

Feuille de TD n° 5

1 Opération sur les matrices

1.1 Calcul matriciel

Exercice 1. Calculer les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes, lorsqu'elles sont bien définies : tA , tB , $A+B$, $A+{}^tA$, $B+{}^tB$, AB , BA , A^2 , $A{}^tA$, $({}^tA)A$, $({}^tA)^2$, $({}^tB)B$, $B{}^tB$, $({}^tB)^2$, ${}^tA{}^tB$ et ${}^tB{}^tA$.

Exercice 3. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = (2 \quad -1)$$

1. Quelles sont les tailles respectives de A, \dots, E ?
2. Quelles sont les additions que l'on peut effectuer ?
3. Résoudre l'équation $3X - A + 2D = 0$.
4. Quelles sont les multiplications (deux à deux) que l'on peut effectuer ?
5. Calculer AB , FH , CE , EC .
6. Calculer et comparer $(C + E)^2$ et $C^2 + 2CE + E^2$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

1.2 Matrices échelonnées réduites

Exercice 5. Transformer les matrices suivantes en matrices échelonnées réduites :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -7 \\ 0 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 93 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -m & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1.3 Rédiger une preuve

Exercice 6. Soit a et b deux réels. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

1) On suppose dans cette question que $a = \pi$ et $b = \pi/2$.

a) Calculer les coefficients de A et B .

b) On définit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AX et AY puis BX et BY .

On pourra représenter ces 6 vecteurs sur un dessin.

On suppose de nouveau que a et b sont quelconques.

2) Calculer AB et BA . En déduire que A et B commutent, c-à-d $AB = BA$.

3) Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 7. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $A^2 + A = 2I_2$.

2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .

3) Ecrire la matrice A^{-1} .

2 Systèmes linéaires

2.1 Exercices de révision : résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Exercice 8. Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}, 2) \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ x + 3y = 7 \end{cases},$$

$$3) \begin{cases} 6x - 2y = 3 \\ -3x + y = 5 \end{cases}, 4) \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}.$$

2.2 Résolutions de systèmes linéaires avec la méthode du pivot de Gauss

Exercice 9. Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauss :

$$1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}, 2) \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases},$$

$$3) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x - 4y + 7z = 3 \end{cases}, 4) \begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases},$$

$$5) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}, 6) \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = 4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases}.$$

2.3 Rédiger une preuve

Exercice 10. Soient a, b et m des réels quelconques. Discuter, selon les valeurs de a, b, m , le nombre de solutions du système suivant :

$$\begin{cases} mx + y = a \\ x + my = b \end{cases}$$

On pourra par exemple commencer par étudier le cas $m = 1$.

Exercice 11. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y + 2z = 3 \end{cases}$$

1. n'a aucune solution ;
2. a une infinité de solutions ;
3. a une solution unique.

3 Rang et noyau

Exercice 12. Déterminer le rang et le noyau des matrices de l'exercice 3.

Les matrices A , B , et C sont traitées en cours.

Exercice 13. Pour tous réels a et b on considère la matrice $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que le système linéaire $S_{a,b} = \begin{cases} ax + y + z = b \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b \\ x + y + z = b \end{cases}$ d'inconnues réelles x , y et z .

1. Calculez en fonction du paramètre a le rang de la matrice A_a .
2. Déterminer le noyau de la matrice A_a .
3. Pour quelles valeurs de a et b , le système $S_{a,b}$ admet-il des solutions ?

3.1 Rédiger une preuve

Exercice 14. Soient a , b et c trois nombres réels. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\Sigma(a, b, c) : \begin{cases} x - y + z + t = a \\ x + 2z - t = b \\ x + y + 3z - 3t = c \end{cases}$$

1. Écrire le système $\Sigma(a, b, c)$ sous forme matricielle $AX = B$.
2. Déterminer le rang et le noyau de la matrice A .
3. Soient $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ dans \mathbb{R}^4 . On suppose que X est solution de $\Sigma(a, b, c)$. Montrez que X' est solution du système $\Sigma(a, b, c)$ si et seulement si $X - X' \in \ker(A)$.
4. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur a , b et c pour que $\Sigma(a, b, c)$ admette des solutions.
5. Donner en fonction de (a, b, c) l'ensemble des solutions du système $\Sigma(a, b, c)$.

4 Inverse de matrices

Exercice 15. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.1 Rédiger une preuve

Exercice 16. Considérons le système linéaire : $(S) \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 4y - 4z = 7 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$

1. Présenter le système (S) sous la forme d'une équation matricielle $(E) : AX = B$.
2. Déterminer l'inverse de A s'il existe et résoudre (E) puis (S) .
3. Résoudre à l'aide des questions précédentes le système linéaire

$$(S') \begin{cases} x - y - z = 5 \\ 3x - 4y - 4z = 17 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

4. Démontrer que le système linéaire

$$(S'') \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -13x + 5y + 9z = 10 \\ 8x - 7y - 8z = -1 \end{cases}$$

a une unique solution que l'on ne demande pas de calculer (on pourra prouver que A^2 est inversible).

