit E un espace vectoriel et $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille génératrice de E. Expliquer pourquoi, en retirant un par un les vecteurs redondants de $\underline{X}$, c'est à dire ceux qui s'expriment en fonction des autres, on obtient une base de E.
Cette remarque assure que tout espace qui possède une famille génératrice possède en fait une base.

On dira qu'un espace vectoriel E est *de dimension finie* s'il possède une base (finie), c'est à dire si le nombre $\dim(E)$ est bien défini.

17. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille libre de E. Expliquer pourquoi, en ajoutant un à un des vecteurs qui ne sont pas combinaison linéaire des précédents, on augmente la dimension de $\mathrm{Vect}(\underline{X})$ de 1 à chaque fois et on finit par obtenir une base de E.

18 (Difficile). En déduire que si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E est aussi de dimension finie.

4 Lien avec le rang d'une matrice

On a vu dans le TD la notion de rang d'une matrice A à m lignes et n colonnes, définie par le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite associée à A. Il est possible de montrer que le rang de A est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A.