Feuille de TD n° 4

1 Nombres complexes : différentes écritures, représentation géométrique.

1.1 Forme algébrique, opérations, module, conjugué.

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

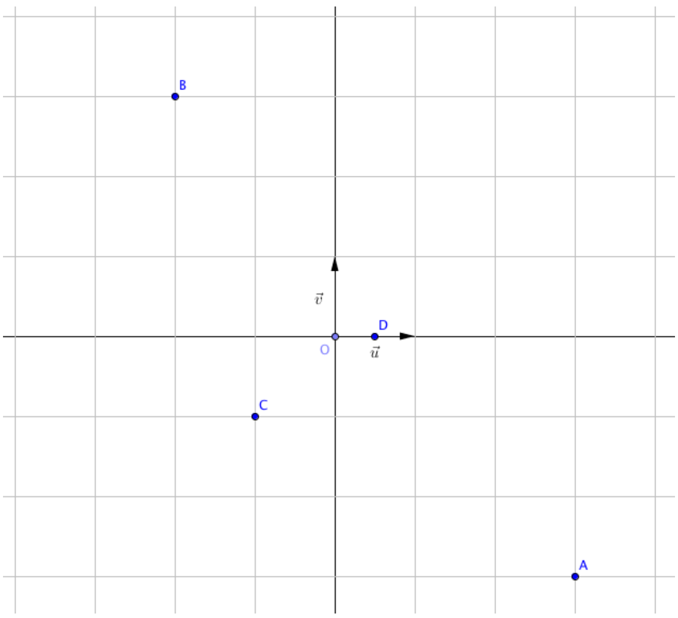
a. $(2+5i)+(i+3)$
b. $(3-2i)-(-1-i)$
c. $-2(1+3i)+5-2i-(-i+2)$
d. $(1-4i)(1+2i)+2i+8)$
e. $-3(4-i)+(3+2i)(1-i)$
f. $2+3i-(2-2i)(i-3)$
g. $(2+i)^2$
h. $(3-2i)^2+(2-i)(2+i)$
i. $-3(2+3i)^2+(i-1)(i+1)$
j. $\dfrac{2}{1-2i}$
k. $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{1}{1+2i}$
l. $\dfrac{2+i}{3-2i}$
m. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
n. $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$
o. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2+\dfrac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 2. Dans chaque cas calculer $z_1+\overline{z_2}$, $\overline{z_1}z_2$, $\overline{z_1\overline{z_2}}$, $|z_1|$, $|z_2|$:
a. $z_1=2+3i$ et $z_2=1-i$
b. $z_1=-1+2i$ et $z_2=3+i$
c. $z_1=-i+2$ et $z_2=2+i$

1.2 Affixe d'un point, d'un vecteur.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Exercice 3.
a. Donner les affixes des points A, B, C et D.
b. Placer les points E d'affixe $z_E=3+2i$, F d'affixe $z_F=-1+3i$, G d'affixe $z_G=-\frac{1}{2}-i$ et H d'affixe $z_H=2+\frac{3}{4}i$
c. Quels points se trouvent sur un même cercle de centre O ?



Exercice 4. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes

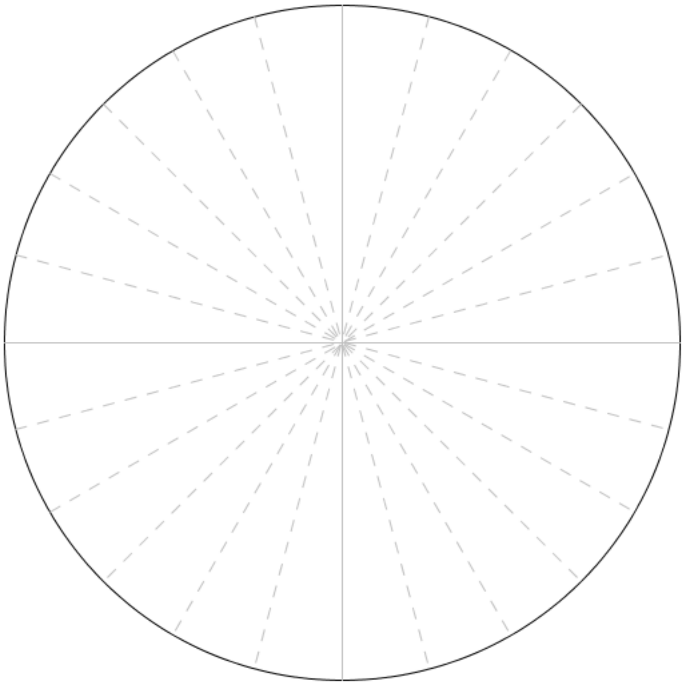
$$z_A = 1 + i,\ z_B = 4 + 2i,\ z_C = -5 - i.$$

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et montrer que A, B et C sont alignés.

