Fibrés en droites et cohomologie des variétés projectives

Louis Mallet-Burgues

Table des matières

1 Définitions

Soit X un schéma. Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ est localement libre si pour tout point $x \in X$, il existe un ouvert U de X contenant x *trivialisant* le faisceau $\mathcal{F}$, au sens où $\mathcal{F}_{|U}$ est libre de type fini. Un faisceau localement libre est aussi appelé fibré vectoriel (en réalité ce sont deux choses différentes mais il y a une équivalence de catégories entre les deux notions donc nous les identifierons ici).
Il est clair qu'un fibré vectoriel est un faisceau cohérent.

Définition 1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $x \in X$. On définit le rang de $\mathcal{F}$ en x, noté $\mathrm{rg}_x(\mathcal{F})$ comme la dimension du $k(x)$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F} \otimes k(x)$.

Proposition 2. Soit X un schéma et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout n, l'ensemble $\{x \in X \mid \mathrm{rg}_x(\mathcal{F}) \leq n\}$ est ouvert (on parle de semi-continuité).
De plus, si X est rédiuit, $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel si et seulement si l'application $\mathrm{rg}_\bullet(\mathcal{F})$ est localement constante. Si elle est constante égale à r, on dit que $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel de rang r.
Enfin, si X est intègre, et que η est le point générique de X, on définit le *rang générique* de $\mathcal{F}$ par $\mathrm{rg}_\eta(\mathcal{F})$, c'est le minimum de la fonction $\mathrm{rg}_\bullet(\mathcal{F})$ et il est atteint sur un ouvert dense sur lequel $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel.

Démonstration. Soit $x \in X$, notons $r = \mathrm{rg}_x(\mathcal{F})$. On dispose de $s_1, \dots, s_r$ définies sur un ouvert U contenant x qui engendrent $\mathcal{F} \otimes k(x)$. Par le lemme de Nakayama, puisque $\mathcal{F}$ est cohérent, on a aussi :

$$\mathcal{F}_x = \mathrm{Vect}_{\mathcal{O}_x}(s_1, \dots, s_r)$$

Ainsi le faisceau de type fini sur U, $C = \mathcal{F}_{|U}/(s_1, \dots, s_r)$ a une germe nulle en x donc est nul localement car il est de type fini. On en déduit que localement $\mathcal{F}$ est engendré par les s_i et donc localement $\mathrm{rg}_y(\mathcal{F}) \leq r$.
Il est clair que si $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel, l'ensemble $\{x \in X \mid \mathrm{rg}_x(\mathcal{F}) = n\}$ est ouvert et fermé pour tout n et donc que l'application rang est localement constante.
Supposons maintenant que l'application rang est localement constante et que X est réduit et montrons que $\mathcal{F}$ est localement libre. Soit $x \in X$. L'énoncé est local donc on peut supposer que le rang vaut constamment r. En raisonnant comme ci-dessus, on a un morphisme (quitte à réduire l'ouvert sur lequel on travaille) :

$$f : \mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{F}$$

qui vérifie que $f \otimes k(x)$ est un isomorphisme de $k(x)$-espaces vectoriels. Encore par Nakayama et quitte à réduire l'ouvert, on peut supposer f surjectif. Il reste à voir que f est injectif, or pout tout $y \in X$, on a que $f \otimes k(y)$ est surjectif et est injectif pour cause de dimension.
Ainsi, en posant $K = \mathrm{Ker}(f)$, on obtient :

$$K_y \subseteq \mathfrak{m}_y \times \cdots \times \mathfrak{m}_y \subseteq \mathcal{O}_y^r$$

avec $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_y$. Ainsi, pour tout $g = (g_1, \dots, g_r)$ une section de K sur un ouvert, les g_i s'annule en tout point d'un schéma réduit donc sont nulles et $g = 0$. Ainsi $K = 0$.
Supposons enfin X intègre de point générique η. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{y \in X \mid \mathrm{rg}_y(\mathcal{F}) \leq \mathrm{rg}_x(\mathcal{F})\}$ est un ouvert non vide donc il contient η car η est dense. Ceci montre que le rang générique est minimal.
Enfin, l'ensemble $\{y \in X \mid \mathrm{rg}_y(\mathcal{F}) \leq \mathrm{rg}_\eta(\mathcal{F})\}$ est un ouvert contenant η donc dense. Par le point précédent, $\mathcal{F}$ étant de rang constant sur cet ouvert, c'est un fibré vectoriel. □

Il est clair que la classe des fibrés vectoriels sur X est stable par produit tensoriel, par $\underline{\mathrm{Hom}}$, par dualité, par somme directe et par puissance extérieure (c'est vrai pour les modules libres).
Les fibrés vectoriels de rang 1, appelés *fibrés en droites* forment un groupe abélien (lorsqu'on les regarde à isomorphisme près) pour le produit tensoriel, et ce groupe est noté :

$$\mathrm{Pic}(X).$$

C'est le groupe de *Picard* de X, dont le neutre est $\mathcal{O}_X$, et l'inversion est donnée par la dualité. La donnée d'un fibré en droites équivaut à la donnée d'un $\mathcal{O}_X^\times$-torseur donc on a :

$$\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^\times).$$

Cependant, on attire l'attention sur le fait que $\mathcal{O}_X^\times$ n'a pas de raison d'être cohérent et il est donc possible que le groupe de Picard soit non trivial même sur un schéma affine.
Par exemple, la théorie des anneaux de Dedekind montre que $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\, A) = \mathrm{Cl}(A)$ n'est en général pas trivial. Donnons un exemple géométrique :

Exemple 3. Considérons le schéma qui décrit un cercle réel :

$$S = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1).$$

L'anneau $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est un anneau de Dedekind car S est une courbe affine lisse intègre. On peut montrer (voir 14.4) que le groupe des classes de cet anneau est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (la classe non-triviale correspond à un ruban de Möbius).

La notion de fibré vectoriel sur un schéma affine correspond à la notion de module projectif de type fini.

Proposition 4. Soit A un anneau et M un A-module. Alors $\widetilde{M}$ est un fibré vectoriel sur $\operatorname{Spec}(A)$ si et seulement si M est projectif de type fini.
En particulier, $\operatorname{Pic}(A) = \operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}(A))$ est le groupe des classes d'isomorphisme de modules projectifs de type fini sur A pour le produit tensoriel.

