

Feuille de TD n° 3

1 Rappels sur les nombres entiers, divisibilité, PGCD.

1.1 Exercices de révision : multiples, diviseurs, nombres premiers

Exercice 1. Compléter avec les mots *multiple*, *diviseur*, ou avec un entier qui convient :

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. 24 est un de 6 | d. 3 est un de 1 | g. est un diviseur de 21 |
| b. 3 est un de 12 | e. 2 est un diviseur de | h. 35 est un de 5 |
| c. 42 est un multiple de | f. 5 est un de 5 | i. est un multiple de 24 |

Exercice 2. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 50.

1.2 pgcd de deux entiers

Exercice 3. Pour chacun des couples d'entiers ci-dessous, donner la liste de leurs diviseurs communs et en déduire leur pgcd.

- | | |
|-------------|-------------|
| a. 12 et 18 | c. 30 et 75 |
| b. 42 et 24 | d. 25 et 32 |

Exercice 4. Déterminer le pgcd des couples d'entiers ci-dessous

- | | |
|---------------|---------------|
| a. 180 et 378 | c. 882 et 21 |
| b. 600 et 264 | d. 175 et 396 |

1.3 Valeur absolue et distance

Exercice 5.

- a. Résoudre l'équation $|x + 2| = 3$.
- b. Décrire l'ensemble des réels x tels que $|x + 4| < |x - 2|$.

Exercice 6. Compléter quand c'est possible pour obtenir sur une même ligne des propositions équivalentes :

Sous forme d'intervalle	Avec des inégalités	Avec la valeur absolue
$x \in [3, 11]$ $x \in [3, +\infty] \cap [-\infty, 11]$	$3 \leq x \leq 11$ $3 \leq x$ et $x \leq 11$	$ x - 7 \leq 4$
$x \in]2, 7[$ $x \in]-\infty, 7[\cap]2, +\infty[$		
		$ x + 3 \leq 5$
	$-7 < x < -3$ $-7 < x$ et $x < -3$	
$x \in]-\infty, 3]$		
	$x < 3$ ou $x > 12$	
		$ x - 2 \geq 4$
	$x > 1$	
$x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$		

1.4 Rédiger une preuve

Exercice 7. Soit a un entier.

- a. Montrer que la somme de deux multiples de a est un multiple de a .
- b. Montrer que la somme de deux diviseurs de a n'est pas forcément un diviseur de a .

Exercice 8. On considère l'énoncé $\forall n \in \mathbb{N} \quad (p \text{ divise } n \Rightarrow 2 \text{ divise } n)$

- a. Cet énoncé est-il vrai ou faux pour $p = 1, p = 2, p = 3, p = 4$?
- b. Quels sont les entiers naturels p pour lesquels l'énoncé est vrai?

Exercice 9. Soit n un entier naturel. Établir les égalités :

a.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Rappel : on en déduit la somme des termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :
 $S_n = n \times u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$

b.

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c. Soit q un réel $\neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Rappel : on en déduit la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 :
 $S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Exercice 10. Pour tout nombre entier naturel n , soit la propriété P_n donnée par :

$$P_n : n^2 > n + 4.$$

- La propriété P_n est-elle vraie quel que soit l'entier n ?
- Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie quel que soit le nombre entier naturel n .
- Donner un entier n_0 pour lequel la propriété suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \implies P_n)$$

2 Carrés, racines carrées, puissances entières et fractionnaires positive et négatives.

2.1 Exercices de révision : carrés, racines carrées, équation du second degré

Exercice 11. Calculer lorsque c'est possible :

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| a. $6^2 = \dots\dots$ | d. $-\sqrt{9} = \dots\dots$ | g. $\sqrt{-16} = \dots\dots$ |
| b. $\sqrt{25} = \dots\dots$ | e. $\sqrt{8^2} = \dots\dots$ | h. $\sqrt{-3^2} = \dots\dots$ |
| c. $(-3)^2 = \dots\dots$ | f. $-7^2 = \dots\dots$ | i. $\sqrt{(-5)^2} = \dots\dots$ |

Exercice 12. Simplifier lorsque c'est possible :

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| a. $\sqrt{50} = \dots\dots$ | c. $\sqrt{x^2} = \dots\dots$ | e. $\sqrt{x^4} = \dots\dots$ |
| b. $\sqrt{27} = \dots\dots$ | d. $\sqrt{x^2 + 4} = \dots\dots$ | f. $-\sqrt{72a^2} = \dots\dots$ |