1.3 Forme trigonométrique, forme exponentielle, module et argument.

Exercice 5. Pour chacun des nombres complexes donnés ci-dessous sous forme exponentielle, placer le point d'affixe ce complexe sur le cercle trigonométrique, et l'écrire sous forme algébrique :

a. $e^{i\frac{\pi}{6}}$
b. $e^{-i\frac{\pi}{3}}$
c. $e^{i\frac{3\pi}{4}}$
d. $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
e. $e^{i\frac{\pi}{2}}$
f. $e^{-i\pi}$
g. $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
h. $e^{i\frac{7\pi}{6}}$
i. $e^{i\frac{8\pi}{3}}$



Exercice 6. Écrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a. $-3\sqrt{2}$
b. $-\frac{4}{3}i$
c. πi
d. $3+3i$
e. $\sqrt{3}-i$
f. $\sqrt{2}+\sqrt{6}i$
g. $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
h. $(1-i)^8$
i. $(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)$
j. $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 7. Soient E, F et G trois points du plan complexe d'affixes

$$z_E = -2i,\ z_F = -\sqrt{3}+i,\ z_G = \sqrt{3}+i.$$

Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_F - z_E}{z_G - z_E}$ et la forme trigonométrique. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 8. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique. Écrire $\bar{z}, -z, \dfrac{1}{z}$ sous forme trigonométrique.

1.4 Rédiger une preuve.

Exercice 9.

a. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \quad e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$
b. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$, déterminez la forme exponentielle de $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ (on pourra écrire $\theta = \frac{3\theta}{2} - \frac{\theta}{2}$ et $2\theta = \frac{3\theta}{2} + \frac{\theta}{2}$)
c. Même question pour $\theta \in [\pi, 3\pi]$

Exercice 10. Calculer le module et l'argument de $u = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et de $v = 1 - i$.

En déduire le module et l'argument de $\dfrac{u}{v}$ puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe différent de -2 et $Z = \dfrac{z+3i}{z+2}$.

a. Exprimer Z sous forme algébrique.
b. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant Z est imaginaire pur.

2 Résolution des équations du second degré.

2.1 Racines carrées complexes.

Exercice 12. Donner les racines carrées complexes des nombres suivants sous forme algébrique :

a. $3 + 4i$
b. $4i$
c. $i - 2$

Exercice 13. Donner les racines carrées complexes des nombres suivants sous forme exponentielle :

a. $2e^{i\frac{2\pi}{5}}$
b. $-25i$
c. $-1 + i\sqrt{3}$

2.2 Résolution des équations du second degré à coefficients réels (solutions réelles ou complexes).

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 + 4z + 5 = 0$
b. $z^2 - 2z - 15 = 0$
c. $z^2 - 2z + 2 = 0$
d. $2z^2 + 5z + 1 = 0$
e. $-2z^2 + 2z - \frac{1}{2} = 0$
f. $2z^2 - 5z + 4 = 0$

2.3 Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 + 2z + 1 + i = 0$
b. $(2 + i)z^2 - (1 - i)z - \frac{1}{2} = 0$
c. $2z^2 + 3z + 5i = 0$
d. $z^2 - iz + 2 = 0$
e. $z^2 - 3z + 3 + i = 0$
f. $(3 - i)z^2 + (4i - 2)z - 8i + 4 = 0$
g. $z(z - i) = iz + 2$

2.4 Rédiger une preuve.

Exercice 16.

a. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique et exponentielle.
b. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
c. En utilisant la même méthode, calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$

3 Puissances entières, formule du binôme. Formules trigonométriques.

3.1 Puissances entières, formule du binôme.

Exercice 18.
a. Faire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
b. Développer $(1+2i)^4$ et $(2-i)^3$.

