Feuille de TD n° 1

1 Logique

Exercice 1. Soient p, q des propositions. On considère l'implication $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$:

a. Quelle est sa réciproque ?

b. Quelle est sa contraposée?

c. Écrire la table de vérité de cette formule.

Exercice 2. Soient a, b et c des propositions.
Montrez que $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ est équivalente à $(a \wedge b) \Rightarrow c$.

Exercice 3. Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :
(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)=0 \\ (x-2)(y-3)=0 \end{cases}$$

Exercice 4. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

a. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$

b. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$

c. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$

d. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$

Exercice 5. Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel).

a. Si le père Noël existe, alors Noël est en août.

b. Si $x > 4$ alors $x + 2 > 6$

c. Si $n \geq 2$ alors $n^2 \geq n$

2 Vocabulaire des ensembles

2.1 Exercices de révision : intersection, réunion, appartenance, inclusion

Exercice 6. Déterminer les ensembles suivants :

a. $\{2, 3, 7, 9, 12\} \cap \{1, 2, 7, 8, 11, 12, 15\} =$ ....

b. $\{1, 2, 7\} \cup \{2, 3, 5, 8, 9\} =$ ....

c. $\mathbb{N} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\} =$ ....

d. $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \cap \mathbb{Z} =$ ....

Exercice 7. Compléter avec les symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a. $0 \ldots [0,1]$

b. $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}$

c. $\{0,1\} \ldots [0,1]$

d. $3 \ldots \mathbb{Z} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

e. $\{2,4,6\} \ldots \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 10\}$

f. $[0, \frac{1}{2}[\ldots [0,1] \cup [3,4]$

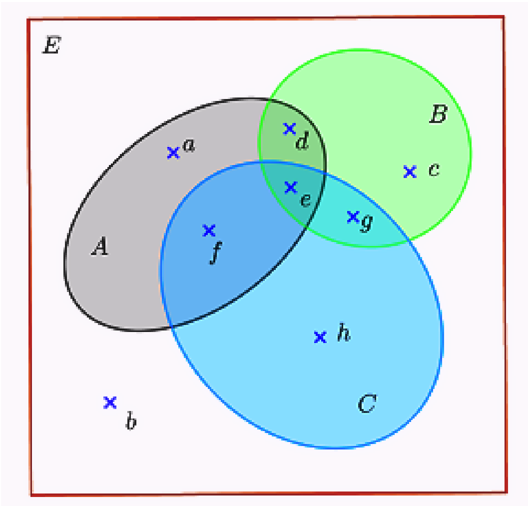
g. $3 \ldots [0,1] \cup \{3\}$

h. $\frac{1}{2} \ldots \{0,1\} \cup [3,4]$

i. $\mathbb{Z} \ldots \{t \in \mathbb{Q} \mid t+3 \leq 0\}$

2.2 Langage des ensembles

Exercice 8. On considère le diagramme suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des éléments de E.



Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses(*) :

a. $\{a, f, d\} \subset A \cup C$ ☐ Vrai ☐ Faux

b. $\{e\} \subset A \cap B \cap C$ ☐ Vrai ☐ Faux

c. $c \in A \cap B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux

d. $g \in A^c \cap B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux

e. $g \in A^c \cup B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux

f. $\{h, b\} \subset A^c \cap B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux

g. $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \subset C \cup C^c$ ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 9. Dans cet exercice A, B, C désignent des parties d'un ensemble E. Reformuler les énoncés suivants par des propriétés de leurs éléments. Par exemple, pour $A = B$, on écrirait :

$$A = B \iff \big(\forall x \in E \quad (x \in A \iff x \in B)\big)$$

a. $A \subset B$

b. $A \not\subset B$

c. $A \subset B^c$

d. $A = B \cap C$

e. $A \neq B$

Exercice 10.

a. Soit $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3\}$ et $C = \{1,4\}$. Expliciter les produits cartésiens $A \times B$ et $C \times A$.

b. Dessiner les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $A = [0,2] \times [0,2]$, $B = [1,4] \times [1,3]$, $A \cap B$, $C = \{1\} \times [1,2]$, $D = [1,2] \times \{1\}$