Exercice 13. Déterminer la ou les solution(s) des équations suivantes si elles existent :

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| a. $x^2 + x - 2 = 0$ | c. $3x^2 + 2x + 4 = 0$ |
| b. $2x^2 - 4x - 10 = 20$ | d. $x^2 - 4x + 4 = 3$ |

2.2 Puissances

Exercice 14. On rappelle que :

$$5^2 = 25 \quad 5^3 = 125 \quad 5^4 = 625 \quad 5^5 = 3125$$

$$\frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{1}{25} = 0,04 \quad \frac{1}{125} = 0,008 \quad \frac{1}{625} = 0,0016$$

Calculer :

- | | | |
|--------------------------------------|---|---|
| a. $5^{-2} = \dots\dots$ | d. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \dots\dots$ | g. $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \dots\dots$ |
| b. $3125^{\frac{3}{5}} = \dots\dots$ | e. $5^{-2} \times 5^7 = \dots\dots$ | h. $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \dots\dots$ |
| c. $625^{-\frac{1}{4}} = \dots\dots$ | f. $\frac{5^3}{5^4} = \dots\dots$ | |

2.3 Rédiger une preuve

Exercice 15. Soit m un nombre réel. On considère le polynôme $p(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1)$

- Pour quelles valeurs de m l'équation $p(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Pour chaque valeur déterminée, calculez alors la solution de l'équation.
- Pour quelles valeurs de m l'équation $p(x) = 0$ a-t-elle exactement deux solutions ?
- Pour quelles valeurs de m a-t-on « pour tout réel x , $p(x) < 0$ » ?

Exercice 16.

- Montrer que 0 n'a pas d'inverse dans \mathbb{R} .
- Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

3 Fonctions puissances

3.1 Exercice de révision : reconnaître une parabole

Exercice 17. Identifier les fonctions ci-dessous à l'aide de leurs représentations graphiques :

1. $x \mapsto -x^2 - 1$

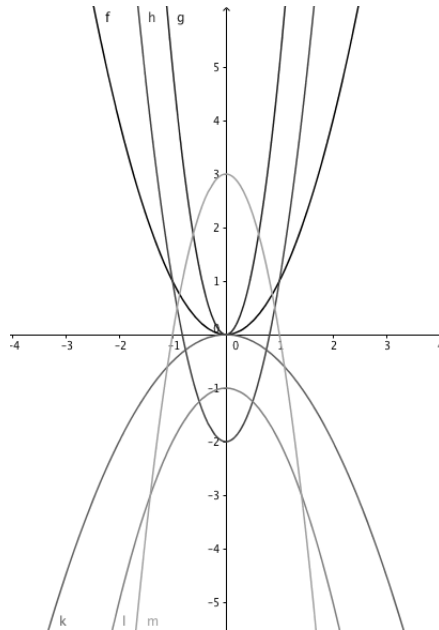
3. $x \mapsto -3x^2 + 3$

5. $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$

2. $x \mapsto 5x^2$

4. $x \mapsto x^2$

6. $x \mapsto 3x^2 - 2$



3.2 Représentations graphiques des fonctions puissances

Exercice 18. Voir page suivante.

3.3 Rédiger une preuve

Exercice 19. Pour $a > 0$ on définit $a^x = e^{x \ln(a)}$ pour tout réel x .

- a. A l'aide des variations connues des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$, étudier les variations de la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ en fonction des valeurs de a .

La fonction \exp_a s'appelle la fonction exponentielle en base a .

- b. Supposons $a \neq 1$. Montrer que la fonction $\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ vérifie

$$\log_a(\exp_a(x)) = x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

et

$$\exp_a(\log_a(x)) = x, \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

En déduire les variations de la fonction \log_a en fonction des valeurs de a .

La fonction \log_a s'appelle la fonction logarithmique en base a .

- c. Sur un même graphe, tracer approximativement en fonction des valeurs de a les courbes représentatives des fonctions \exp_a et \log_a .

Exercice 16. Identifier à quelle fonction puissance correspond chaque représentation graphique :

a. $x \mapsto x^{-\sqrt{2}}$

c. $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$

e. $x \mapsto x^4$

g. $x \mapsto x^{\sqrt{5}}$

i. $x \mapsto x^{-2}$

b. $x \mapsto x^3$

d. $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$

f. $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$

h. $x \mapsto \sqrt{x}$

j. $x \mapsto x^{-\frac{27}{4}}$