Exercice 19. Calculer :

a. $(2+3i)^3$
b. $(1-2i)^4$
c. $\left(\frac{1+i}{2}\right)^8$
d. $(1+i\sqrt{3})^{2000}$

Exercice 20. Calculer :

a. $(1+i)^2+(1-i)^2$
b. $(1+i)^3+(1-i)^3$
c. $(1+i)^4+(1-i)^4$
d. $(1+i)^5+(1-i)^5$

e. Le tableau suivant donne les coefficients binomiaux pour $n = 10$:

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Calculer $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$

3.2 Formules trigonométriques.

Exercice 21. Soit $a \in]0, \pi[$, écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
a. $z_1 = 1 + e^{ia}$
b. $z_2 = 1 - e^{ia}$

Exercice 22. Exprimer en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

a. $\cos(3\alpha)$
b. $\sin(3\alpha)$
c. $\cos(4\alpha)$
d. $\sin(5\alpha)$

Exercice 23. Soit α un nombre réel. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

a. $\cos^4\alpha$ b. $\sin^4\alpha$ c. $\sin\alpha\cos^3\alpha$

3.3 Rédiger une preuve.

Exercice 24. Résoudre les équations trigonométriques suivantes (pour c. et d., on pourra s'aider des formules de duplication, c'est-à-dire des formules donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$) :

a. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$
b. $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$
c. $2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 1$
d. $\sin(\frac{x}{3})\cos(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}$

Exercice 25. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

4 Fonctions polynômiales.

4.1 Opérations et degré.

Exercice 26.

On donne les polynômes suivants : $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$, $Q(x) = 4x - 1$, $R(x) = -x^2 - x + 2$.
Écrire sous forme développée et réduite les polynômes $P(x) \times Q(x)$, $P(x) \times R(x)$, $2P(x) - 3R(x)$, $P(x) - 2Q(x) \times R(x)$

Exercice 27.

Soient P et Q les fonctions polynômiales sur $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = iz^3 + z^2 - 5z - 1 \text{ et } Q(z) = (iz - 4)^3$$

Donner le degré des fonctions polynômiales $P, Q, P + Q, 2P + 3Q, PQ$.

4.2 Racines et factorisation.

Exercice 28. Factoriser les polynômes du second degré suivants dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

a. $2x^2 + 2x - 4$
b. $-2x^2 - 2$
c. $-3x^2 - 15x - 18$
d. $4x^2 - 8x + 4$
e. $3x^2 + 3x + 6$

Exercice 29. Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

a. $x^3 - 3x^2 + 7x - 5$
b. $x^4 - 1$
c. $x^3 + 1$
d. $x^3 - 8$
e. $x^3 + x^2 + x$

Exercice 30. Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$:

a. $x^2 + (3i - 1)x - 2 - i$
b. $x^3 + (4 + i)x^2 + (5 - 2i)x + 2 - 3i$ (on trouvera d'abord une racine évidente)

Exercice 31.

Déterminer une fonction polynômiale P à coefficients réels qui s'annule en 2, en $3 - i$ et en i. Cette fonction est-elle unique ?

Exercice 32.

Le but de l'exercice est de factoriser le polynôme $z^6 + 1$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$:

a. Nous allons d'abord factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}$:
   1. Montrer que résoudre $z^6 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ revient à résoudre $e^{i6\theta} = -1$ dans $\mathbb{R}$, et donner les solutions de cette dernière équation.
   2. En déduire les 6 racines complexes de $z^6 + 1$, et la factorisation de $z^6 + 1$ dans $\mathbb{C}$.

b. À partir de la factorisation dans $\mathbb{C}$, trouver la factorisation dans $\mathbb{R}$.

4.3 Rédiger une preuve.

Exercice 33.

a. Trouver la fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1 \qquad P(1) = 0 \qquad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

b. Déterminer toutes les fonctions polynômiales P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$P(0) = 1 \qquad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2.$$

Exercice 34. Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$, et soit P la fonction polynômiale donnée par :
pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x) = x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$.
Démontrer que 1 est racine de P. Quel est son ordre de multiplicité ?

Exercice 35.

a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}, z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$
b. En reprenant la démarche de l'exercice 31, factoriser $z^5 - 1$ dans $\mathbb{C}$.
c. En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
d. Déduire de la factorisation dans $\mathbb{R}$ la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.