Démonstration. Si $\widetilde{M}$ est un fibré vectoriel, alors M est localement libre sur un recouvrement fini de $\operatorname{Spec}(A)$ donc il est projectif de type fini. En effet, M est clairement de présentation finie (c'est une notion locale car $\operatorname{Spec}(A)$ est quasi-compact) et il est projectif car si $P \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ est un morphisme surjectif de A-modules, le morphisme :

$$\operatorname{Hom}(M,P) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M,Q)$$

est surjectif car il l'est localement, puisque M est de type fini (ainsi $S^{-1}\operatorname{Hom}(M,P) = \operatorname{Hom}(S^{-1}M, S^{-1}P)$).
Supposons M projectif de type fini. Notons $X = \operatorname{Spec}(A)$. Pour tout $x \in X$, on a M_x projectif de type fini sur un anneau local donc libre. Ainsi on dispose d'un ouvert affine standard $U = D(f)$ contenant x et d'une morphisme :

$$g : A[1/f]^n \longrightarrow M[1/f]$$

dont la localisation en x est un isomorphisme. Le noyau et le conoyau de ce morphisme sont de type fini car M est de présentation finie (il est de type fini et projectif), et leur localisation en x est nulle donc ils sont nuls sur un ouvert contenant x, ce qui conclut. □

Définition 5. Soit X un schéma connexe. Étant donné E un fibré vectoriel sur X, on lui associe :

$$\det E = \Lambda^d E$$

avec E le rang de d qui est constant car X est connexe. C'est un fibré en droites sur X.

La proposition suivante n'est pas du tout spécifique aux schémas et vaut aussi pour des espaces annelés quelconques.

Proposition 6. Soit :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels sur X. Elle est scindée sur tout ouvert affine et on a un isomorphisme canonique (décrit dans la preuve) :

$$\det E \otimes \det G \cong \det F.$$

Démonstration. Il est clair que la suite est scindée sur tout ouvert affine car un fibré vectoriel sur un ouvert affine est associé à un module projectif.
Tout se ramène ensuite au cas affine et au cas de fibrés triviaux (i.e. libres) car l'isomorphisme que l'on va construire sera naturel. Donnons nous un anneau A et une suite exacte de A-modules libres :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$$

de rangs m, n et p respectivement.
On définit alors l'application suivante :

$$\det M \otimes \det P \longrightarrow \det N$$

qui envoie $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_p)$ sur $i(x_1) \wedge \cdots \wedge i(x_m) \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_p$ avec z_i un antécédent quelconque de y_i par p. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette application est bien définie, et en prenant des bases on voit immédiatement que c'est un isomorphisme. □

La formule suivante est très utile.

Proposition 7. (Formule de projection) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, E un fibré vectoriel sur Y et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-modules :

$$f_*\mathcal{F} \otimes E \cong f_*(\mathcal{F} \otimes f^*E).$$

Démonstration. On commence par construire le morphisme puis on montrera que c'est localement un isomorphisme. On a un morphisme canonique donné par l'adjonction :

$$f^*f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

On a ainsi :

$$f^*(f_*\mathcal{F} \otimes E) = f^*f_*\mathcal{F} \otimes f^*E \longrightarrow \mathcal{F} \otimes f^*E$$

ce qui donne le morphisme voulu par adjonction. Il est clair que c'est un isomorphisme sur un ouvert qui trivialise E. □

2 Diviseurs de Weyl

Soit k un corps parfait et X/k une variété lisse de point générique η. Un diviseur de Weyl est une combinaison linéaire formelle finie de points de codimension 1 de X, ou, ce qui revient au même, une combinaison linéaire finie de sous-variétés fermées de codimension 1. On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe abélien libre des diviseurs de Weyl de X.
Puisque X est lisse, les $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux de valuation discrète pour x de codimension 1, et on note ord_x la valuation associée, qui s'étend au corps des fractions K de X.
À tout élément $f \in K^\times$, on peut associer un diviseur :

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{x \in X^{(1)}} \mathrm{ord}_x(f)[x]$$

où $X^{(1)}$ désigne l'ensemble des points de codimension 1. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette somme est bien finie, et qu'on a un morphisme de groupes :

$$K^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$$

dont le noyau est donné par le groupe des fonctions qui ne s'annulent pas sur X. Le conoyau de ce morphisme est appelé "groupe des classes" de X :

$$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Div}(X)/\{\mathrm{div}(f) \mid f \in K^\times\}.$$

Typiquement, si A est un anneau de Dedekind, un diviseur de Weyl est un idéal fractionnaire de A et donc on retrouve la notion usuelle de groupe des classes de A :

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Cl}(A).$$

Si L est un fibré en droites sur X, une section méromorphe de L est un élément du K-espace vectoriel de dimension 1 $L \otimes k(\eta)$, et à une telle section méromorphe non nulle s on peut associer un diviseur de la même façon :

$$\mathrm{div}(s) = \sum_{x \in X^{(1)}} \mathrm{ord}_x(s)[x].$$

Ici, l'ordre de s en x est défini de la façon suivante : on choisit une trivialisation locale de L en x :

$$L_{|U} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U$$

avec $x \in U$ et on pose :

$$\mathrm{ord}_x(s) = \mathrm{ord}_x(\varphi(s)).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ça ne dépend pas du choix de la trivialisation et que la somme est bien finie.
De plus, si s,t sont deux sections méromorphes non-nulles de L, on a naturellement $s = ft$ avec $f \in K^\times$ et donc :

$$\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(t)$$

donc la classe de $\mathrm{div}(s)$ dans le groupe de classes ne dépend que du fibré en droites L, on la note :

$$\mathrm{div}(L) \in \mathrm{Cl}(X).$$

De plus, si L et L' sont deux fibrés en droites et si s,s' sont deux sections méromorphes non-nulles de L et L', alors ss' est une section méromorphe non-nulle de $L \otimes L'$ et donc :

$$\mathrm{div}(L \otimes L') = \mathrm{div}(L) + \mathrm{div}(L').$$

Notons de plus que si L et L' sont deux fibrés isomorphes, il est clair qu'ils définissent la même classe dans le groupe des classes.
On a donc un morphisme de groupes bien défini :

$$\Phi : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(X).$$

Ce morphisme est injectif car si $\mathrm{div}(L)$ est principal, on peut écrire :

$$\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(f)$$

pour s une section méromorphe de L et f une fonction méromorphe, et ainsi $f^{-1}s$ est une section globale de L qui ne s'annule jamais, et qui induit donc un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow L$$

via $g \mapsto f^{-1}sg$.
On va montrer que le morphisme Φ est un isomorphisme en en construisant un inverse.
Remarquons d'abord qu'on peut "faisceautiser" la notion de diviseur en construisant un faisceau $\underline{\mathrm{Div}}_X$ défini par :

$$\underline{\mathrm{Div}}_X(U) = \mathrm{Div}(U)$$

qui est le sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$ formé des diviseurs dont le support est contenu dans U.
Il est clair que c'est un faisceau de groupes abéliens sur X (utiliser la quasi-compacité des ouverts de X pour voir que les combinaisons linéaires recollées restent finies).
Un diviseur D est dit positif (ou effectif) si tous ses coefficients sont positifs, et on note alors $D \geq 0$. On note aussi $D \geq D'$ si $D - D' \geq 0$.
Soit D un diviseur de Weyl sur X. On définit un faisceau $\mathcal{O}(D)$ via la formule suivante :

$$\mathcal{O}(D)(U) = \{f \in K^\times \mid \mathrm{div}(f)_{|U} + D_{|U} \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Par exemple si x est un point de codimension 1, $\mathcal{O}([x])(U)$ est l'ensemble des fonctions sur U qui ont un pôle d'ordre au plus 1 en x et pas d'autre pôle sur U, et $\mathcal{O}(-[x])(U)$ est l'ensemble des fonctions qui s'annulent en x et n'ont aucun pôle sur U.

