Logique et Ensembles, en plus du TD

1 Paradoxe de Russel

Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi il ne peut pas exister d'ensemble de tous les ensembles. C'est une histoire qui remonte au 20ème siècle et qui a donné beaucoup de fil à retordre aux logiciens.
Supposons qu'il existe un ensemble Ω qui contienne tous les ensembles que l'on peut définir en mathématique. Considérons alors l'ensemble :

$$E = \{x \in \Omega \mid x \notin x\}.$$

Est-ce que E appartient à E ? Aboutir à une contradiction.
On trouve parfois des formes moins abstraites de ce paradoxe : par exemple, le barbier qui coiffe tous les gens qui ne se coiffent pas eux-même se coiffe-t-il lui même ?

2 Ensemble des parties

Soit E un ensemble. Une partie de E (ou sous-ensemble de E) est un ensemble A tel que $A \subset E$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
1. Lister les éléments de $\mathcal{P}(\{1,2\})$.
2. Qu'est-ce que $\mathcal{P}(\emptyset)$?
3. Expliquer pourquoi, si E est fini et possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et possède 2^n éléments.

3 Théorème diagonal de Cantor

Soit E un ensemble. On va montrer que $\mathcal{P}(E)$ est toujours un ensemble *strictement plus gros* que E, au sens où il n'existe pas d'application $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ qui soit surjective.
On suppose donc qu'il existe une telle application f, et on pose :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

En utilisant la surjectivité de f, aboutir à une contradiction.

Ceci permet par exemple de montrer qu'il y a strictement plus de réels que d'entiers naturels.

4 Théorème du point fixe de Knaster-Tarski

Soit E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante, au sens où $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On va montrer qu'il existe $S \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(S) = S$, autrement dit f possède un point fixe.
On considère pour cela l'ensemble :

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq f(X)\}.$$

On pose :

$$S = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$$

la réunion des parties X de E qui vérifient $X \subseteq f(X)$.
1. Vérifier que si $X \in \mathcal{F}$, alors $f(X) \in \mathcal{F}$.
2. Vérifier ensuite que pour tout $X \in \mathcal{F}$, on a $X \subseteq f(S)$ et en déduire que $S \subseteq f(S)$.
3. En déduire que $S \in \mathcal{F}$ et que $f(S) = S$.

5 La taille des ensembles

Il est facile de mesurer la taille d'un ensemble fini : c'est simplement le nombre d'éléments de l'ensemble en question. Mais comment décider, entre deux ensembles infinis, lequel est plus gros que l'autre ?
On définit pour cela la notion suivante : on dit qu'un ensemble E est de cardinal plus petit ou égal qu'un ensemble F, ce que l'on note $E \preceq F$, si il existe une application *injective* de E vers F. On dit que E et F sont *équipotents* (i.e. de même taille) si $E \preceq F$ et $F \preceq E$. On note alors $E \simeq F$.
1. Montrer que $\{0, 1\} \preceq \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Expliquer pourquoi, si E et F sont finis, $E \preceq F$ équivaut à $|E| \leq |F|$, avec $|E|$ le nombre d'éléments de E. En déduire que $E \simeq F \iff |E| = |F|$.

3. Soient E et F deux ensembles non-vides. Montrer que $E \preceq F$ si et seulement si il existe une surjection de F vers E. On pourra chercher "axiome du choix" sur internet si ça ne semble pas clair. En déduire, grâce au théorème diagonal de Cantor, qu'on a toujours :

$$E \prec \mathcal{P}(E)$$

au sens où $E \preceq \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(E) \npreceq E$.

4. Montrer que la relation $\preceq$ est réflexive, au sens où $E \preceq E$ pour tout ensemble E.

5. Montrer que la relation $\preceq$ est transitive, au sens où, si E, F et G sont trois ensembles et que $E \preceq F$ et $F \preceq G$, alors $E \preceq G$.

6. L'objet de cette question est de donner une caractérisation différente de l'équipotence. On va montrer que deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement si il existe une application bijective de E vers F (ce qui correspond bien à l'idée d'avoir la même taille). C'est un théorème profond de **Cantor et Bernstein**.

On note provisoirement $E \sim F$ s'il existe une application bijective $f : E \longrightarrow F$.
6.a. Montrer que $\sim$ vérifie les propriétés suivantes pour tous E, F, G des ensembles : $E \sim E$, $E \sim F \iff F \sim E$, et $(E \sim F) \wedge (F \sim G) \implies E \sim G$. On dit que $\sim$ est une relation *d'équivalence*. 6.a. Montrer que si $E \sim F$, alors $E \simeq F$.
Le but de la suite est de montrer la réciproque.

6.b. On suppose $E \simeq F$ et on se donne donc deux applications injectives $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$. On pose alors :

$$\varphi(X) = E \setminus g(F \setminus f(X))$$

pour $X \in \mathcal{P}(E)$ ce qui définit une application $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Montrer que φ est croissante, au sens où $X \subseteq Y \implies \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$ pour toutes parties X, Y de E.
6.c. À l'aide de l'exercice précédent, en déduire qu'il existe $S \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\varphi(S) = S$.

6.d. On définit alors une application $h : E \longrightarrow F$ de la façon suivante : pour $x \in E$, ou bien $x \in S$ auquel cas on pose $h(x) = f(x)$, ou bien $x \notin S$, auquel cas $x \in g(F \setminus f(S))$ donc, puisque g est injective, il existe un unique élément $h(x) \in F \setminus f(S)$ tel que $g(h(x)) = x$.
Expliquer pourquoi h est bien une bijection de E vers F et conclure.

6 Dénombrabilité

On dit qu'en ensemble E est *dénombrable* si $E \preceq \mathbb{N}$ dans les notations de l'exercice précédent. Par exemple, les ensembles finis et $\mathbb{N}$ sont dénombrables, mais à cause de l'argument diagonal de Cantor, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne l'est pas.

1. Expliquer pourquoi, si E est dénombrable et si $F \preceq E$, alors F est aussi dénombrable.
2. On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

définie par $f(m, n) = 2^m 3^n$. Montrer que f est injective et en déduire que $\mathbb{N}^2 \preceq \mathbb{N}$, puis, grâce à l'exercice précédent, que $\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$.
3. Vérifier, grâce à l'exercice précédent, que si E est un ensemble dénombrable infini, alors $E \simeq \mathbb{N}$.
4. Soit $(E_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ensembles dénombrables. Montrer que l'ensemble :

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

est dénombrable. Le slogan a retenir est le suivant : une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.