5 Géométrie

Sauf mention contraire, les coordonnées données dans les exercices suivants sont celles des points et des vecteurs dans un repère $R = (0, \vec{i}, \vec{j})$, repère d'un plan \mathcal{P} .

Exercice 17.

1. Donner une équation paramétrique puis cartésienne de la droite passant par le point A_i et de vecteur directeur \vec{u}_i dans les cas suivants :
 - (a) $A_1 = (1; 2)$ et $\vec{u}_1 = (2; 3)$.
 - (b) $A_2 = (-1; 0)$ et $\vec{u}_2 = (1; 4)$.
 - (c) $A_3 = (1/2; 3)$ et $\vec{u}_3 = (2; 5)$.
2. Donner les coordonnées des points d'intersection de ces droites.

Exercice 18. Donner une équation paramétrique puis cartésienne de la droite passant par les points A et B dans les cas suivants :

1. $A_1 = (1; 2)$, $B_1 = (3; 1)$.
2. $A_2 = (-2; 3)$, $B_2 = (1; 1)$.
3. $A_3 = (1; -2)$, $B_3 = (1; 2)$.

Exercice 19. Donner une équation paramétrique de ces droites :

$$2x + 3y = 2; \quad -x - 3y = 0; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad 4x - 5y = 0.$$

Dans la suite on travaille dans le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Exercice 20. Les points $M_1 = (-1, 12, -4)$ et $M_2 = (0, 4, -2)$ appartiennent-ils à la droite

$$(d) = \{(1 - 5t, 2 + 10t, -1 - 5t) \in \mathbb{R}^3 | t \in \mathbb{R}\} ?$$

Exercice 21. Dans quel(s) cas les points A, B et C déterminent-ils un unique plan ? Donner alors 2 équations paramétriques différentes, et une équation cartésienne de ce plan.

1. $A = (1; 2; 0)$, $B = (3; 1; -1)$, $C = (1; -1; 1)$.
2. $A = (-2; 3; 3)$, $B = (1; 1; 1)$, $C = (-1; 1; 2)$.
3. $A = (1; -2; -1)$, $B = (1; 2; 0)$, $C = (1; 6; 1)$.

Exercice 22.

1. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace passant par les points A et B dans les cas suivants :
 - (a) $A_1 = (1; 1; 0)$, $B_1 = (-1; 0; 2)$.
 - (b) $A_2 = (2; 2; 3)$, $B_2 = (0; 0; 1)$.
 - (c) $A_3 = (-1; -2; -1)$, $B_3 = (1; 2; 1)$.
2. Donner une équation paramétrique de chacune de ces droites.
3. Vérifier si ces droites ont des points d'intersection.

Exercice 23. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan P dans les cas suivants :

1. $A_1 = (1; 1; 0)$, $B_1 = (-1; 2; -1)$, $P_1 : 2x + 3y + z = 0$.
2. $A_2 = (0; 0; 1)$, $B_2 = (1; 1; 1)$, $P_2 : x + y + z = 0$.
3. $A_3 = (-1; -2; 1)$, $B_3 = (1; 1; 2)$, $P_3 : x - y - z = 0$.

Exercice 24. Donner un vecteur directeur puis une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans P et P' dans les cas suivants :

- (1) $P_1 : x + y + z = 2$, $P'_1 : 2x - y + z = 1$.
- (2) $P_2 : x - 2y + 3z = -1$, $P'_2 : 3x + y + z = 0$.
- (3) $P_3 : 2x + y = 0$, $P'_3 : z = 0$.

5.1 Rédiger une preuve

Exercice 25. Soient A, B, C trois points du plan \mathcal{P} de coordonnées dans le repère R respectivement $(1; 1), (3; 1), (2; 2)$.

1. (a) Exprimer \vec{OA} et \vec{OB} en fonction de \vec{i} et de \vec{j} .
(b) Soit C tel que $\vec{OC} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, donner les coordonnées de C dans le repère R .
2. Vérifier que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires.
3. Soit D un point de coordonnées $(4; -5)$ dans le repère $R' = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$.
(a) Exprimer \vec{AD} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} .
(b) Déterminer les coordonnées de D dans le repère R .
4. Soit M un point du plan \mathcal{P} de coordonnées (m, n) dans $R' = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$. Quelles sont les coordonnées de M dans R ?
5. Considérons la droite δ d'équation cartésienne $y = x$ dans le repère R' . Tracer la droite et donner une équation cartésienne de δ dans le repère R ?
6. Donner une équation cartésienne de la droite (BC) dans le repère R puis dans le repère R' . Donner les coordonnées du point d'intersection de δ et (AB) dans les repères R et R' .

Exercice 26. Soient (d) et (d') données par les équations paramétriques suivantes :

$$(d) = \{(1 + t, 3 - t, -1 + t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$$

$$(d') = \{(3 + t, 2 - 2t, m + 2t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$$

Étudier suivant les valeurs du réel m l'intersection des droites (d) et (d') .