

Feuille de TD n° 2

1 Premières propriétés des fonctions

1.1 Exercices de révision : domaine de définition et image des fonctions usuelles

Exercice 1. Compléter le tableau suivant :

Nom de la fonction	Notation	La fonction est définie sur :	Valeurs prises par la fonction :
Carré	$x \mapsto x^2$	\mathbb{R}	$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$
Racine carrée			
Fonction affine de coefficient directeur 2 et d'ordonnée à l'origine -7			
Inverse			
Exponentielle			
Logarithme népérien			
Sinus			
Cosinus			

Exercice 2. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 1 par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^2 - 3x + 4$

c. $f(x) = \cos^2(x)$

b. $f(x) = e^x - 4e^{-x} + 4$

d. $f(x) = \frac{x+2}{2x-5}$

1.2 Domaines de définition et images de fonctions composées

Exercice 3. Écrire chacune des fonctions ci-dessous comme composée de fonctions usuelles et donner son ensemble de définition. Préciser les fonctions qui sont paires, impaires, périodiques.

a. $\sqrt{\ln(x)}$

c. e^{3x^2-2x+5}

b. $\frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)+1}}$

d. $\frac{1}{1-\cos(x)}$

Exercice 4. Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de \mathbb{R} par f dans les cas suivants :

a. $f(x) = \cos(x) + 2$

c. $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d. $f(x) = e^{(x^2-1)}$

1.3 Composées de fonctions

Exercice 5. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants et vérifier que $f \circ g \neq g \circ f$. Préciser les fonctions qui sont paires, impaires, périodiques.

a. $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

c. $f(x) = \cos(x), g(x) = e^x$

b. $f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 4$

d. $f(x) = |x|, g(x) = x + 1$

1.4 Image directe, image réciproque d'un ensemble

Exercice 6.

a. Notons f la fonction carré.

Déterminer $f([1, 1]), f(\mathbb{R}), f(\mathbb{R}_+), f(\mathbb{R}_-), f([0, 3]), f^{-1}(\{1\})$.

Puis comparer $f([-2, 0] \cap [0, 2])$ et $f([-2, 0]) \cap f([0, 2])$.

b. Notons g la fonction sinus.

Déterminer $g([0, 2\pi]), g(\mathbb{R}), g([0, 10]), g([0, \frac{\pi}{2}]), g^{-1}([0, 1])$.

1.5 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 7. Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{0, 1\}$. Donner toutes les applications de A dans B puis de B dans A en précisant celles qui sont injectives ou surjectives.

Exercice 8. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$

b. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = y - x^2$

Exercice 9. Soient f et g les fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ définies par :

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x + 1$

— Pour tout $x \in [0, 1] \quad g(x) = 0$ et pour tout $x \in]1, +\infty[\quad g(x) = x - 1$

a. Montrer que f est injective mais non surjective.

b. Etudier l'injectivité et la surjectivité de g .

c. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$

Exercice 10. Dire parmi les fonctions suivantes celles qui sont bijectives.

a. $[-1, 1] \rightarrow [-1, 0], x \mapsto x^2 - 1$

b. $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\ln(x)|$

c. $]0, 1] \rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto |\ln(x)|$

Exercice 11. Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- a. $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 8 - 1, 24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.
- b. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = -n$
- c. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$
- d. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n - 1$
- e. $f : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$ qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Pour chacune des applications (si elles sont bien définies) calculer

$$f(\{2\}), \quad f(\{0, 2\}), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(\{-1, 1\}).$$

1.6 Manipuler le langage mathématique

Exercice 12. Reformuler les propositions ci-dessous en exhibant les quantificateurs et les connecteurs :

- a. La fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle I .
- b. La fonction f est nulle sur l'intervalle I .
- c. Les fonctions f et g sont égales sur l'intervalle I .
- d. Les fonctions f et g ne sont pas égales sur I .
- e. 2 est un maximum de la fonction f sur l'intervalle I .
- f. Sur l'intervalle I , la fonction f admet un maximum en 2.

Exercice 13. Reformuler les propositions ci-dessous sans les quantificateurs et sans les connecteurs :

- a. $\forall x \in I \quad f(x) > 0$.
- b. $\forall a \in I, \forall b \in I \quad (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$.
- c. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M$.
- d. Il existe un réel a tel que il existe un réel $t \in I$ tel que $a = f(t)$
et tel que pour tout réel $x \in I \quad f(x) \leq a$.
- e. $\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R} \quad (x_1 \neq x_2) \text{ ET } f(x_1) = f(x_2) = 2$

1.7 Rédiger une preuve

Exercice 14.

- a. Montrer que la somme de deux fonctions paires est paire.
- b. Quelle est la parité du produit de deux fonctions paires ? De deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

Exercice 15. Soit $k \in \mathbb{R}$. Si f est définie sur \mathbb{R} et périodique de période T , que peut-on dire de la fonction $x \mapsto f(kx)$?

Exercice 16. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

- a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} injective mais non monotone.

Exercice 18. L'application

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 19. Soit f une application de E vers F .
Soient A et A' des parties de E . Soient B et B' des parties de F .
Montrer que :

- a. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
- b. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$
- c. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- d. $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$
- e. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- f. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$