Lemme 8. Soit D un diviseur sur X. Le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{O}(D)$ est un fibré en droites.

Démonstration. La première étape est de remarquer que tous les anneaux locaux $\mathcal{O}_z$ pour $z \in X$ sont des anneaux factoriels. En effet, chaque $\mathcal{O}_z$ est la localisation d'un $\mathcal{O}_x$ avec x de codimension 1, donc $\mathcal{O}_x$ est un anneau de valuation discrète et donc un anneau factoriel, et toute localisation non triviale d'un anneau factoriel est un anneau factoriel.
Ensuite, constatons que si Z est un fermé intègre de codimension 1 de X et si $z \in Z$, alors la localisation en z du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ associé à Z donne un idéal premier $\mathcal{I}_z$ de $\mathcal{O}_z$ de codimension 1, donc principal.

En effet, si A est un anneau factoriel et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A de codimension 1, si $\mathfrak{p} \neq 0$, par factorialité $\mathfrak{p}$ contient un élément irréductible p et on a alors :

$$(0) \subsetneq (p) \subseteq \mathfrak{p}$$

et (p) est un idéal premier (si $p \mid fg$, alors p divise f ou g), donc comme $\mathfrak{p}$ est de codimension 1, on a $\mathfrak{p} = (p)$.
Notons F le support de D, c'est à dire le fermé obtenu comme réunion des composantes de D.
On a :

$$\mathcal{O}(D)_{|X\setminus F} = \mathcal{O}_{X\setminus F}.$$

Il reste à comprendre la situation en un point z de F. Comme expliqué précedemment, chaque composante Z du support de D qui passe par z définit un idéal principal premier $\mathfrak{p}_Z = (p_Z)$ de l'anneau local $\mathcal{O}_z$. On pose alors :

$$g = \prod_Z p_Z^{-n_Z} \in \mathcal{O}_z$$

avec n_Z l'ordre de Z dans le diviseur D, le produit portant sur les Z qui passent par z. On étend g à un petit ouvert U contenant z, et quitte à réduire U on peut supposer que $\mathrm{div}(p_Z)_{|U} = [Z]$ de sorte que :

$$\mathrm{div}(g)_{|U} = -D_{|U}.$$

On a donc un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}(D)_{|U}$$

via $f \mapsto fg$. □

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 9. Soit X/k une variété lisse sur un corps parfait. On a un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Cl}(X)$$

donné par $L \mapsto \mathrm{div}(L)$ et dans l'autre sens par $D \mapsto \mathcal{O}(D)$.
En particulier on a :

$$\mathcal{O}(D + D') \cong \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D')$$

pour tous diviseurs D et D'.

Démonstration. Soit D un diviseur de Weyl. Posons $L = \mathcal{O}(D)$ et vérifions que $\mathrm{div}(L) = D$. Notons que la fonction 1 définit une section méromorphe de $\mathcal{O}(D)$.
Son diviseur comme section de L est exactement D d'après la construction des ouverts trivialisant du lemme précédent (attention, son diviseur comme section de $\mathcal{O}_X$ est bien entendu 0, mais ce n'est pas la même chose).
Ainsi, si D et D' sont équivalents dans le groupe des classes, alors $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(D')$ ont la même classe dans le groupe des classes donc, par injectivité de $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$, ils sont égaux dans le groupe de Picard, d'où le fait que la réciproque $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ soit bien définie. Il est alors clair avec ce qui précède que ce sont des bijections réciproques. □

Il est possible de tirer en arrière un fibré en droites. Expliquons ce que cela donne au niveau des diviseurs dans le cas d'un morphisme fini séparable.

Proposition 10. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini séparable entre variétés lisses de dimension d sur un corps parfait k, et soit L un fibré en droites sur Y associé au diviseur D. Le fibré en droites f^*L est alors associé au diviseur f^*D, que l'on définit en étendant par linéarité la formule suivante pour y de codimension 1 :

$$f^*[y] = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e(x \mid y)[x].$$

Démonstration. Prenons s une section méromorphe de L de de diviseur D, et observons que :

$$\operatorname{div}(f^*s) = \sum_{x\in X^{(1)}} \operatorname{ord}_x(f^*s) = \sum_{x\in X^{(1)}} e(x \mid f(x))\operatorname{ord}_{f(x)}(s) = f^*\operatorname{div}(s).$$

□

Terminons cette partie par une remarque importante : soit X/k une variété lisse et Z un fermé intègre de X. On a alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \operatorname{Div}(X \setminus Z) \longrightarrow 0$$

où la première flèche est $1 \mapsto [Z]$. Cette suite induit, en quotientant par $K^\times$:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Cl}(X) \longrightarrow \operatorname{Cl}(X \setminus Z) \longrightarrow 0.$$

En particulier, si X a un groupe de classe (ou de Picard) trivial, c'est aussi le cas de tout ouvert de X obtenu en retirant un fermé de codimension 1.

3 Faisceau et diviseur canonique

Tout se passe ici sur un corps parfait k.

Définition 11. Soit X/k une variété lisse sur un corps parfait k (au sens schéma de type fini intègre séparé et lisse sur k). Ainsi $\Omega_{X/k}$ est localement libre de rang $d = \dim X$ et on définit le *faisceau canonique* comme :

$$\mathcal{K}_{X/k} = \det \Omega_{X/k}.$$

C'est donc un fibré en droites sur X. D'après le théorème 9, il lui correspond une classe de diviseurs $K_{X/k}$ dans le groupe de classes de X. Ce diviseur (ou plutôt cette classe de diviseurs) est appelé *diviseur canonique*. Concrètement, si X est de dimension d et ω est une d-forme méromorphe non nulle sur X, on a :

$$K_{X/k} = [\operatorname{div}(\omega)].$$

Proposition 12. (Transfert du faisceau canonique) Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme fini séparable entre variétés lisses. On a un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{K}_{X/k} \cong f^*\mathcal{K}_{Y/k} \otimes \mathcal{O}(R_{X/Y})$$

avec $R_{X/Y}$ le diviseur de ramification.
De plus, si X est une variété lisse et $Z \xrightarrow{i} X$ est une sous-variété lisse fermée de codimension 1, on a :

$$\mathcal{K}_{Z/k} \cong i^*\mathcal{K}_{X/k} \otimes i^*\mathcal{O}([Z]).$$

Démonstration. Puisque f est fini et séparable, on a une suite exacte de fibrés vectoriels sur X :

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_{Y/k} \xrightarrow{u} \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

En prenant la d-ème puissance extérieure, avec $d = \dim X = \dim Y$, on obtient une injection (dont on note C le conoyau) :

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{K}_{Y/k} \xrightarrow{\det(u)} \mathcal{K}_{X/k} \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

On tensorise par $\mathcal{K}_{X/k}^{-1}$:

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{K}_{Y/k} \otimes \mathcal{K}_{X/k}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow C \otimes \mathcal{K}_{X/k}^{-1} \longrightarrow 0.$$

Si x est un point de codimension 1, en prenant la germe en x on peut représenter u_x par une matrice $M \in M_d(\mathcal{O}_x)$ dont la valuation du déterminant, $v_x = \operatorname{ord}_x(\det M)$ ne dépend pas du choix de bases de $f^*\Omega_{Y/k,x}$ et $\Omega_{X/k,x}$. Par définition du déterminant, en prenant les bases associées pour $f^*\mathcal{K}_{Y/k,x}$ et $\mathcal{K}_{X/k,x}$, on a que $\det(u_x)$ est la multiplication par $\det(M)$ et donc, en notant $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux $f^*\mathcal{K}_{Y/k} \otimes \mathcal{K}_{X/k}^{-1}$ on a :

$$\mathcal{I}_x = \mathfrak{m}_x^{v_x}$$

avec $v_x = \mathrm{ord}_x(\det M)$.
Notons que :

$$\mathrm{ord}_x(R_{X/Y}) = \mathrm{len}_{\mathcal{O}_x}(\Omega_{X/Y,x}) = \mathrm{ord}_x(\det(M)) = v_x$$

car $\Omega_{X/Y}$ est le conoyau de u (utiliser la forme normale de Smith de u). On obtient :

$$R_{X/Y} = \sum_{x \in X^{(1)}} v_x[x].$$

Notons de plus que $\mathcal{O}(-R_{X/Y})$ est un faisceau d'idéaux et pour tout x de codimension 1 on a :

$$\mathcal{O}(-R_{X/Y})_x = \mathfrak{m}_x^{v_x}.$$

On a donc :

$$\mathcal{I} = \mathcal{O}(-R_{X/Y})$$

et finalement :

$$\mathcal{K}_{X/k} \cong f^*\mathcal{K}_{Y/X} \otimes \mathcal{O}(R_{X/Y}).$$

Pour le deuxième point, on part de la suite exacte qui vient de la lissité de Z :

$$0 \longrightarrow i^*\mathcal{I} \longrightarrow i^*\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Z/k} \longrightarrow 0.$$

Notons que :

$$\mathcal{I} = \mathcal{O}(-[Z])$$

donc $\mathcal{I}$ est un fibré en droites, et ainsi la formule 6 donne :

$$i^*\mathcal{K}_{X/k} \cong i^*\mathcal{O}(-[Z]) \otimes \mathcal{K}_{Z/k}$$

autrement dit :

$$\mathcal{K}_{Z/k} \cong i^*\mathcal{K}_{X/k} \otimes i^*\mathcal{O}([Z]).$$

□

4 Fibrés en droites sur l'espace projectif

4.1 Groupe de Picard de l'espace projectif

Le but de cette partie est de classifier les fibrés en droite sur $\mathbb{P}_k^n$ avec k un corps parfait. Il se trouve que le résultat de cette section peut être généralisé au cas de l'espace projectif sur un anneau factoriel noéthérien en généralisant le théorème 9 au cas d'un schéma normal dont les anneaux locaux sont factoriels.
Soit donc k un corps parfait et $n \geq 1$ un entier. En guise d'entraînement, calculons le groupe de classes de $\mathbb{A}_k^n$:

Exemple 13. Tout point de codimension 1 de $\mathbb{A}_k^n$ correspond à un idéal premier principal (p) avec p irréductible. Choisissons donc un système d'irréductibles I de $k[X_1, \ldots, X_n]$ de sorte que :

$$\mathrm{Div}(\mathbb{A}_k^n) = \bigoplus_{p \in I} \mathbb{Z}[(p)].$$

Or on a aussi, en notant K le corps des fonctions de $\mathbb{A}_k^n$:

$$K = k(X_1, \ldots, X_n) \cong k^\times \oplus \bigoplus_{p \in I} \mathbb{Z}p$$

et ainsi le morphisme $K^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathbb{A}_k^n)$ est clairement surjectif. On a donc :

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{A}_k^n) = 0$$

ce qui montre, avec le théorème 9 et par 4 que tout module projectif sur $k[X_1, \ldots, X_n]$ est libre.

Occupons-nous maintenant du cas de $\mathbb{P}^n_k$, que l'on notera $\mathbb{P}^n$ pour faire simple.
On sait que tout point de codimension 1 de $\mathbb{P}^n$ est donné par un idéal premier homogène principal (p) avec p irréductible homogène. Choisissons I un système d'irréductibles homogènes (à unité près) :

$$\mathrm{Div}(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{p \in I} \mathbb{Z}[(p)].$$

On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow k^\times \longrightarrow K^\times \longrightarrow \bigoplus_{p \in I} \mathbb{Z}[(p)] \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où $\deg([p]) = \deg(p)$, car un élément de $K^\times$ est une fraction homogène de degré 0. En faisant des identifications, on en déduit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow k^\times \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et donc :

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$$

avec comme générateur le fermé irréductible $V(X_1)$.
À la lumière de 9, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 14. Soit k un corps parfait et $n \geq 1$. On a :

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$$

avec comme générateur le faisceau tordu $\mathcal{O}(1)$ (dont le diviseur associé est de $V(X_1)$).
De plus, pour tout Z fermé irréductible de $\mathbb{P}^n$ associé à un polynôme irréductible homogène de degré d, si L est un fibré en droites de diviseur $[Z]$, alors :

$$L \cong \mathcal{O}(d).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathcal{O}(1)$ est bien associé au diviseur $V(X_1)$. Or X_1 est une section globale de $\mathcal{O}(1)$ de diviseur $V(X_1)$, donc c'est clair.
Ensuite, si $Z = V(p)$ avec p irréductible homogène de degré d est le diviseur de L, la suite exacte vue précedemment montre que Z est équivalent au diviseur $dV(X_1)$ car ils ont le même degré et donc que :

$$L \cong \mathcal{O}(d).$$

□

Notez qu'on aurait aussi pu calculer le groupe de Picard de $\mathbb{P}^n$ en faisant un calcul de cohomologie à la Čech puisque le faisceau $\mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^n}$ est acyclique sur les cartes affines.
On rappelle l'énoncé suivant sur la cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}(m)$ (qui se calcule à la Čech).

Théorème 15. Soit $n \geq 1$ et k un corps parfait. On a un isomorphisme d'anneaux gradués :

$$k[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow \bigoplus_m H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)).$$

où m peut être pris dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{N}$.
Ensuite, on a :

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = 0$$

pour $0 < i < n$ et enfin :

$$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-m-n-1)).$$

4.2 Diviseur canonique de l'espace projectif

Soit k un corps parfait et $n \geq 1$. Ici, $\mathbb{P}^n$ désigne $\mathbb{P}^n_k$.