(b) $\{M(x,y) \mid 2x + 3y - 5 = 0\}$

(c) $\{M(x,y) \mid 2x + y \leq 1 \text{ et } -2 \leq x \leq 3 \text{ et } -1 \leq y \leq 3\}$

(d) $\{M(x,y) \mid (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4\}$

(e) $\{M(x,y) \mid x^2 + y^2 = 5 \text{ et } y \geq 0\}$

Exercice 11. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.

a. En utilisant les symboles $\in, \subset$ que peut-on écrire entre :
1) a et E, 2) $\emptyset$ et E, 3) $\{a\}$ et E, 4) $\{a, b\}$ et E?

b. Donner $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

c. Donner $\{a\} \times E$, $E \times \{a\}$ et $E \times E$.

Exercice 12. Identifier les ensembles suivants et démontrer les égalités d'ensembles proposées :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}]-i;+i[, \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{i};+\frac{1}{i}[$$

2.3 Manipuler le langage mathématique

Exercice 13. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

a. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$

b. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

d. Il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $x > 0$

Exercice 14. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (justifier votre réponse):

a. Pour tout réel $x > 0$, $x \geq 1$ OU $\dfrac{1}{x} \geq 1$.

b. Il existe un entier n tel que 6 divise n ET 3 ne divise pas n.

c. Pour tout réel x non nul, si $x \leq \dfrac{1}{x}$ alors $x^2 \leq x$.

d. Pour tout réel x strictement positif, si $x \leq \dfrac{1}{x}$ alors $x^2 \leq x$.

Exercice 15. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse. Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

a. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ (x = |x| \text{ ou } x = -|x|\,)$.

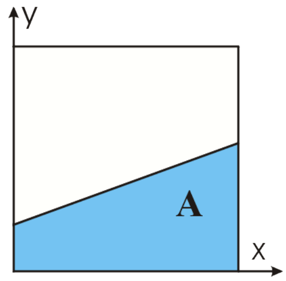
b. $(\forall x \in \mathbb{R}\ x = |x|\,)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}\ x = -|x|\,)$.

c. $\exists x \in \mathbb{Z}\ \ \forall y \in \mathbb{Z}\ \ y - x + x^2 < 0$.

d. $\exists y \in \mathbb{Z}\ \ \forall x \in \mathbb{Z}\ \ y - x + x^2 > 0$.

Exercice 16. On se place dans le carré $\mathcal{C} = [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$.

Indiquer si les énoncés (a), (b), (c) ou (d) sont vrais ou faux - l'ensemble A étant le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ suggéré par le dessin.



a. $\forall x \quad \exists y \quad (x, y) \in A$.

b. $\forall y \quad \exists x \quad (x, y) \in A$.

c. $\exists y \quad \forall x \quad (x, y) \in A$.

d. $\exists x \quad \forall y \quad (x, y) \in A$.

2.4 Rédiger une preuve

Exercice 17. Soit a un nombre réel. On cherche à démontrer l'équivalence suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad |a| < \varepsilon) \Leftrightarrow a = 0$$

a. Expliquer pourquoi l'implication $a = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad |a| < \varepsilon)$ est vraie.

b. 1. Parmi les implications suivantes, laquelle est la contraposée de l'implication $(\forall \varepsilon > 0 \quad |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$:
   A. $a \neq 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad |a| \geq \varepsilon)$
   B. $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 \quad |a| \geq \varepsilon)$
   C. $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon \leq 0 \quad |a| \geq \varepsilon)$
   D. $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 \quad |a| < \varepsilon)$
   2. Démontrer cette implication en passant par cette contraposée.

Exercice 18. Étant données A et B deux parties de E, montrer que :

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B$$

Exercice 19.

a. Soient $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ et $C = \{0, 1, 2\}$.
Calculer $(A \times B) \cap (C \times B)$ et $(A \cap C) \times B$.

b. Soient E, F, G trois ensembles.
Montrer que $(E \times G) \cap (F \times G) = (E \cap F) \times G$.