Théorème 16. (Suite exacte d'Euler) On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^n$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} = \Omega^{-1}_{\mathbb{P}^n/k}$ le faisceau tangent de $\mathbb{P}^n$ (ses sections sont les champs de vecteurs sur $\mathbb{P}^n$).
La première flèche est localement donnée par $g \mapsto (gX_0, \ldots, gX_n)$, et la seconde par :

$$(s_0, \ldots, s_n) \mapsto \sum_i s_i \partial_i.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que ce sont bien des morphismes de faisceaux. Ensuite, la composée des deux flèches donne :

$$g \mapsto \sum_i g X_i \partial_i = g\mathcal{E}$$

avec $\mathcal{E} = \sum_i X_i \partial_i$ le champ de vecteur d'Euler. Ce champ de vecteur est nul sur $\mathbb{P}^n$ car pour toute fonction f sur un ouvert de $\mathbb{P}^n$, on a :

$$\mathcal{E} f = \deg(f) f = 0.$$

La surjectvité de la flèche de droite et l'injectivité de celle de gauche sont claires. Il reste à voir l'exactitude au milieu. Soient donc $s_0, \ldots, s_n$ des sections de $\mathcal{O}(1)$ sur un ouvert telles que :

$$\sum_i s_i \partial_i = 0$$

sur $\mathbb{P}^n$. Notons que s_i est une fraction rationnelle homogène de degré 1 et qu'on a pour toute fraction rationnelle h homogène de degré 0 :

$$\sum_i s_i \partial_i h = 0.$$

En appliquant cela à $h = X_i/X_j$ pour $i < j$, on obtient :

$$\frac{s_i}{X_j} - s_j \frac{X_i}{X_j^2} = 0$$

donc :

$$\frac{s_i}{X_i} = \frac{s_j}{X_j}.$$

En posant $g = s_i/X_i$, on obtient bien ce qu'on voulait. □

Corollaire 17. Soit k un corps parfait et $n \geq 1$. On a :

$$\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n/k} \cong \mathcal{O}(-n-1).$$

Démonstration. Il suffit de dualiser la suite exacte d'Euler (localement scindée car ce sont des fibrés vectoriels) puis d'appliquer 6, et de montrer que :

$$\det(\mathcal{O}(-1)^{n+1}) \cong \mathcal{O}(-n-1)$$

ce qui peut se faire en calculant le cocycle ou en appliquant plusieurs fois 6. □

5 Notion d'amplitude

Commençons par présenter l'intérêt de "tordre" un faisceau quasi-cohérent par un fibré en droites.

Lemme 18. Soit X un schéma quasi-compact et L un fibré en droites sur X. Soit s une section globale de L et $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X.
Si f est une section globale de $\mathcal{F}$ nulle sur $D(s)$, alors il existe $n \geq 0$ tel que :

$$s^n f = 0$$

comme section globale de $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$.
De plus, si X est quasi-séparé et si $f \in \mathcal{F}(D(s))$, alors il existe $n \geq 0$ tel que $s^n f$ s'étende en une section globle de $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$.

Démonstration. Pour le premier énoncé, comme X est quasi-compact, on se ramène au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $L = \mathcal{O}$ et c'est alors un résultat bien connu sur la localisation des modules.
Pour le second énoncé, recouvrons X par des ouverts affines U_i sur lesquels L est trivial. Par quasi-cohérence de $\mathcal{F}$ et comme $L \cong \mathcal{O}$ sur U_i, on peut étendre $f_{|U_i \cap D(s)} s^N$ à $\mathcal{F}(U_i)$ pour un N assez grand indépendant de i car X est quasi-compact. Notons g_i une telle extension. Les $g_{i,|U_{ij}} - g_{j,|U_{ij}}$ sont nulles sur $D(s)$ donc par le point précédent, comme U_{ij} est quasi-compact (car X est quasi-séparé), on obtient que, quitte à multiplier par s^M avec M grand, les g_i se recollent. □

Définition 19. Soit X un schéma noéthérien et $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est engendré par un nombre fini de sections globales s'il existe un morphisme surjectif :

$$\mathcal{O}_X^i \longrightarrow \mathcal{F}$$

pour un certain i.
Un fibré en droites L sur X est dit *ample* si pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et pour tout n suffisament grand, on a $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$ engendré par ses sections globales.

Voici tout de suite quelques remarques sur la notion d'amplitude. Premièrement, le produit tensoriel de deux faisceaux quasi-cohérents engendrés par un nombre fini de sections globales est engendré par un nombre fini de sections globales. De même, le produit tensoriel de deux fibrés en droites amples est ample.
De plus, il est clair que pour tout $m \geq 1$, L est ample si et seulement si $L^{\otimes m}$ est ample (penser à faire une division euclidienne).
Ainsi l'ensemble des classes de fibrés en droites amples, noté $\mathrm{Ample}(X)$, est un sous-ensemble de $\mathrm{Pic}(X)$ stable par composition et divisible. Attention, il est assez rare que $\mathcal{O}_X$ soit ample : en effet, $\mathcal{O}_X$ est ample si et seulement si tout faisceau cohérent est engendré par ses ses sections globales, ce qui est assez rare comme on le verra après (c'est toujours le cas dans le cas affine bien sûr).

Lemme 20. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme *fini* entre schémas noéthériens et L un fibré en droites ample sur Y. Alors f^*L est ample sur X.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ cohérent sur X. On a, par 7 :

$$f_*(\mathcal{F} \otimes f^*L^{\otimes n}) = f_*\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$$

et $f_*\mathcal{F}$ est cohérent car f est fini (f est quasi-compact et séparé en particulier) donc pour n assez grand, $f_*(\mathcal{F} \otimes f^*L^{\otimes n})$ est engendré par un nombre fini de sections globales. On a donc un morphisme surjectif :

$$\mathcal{O}_Y^i \longrightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes f^*L^{\otimes n})$$

qui induit :

$$\mathcal{O}_X^i = f^*\mathcal{O}_Y^i \longrightarrow f^*f_*(\mathcal{F} \otimes f^*L^{\otimes n}) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes f^*L^{\otimes n}$$

qui est surjective comme composée de deux surjections. En effet, il est clair en se ramenant au cas affine que $f^*f_*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est toujours surjectif. □

Donnons tout de suite un critère topologique d'amplitude.

Théorème 21. Soit X un schéma noéthérien et L un fibré en droites. L est ample si et seulement si il existe $m \geq 1$ et $s_1, \dots, s_k$ des sections globales de $L^{\otimes m}$ telles que :

$$X = \bigcup_i D(s_i)$$

et chaque $D(s_i)$ est affine.

Démonstration. Supposons que L est ample. Soit $x \in X$, prenons U un ouvert affine qui contient x et qui trivialise L et considérons $\mathcal{I}$ l'idéal associé au fermé $Z = X \setminus U$. On a, pour tout $m \geq 1$:

$$\mathcal{I} \otimes L^{\otimes m} \longrightarrow L^{\otimes m}$$

injectif et on peut donc identifier $\mathcal{I}L^{\otimes m}$ à $\mathcal{I} \otimes L^{\otimes m}$. En prenant la germe en x, cette inclusion est un isomorphisme car $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_x$. Ainsi, quitte à augmenter m et en utilisant le lemme de prolongement 18, il existe s une section globale de $\mathcal{I}L^{\otimes m}$ qui engendre $L_x^{\otimes m}$.
En particulier, s est une section de $\mathcal{L}^{\otimes m}$ qui vérifie :

$$D(s) \subseteq U$$

car $Z \subseteq V(s)$. Comme $\mathcal{L}^{\otimes m}$ est libre sur U, $D(s)$ est donc affine, et $x \in D(s)$ par construction. Puisque X est quasi-compact, on peut prendre un recouvrement fini et choisir m indépendemment de l'ouvert U.
Supposons que :

$$X = \bigcup_i D(s_i)$$

comme dans l'énoncé. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Puisque $D(s_i)$ est affine, $\mathcal{F}_{|D(s_i)}$ est associé à un module de type fini sur $\mathcal{O}(D(s_i))$ et il est donc engendré par un nombre fini de sections définies sur $D(s_i)$, et quitte à tordre par $L^{\otimes m}$ pour m assez grand, on peut prolonger ces sections à X grâce au lemme de prolongement 18. Ceci donne bien un nombre fini de sections globales qui engendrent $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}$ pour m assez grand. □

Lemme 22. Soit $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ et R un anneau noéthérien. Le fibré en droites $\mathcal{O}(m)$ est ample sur $\mathbb{P}_R^n$ si et seulement si $m \geq 1$.

Démonstration. C'est direct avec le critère topologique 21. □

6 Cohomologie des faisceaux cohérents sur un schéma projectif

Soit R un anneau noéthérien et $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_R^n$ un schéma R-projectif. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on note $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes i^*\mathcal{O}(m)$ le m-ème faisceau cohérent tordu associé au plongement dans $\mathbb{P}^n$.
Notons qu'on a pour tout i :

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}^n, i_*\mathcal{F})$$

car i est une immersion fermée. Notons aussi que $i_*\mathcal{F}$ est cohérent. Ainsi, si l'on montre que pour $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$ on a :

- $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ est un R-module de type fini.
- $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > n$.
- Pour m assez grand et pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$.

alors ces trois points seront également vrais pour les faisceaux cohérents sur X.
Soit donc $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$. Le deuxième point est clair en faisant un calcul à l aČech. Ensuite, comme $\mathcal{O}(1)$ est ample (22), pour m assez grand $\mathcal{F}(m)$ est engendré par un nombre fini de sections globales et donc il existe une suite exacte de faisceaux cohérents :

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F}(m) \longrightarrow 0.$$

Par tensorisation par $\mathcal{O}(-m)$ qui est localement libre, on a aussi :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{K}(-m) \longrightarrow \mathcal{O}(-m)^k \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

On a donc d'une part :

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O})^k \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}) \longrightarrow \ldots$$

et pour $i \geq 1$, d'après 15 on a $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = 0$ et par un argument de récurrence descendante, quitte à tordre suffisament (i.e. à augmenter m) de façon indépendante de i car il n'y a qu'un nombre fini d'indices i intéressants, on peut supposer que $H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}) = 0$, ce qui donne le troisième point.
Enfin, le premier point s'obtient par récurrence descendante à partir de la suite exacte $(*)$ en cohomologie.
On a donc établi le théorème suivant.

Théorème 23. Soit R un anneau noéthérien, et $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_R$ un schéma R-projectif. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, en notant $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes i^*\mathcal{O}(1)^{\otimes m}$, on a les trois faits suivants :

— $H^i(X, \mathcal{F})$ est un R-module de type fini.

— $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > n$.

— Pour m assez grand et pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(X, \mathcal{F}(m)) = 0$.

Démontrons le résultat suivant qui est très naturel.

Théorème 24. Soit k un corps, $n \geq 1$ et $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ un sous-schéma fermé (pas nécessairement réduit) de dimension d. Alors la dimension cohomologique de X est au plus d, au sens où pour tout $\mathcal{F}$ quasi-cohérent sur X et tout $i > d$, on a :

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. On commence par faire l'observation suivante dans le cas où k est algébriquement clos.
Soit $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ un fermé irréductible de dimension $d < n$. Considérons l'ensemble E des polynômes homogènes de degré 1 à $n+1$ variables qui s'annulent sur Z. E correspond à un fermé au sens de Zariski de $\mathbb{A}^{n+1}_k$. Ce fermé n'est pas $\mathbb{A}^{n+1}_k$ sans quoi on aurait $Z \subseteq V(X_0, \ldots, X_n) = \emptyset$.
Ainsi, si Z est un fermé (pas nécessairement irréductible) de dimension $d < n$, Z a un nombre fini de composantes irréductibles et donc il existe P homogène de degré 1 à $n+1$ variables non constant tel que P ne s'annule sur aucune composante de Z. Ainsi :

$$\dim(Z \cap V(P)) < d.$$

Ceci est encore vrai pour k pas nécessairement algébriquement clos : il suffit d'étendre les scalaires puis de dire que le P obtenu vit dans une extension finie ℓ/k et de prendre $\widetilde{P} = N_{\ell/k}(P)$ qui reste homogène (mais pas nécessairement de degré 1).
Ainsi, en itérant cette idée, on trouve $P_1, \ldots, P_{r+1}$ des polynômes homogènes non constants tels que :

$$X \cap V(P_1) \cap \cdots \cap V(P_{r+1}) = \emptyset.$$

On a donc :

$$X \subseteq D(P_1) \cup \cdots \cup D(P_r) \cup D(Q)$$

et ce sont des ouverts affines, donc le calcul de la cohomologie à la Čech montre ce qu'on veut. □

7 Fibrés en droites très amples

Soit R un anneau noéthérien et X un R-schéma noéthérien. Un fibré en droite L sur X est dit *très ample* s'il existe une immersion de R-schémas :

$$X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_R$$

telle que $i^*\mathcal{O}(1) \cong L$.
Notez que si X est propre sur R, une telle immersion est automatiquement fermée, et c'est le cas qui

nous intéressera la plupart du temps.
Si L est très ample, alors le morphisme i correspond, par la propriété universelle de $\mathbb{P}^n$, à la donnée de $s_0, \dots, s_n$ des sections globales de L telles que i soit donné par les coordonnées homogènes $[s_0, \dots, s_n]$ et les s_i ne s'annulent jamais en même temps donc engendrent L.
En particulier tout fibré en droites très ample est engendré par un nombre fini de sections globales (ce qui n'est pas nécessairement le cas d'un fibré ample).

Proposition 25. Tout fibré en droites très ample sur X/R est ample.

Démonstration. Soit L très ample sur X. Soit $\mathcal{F}$ cohérent sur X. On se donne une immersion :

$$i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_R$$

de R-schémas telle que $i^*\mathcal{O}(1) \cong L$. Comme i est fini entre schémas noéthériens, il suffit de voir que $\mathcal{O}(1)$ est ample, ce que l'on sait déjà. □

La réciproque est vraie quitte à prendre une puissance suffisament grande. Cependant on prendra garde au fait que la condition "très ample" est bien moins stable que la condition "ample" (on ne peut pas prendre de tirés en arrière par un morphisme fini par exemple).

Proposition 26. Soit X de type fini sur R noéthérien (en particulier X est noéthérien). Si L est un fibré en droites ample sur X, alors il existe $m \geq 1$ tel que $L^{\otimes m}$ est très ample sur X/R.

Démonstration. On écrit :

$$X = \bigcup_i D(s_i)$$

avec s_i une section globale de $L^{\otimes m}$ pour m assez grand et $D(s_i)$ affine. Par hypothèse, chaque $A_i = \mathcal{O}(D(s_i))$ est une R-algèbre de type finie. On choisit f_{ij} des générateurs de A_i comme R-algèbre, et on étend comme d'habitude $f_{ij}s_i^d$ en une section globale s_{ij} de $L^{\otimes dm}$ avec d qu'on peut supposer indépendant de i et de j.
Ainsi les s_{ij}, s_i^d engendrent $\mathcal{L}^{\otimes dm}$ et induisent un morphisme :

$$X \xrightarrow{f} \mathrm{Proj}(R[X_{ij}, Y_i])$$

via $f = [s_{ij}, s_i^d]$. C'est une immersion car :

$$f^{-1}(D(Y_k)) = D(s_k)$$

et le morphisme induit sur les schémas affines $D(s_k) \longrightarrow D(Y_k)$ est dual à :

$$R[x_{ij}, y_1, \dots, \hat{y_k}, \dots] \longrightarrow A_k$$

qui est surjectif par construction. Ainsi f est une immersion fermée vers l'ouvert $\bigcup D(Y_k)$ donc c'est une immersion. □

Corollaire 27. Soit R un anneau noéthérien et X un R-schéma propre. Alors X est projectif si et seulement si X possède un fibré en droites ample.

Remarque 28. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ est très rarement ample dans le cas où X est propre. En effet, si X est propre sur un corps k parfait et $\mathcal{O}_X$ est ample, alors il est très ample donc on a une immersion fermée :

$$i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

telle que $i^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_X$. Cette immersion fermée est donnée par $n+1$ sections globales de $\mathcal{O}_X$, $s_0, \dots, s_n$, et donc on peut factoriser i par :

$$X \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

et l'image de X dans $\mathbb{A}^{n+1}_k$ est un fermé propre de $\mathbb{A}^{n+1}_k$ donc cette image est finie et ainsi X est de dimension 0 (car i est injective).
En particulier, si L est ample sur X propre de dimension au moins 1, alors L^{-1} ne peut pas être ample. Par exemple, un fibré de torsion dans le groupe de Picard n'est pas ample.

8 Critère cohomologique d'amplitude de Serre

Donnons enfin un critère cohomologique d'amplitude pour les schémas propres sur un anneau noéthérien.

Théorème 29. (Critère d'amplitude de Serre) Soit R un anneau noéthérien et X un R-schéma propre et L un fibré en droites sur X. Alors L est ample si et seulement si pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, et pour tout m assez grand, le faisceau $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}$ est acyclique (i.e. sa cohomologie est nulle en degré strictement positif).

Démonstration. Supposons L ample. Il existe alors $k \geq 1$ tel que $L^{\otimes k}$ est très ample et ainsi on a une immersion fermée (car X est propre) :

$$i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_R$$

avec $i^*\mathcal{O}(1) \cong L^{\otimes k}$. Ainsi pour tout $m = qk + r$ grand et pour $j \geq 1$ on a :

$$H^j(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}) = H^j(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes r} \otimes i^*\mathcal{O}(1)^{\otimes q})$$

qui est nul pour q assez grand d'après le théorème 23.
Supposons réciproquement que la deuxième partie de l'énoncé soit satisfaite par L et montrons que L est ample.
On utilise pour cela le critère topologique 21. Soit $x \in X$ un point fermé et prenons U un ouvert affine trivialisant L et contenant x. On pose $Z = X \setminus U$ et on considère $\mathcal{I}_Z$ le faisceau d'idéaux associé à Z. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Z \cup \{x\}} \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow i_*k(x) \longrightarrow 0.$$

On tensorise par $L^{\otimes m}$ pour m assez grand :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Z \cup \{x\}} L^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{I}_Z L^{\otimes m} \longrightarrow i_*k(x) \otimes L^{\otimes m} \longrightarrow 0$$

et on prend la cohomologie. Pour m assez grand et par hypothèse, on obtient une surjection :

$$H^0(X, \mathcal{I}_Z L^{\otimes m}) \longrightarrow H^0(X, i_*k(x) \otimes L^{\otimes m})$$

donc il existe une section globale s de $\mathcal{I}_Z L^{\otimes m} \subseteq L^{\otimes m}$ qui ne s'annule pas en x, et ainsi $x \in D(s) \subseteq U$ et $D(s)$ est affine. On a un recouvrement ouvert qui vérifie les propriétés voulues et qui contient tous les points fermés donc qui contient tous les points (car un schéma quasi-compact non-vide possède toujours un point fermé). □

9 Plongements de Sègre et de Veronese

9.1 Plongement de Sègre

On note p la projection $\mathbb{P}^n \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n$ et q la seconde projection.
On va construire une immersion fermée :

$$\mathbb{P}^n \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

telle que :

$$\sigma^*\mathcal{O}(1) = p^*\mathcal{O}(1) \otimes q^*\mathcal{O}(1).$$

Notez qu'il suffit de le faire sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et qu'on aura le résultat gratuitement par changement de base sur n'importe quelle base S.
Du point de vue des foncteurs des points, on a pour tout schéma X une application naturelle en X :

$$\mathbb{P}^n(X) \times \mathbb{P}^m(X) = (\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)(X) \longrightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}(X)$$

qui à la donnée de deux fibrés en droites L et L' sur X et de sections $s_0, \ldots, s_n$ de L et $t_0, \ldots, t_m$ de L' associe $L \otimes L'$ et les sections $s_i t_j$.
On vérifie facilement que c'est bien défini. Par Yoneda, on obtient un morphisme de schémas :

$$\mathbb{P}^n \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^{mn+m+n}.$$

Ce morphisme s'obtient en prenant $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ dans ce qui précède et en prenant le point id $\in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m(X)$.
Ce point correspond à la donnée des fibrés $L = p^*\mathcal{O}(1)$ et $L' = q^*\mathcal{O}(1)$ et aux sections $p^*X_0, \dots, p^*X_n$ et $q^*Y_0, \dots, q^*X_m$. Ainsi on a :

$$\sigma^*\mathcal{O}(1) = p^*\mathcal{O}(1) \otimes q^*\mathcal{O}(1)$$

et σ est déterminé par les sections $p^*X_i q^*Y_j$, que l'on peut noter $X_i Y_j$ pour simplifier.

Théorème 30. Le plongement de Sègre est une immersion fermée dont l'image est définie par les équations homogènes :

$$Z_{k,j}Z_{i,\ell} = Z_{k,\ell}Z_{i,j}$$

pour i, j, k, ℓ (voir la preuve pour les notations).

Démonstration. Notons $X_0, \dots, X_n$ les sections canoniques de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$, $Y_0, \dots, Y_m$ celles sur $\mathbb{P}^m$ et Z_{ij} avec $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq m$ celles sur $\mathbb{P}^{mn+m+n}$.
On a alors :

$$\sigma^{-1}(D(Z_{ij})) = D(X_i) \times D(Y_j) \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$$

ce qui montre que σ est un morphisme affine. Il reste à voir que le morphisme induit sur les sections

$$\mathcal{O}(D(Z_{ij})) \longrightarrow \mathcal{O}(D(X_i) \times D(Y_j))$$

est surjectif. Ce morphisme est :

$$\mathbb{Z}[z_{k,\ell} \mid (k,l) \neq (i,j)] \longrightarrow \mathbb{Z}[x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n, y_0, \dots, \widehat{y_j}, \dots, y_m]$$

qui envoie $z_{k,\ell}$ sur $x_k y_\ell$ avec la convention $x_i = y_j = 1$. Ce morphisme est clairement surjectif et son noyau est :

$$I_{i,j} = (z_{k,j}z_{i,\ell} - z_{k,\ell} \mid (k,\ell) \neq (i,j)).$$

Ainsi σ est une immersion fermée d'image définie par les équations :

$$Z_{k,j}Z_{i,\ell} = Z_{k,\ell}Z_{i,j}$$

pour i, j, k, ℓ. $\square$

Bien sûr, ce qui précède peut être généralisé à n'importe quelle base S en effectuant un changement de base. On garde alors les mêmes propriétés sur les faisceaux car si S est un schéma et si $\mathbb{P}^n_S \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ est la projection, on a $\pi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$.

10 Plongement de Veronese

Soient $n \geq 1$ et $d \geq 1$. Le faisceau $\mathcal{O}(d)$ sur $\mathbb{P}^n$ est ample (voir 22) donc il est engendré par un nombre fini de sections globales. Or les sections globales de $\mathcal{O}(d)$ sont les polynômes homogènes de degré d (voir 15). Une base de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ est donnée par les monômes homogènes de degré d. On note B_d l'ensemble des monômes homogènes de degré d.

Lemme 31. On a :

$$|B_d| = \binom{n+d}{n}.$$

Démonstration. Il y a autant de monômes de degré d que de $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ qui vérifient :

$$\sum_i x_i = d.$$

En posant $y_i = (x_0 + \cdots + x_i) + i$, qui est un changement de variable bijectif, on en déduit qu'il y en a autant que de $0 \leq y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} \leq d + n - 1$. Ainsi :

$$|B_d| = \binom{n+d}{n}.$$

$\square$

Puisque ces sections engendrent $\mathcal{O}(d)$, elles induisent un morphisme :

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{v} \mathbb{P}^N$$

avec :

$$N = |B_d| - 1 = \binom{n+d}{n} - 1$$

qui vérifie :

$$v^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d).$$

Pour plus de simplicité, on note pour chaque multi-indice $\underline{p} = (p_0, \dots, p_n)$ de degré d (i.e. tel que $\sum_i p_i = d$), la section $Z_{\underline{p}}$ correspondante de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ (c'est juste une numérotation des $N+1$ coordonnées).

Théorème 32. Le plongement de Veronese (sur n'importe quelle base S) est une immersion fermée :

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{v} \mathbb{P}^N$$

avec $N = \binom{n+d}{n} - 1$ qui vérifie $v^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d)$.

Démonstration. Notons J_d l'ensemble des multi-indices positifs de degré d. Remarquons que, par construction :

$$v^{-1}(D(Z_{\underline{p}})) = D(X_0^{p_0}, X_1^{p_1}, \dots, X_n^{p_n}) = D(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})$$

où $i_1 < \dots < i_s$ sont les indices pour lesquels $p_i > 0$. Comme $d \geq 1$, on a $s \geq 1$ et donc v est affine. Le morphisme induit sur les anneaux de sections est :

$$\varphi : \mathbb{Z}[Z_{\underline{q}} \mid \underline{q} \in J_d][Z_{\underline{p}}^{-1}]_0 \longrightarrow \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n][X_{i_1}^{-1}, \dots, X_{i_s}^{-1}]_0$$

qui est la restriction en degré 0 du morphisme :

$$\psi : \mathbb{Z}[Z_{\underline{q}} \mid \underline{q} \in J_d][Z_{\underline{p}}^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n][X_{i_1}^{-1}, \dots, X_{i_s}^{-1}]$$

qui envoie $Z_{\underline{q}}$ sur $X^{\underline{q}} = X_0^{q_0} \dots X_n^{q_n}$.
Ce morphisme multiplie les degrés par d dans la graduation.
L'image de ψ est constituée des $X^{\underline{\ell} - m\underline{p}}$ avec ℓ un multi-indice positif de degré divisible par d et $m \geq 0$. Ainsi l'image de ψ est exactement le sous-anneau des éléments dont la graduation est divisible par d et donc φ est surjectif. □

Un intérêt du plongement de Veronese réside dans la proposition suivante (qui peut être généralisée à un anneau factoriel noéthérien, ou à n'importe quel anneau si on suppose que l'hypersurface est définie par une équation homogène).

Proposition 33. Soit k un corps parfait, $n \geq 1$ et Z une hypersurface irréductible de degré $d \geq 1$ de $\mathbb{P}^n_R$. Il existe alors un hyperplan affine H de $\mathbb{P}^N$ avec $N = \binom{n+d}{n} - 1$ tel que :

$$Z = v^{-1}(H)$$

avec v le d-ème plongement de Veronese. Autrement dit, toute hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^n$ peut être réalisée comme l'intersection d'un hyperplan de $\mathbb{P}^N$ avec l'image du plongement de Veronese.

Démonstration. Z est donnée par une équation homogène de degré d :

$$Z = V(f)$$

avec $f \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ un polynôme homogène de degré d. Si l'on écrit :

$$f = \sum_{|\underline{p}|=d} a_{\underline{p}} X^{\underline{p}} \neq 0$$

où la somme porte sur les multi-indices positifs de degré d, on peut associer à f la section :

$$g = \sum_{|\underline{p}|=d} a_{\underline{p}} Z_{\underline{p}} \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \setminus \{0\}.$$

On observe alors, que via l'identification :

$$v^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$$

on a $v^*g = f$ et ainsi :

$$Z = V(f) = V(v^*g) = v^{-1}(V(g))$$

avec $V(g)$ un hyperplan affine. □

Le corollaire suivant peut aussi se voir comme une conséquence de la construction Proj.

Corollaire 34. Soit $n \geq 1$ et P un polynôme homogène de degré d à coefficients dans k un corps parfait. Alors $D(P) = \mathbb{P}^n \setminus V(P)$ est un ouvert affine de $\mathbb{P}^n$, et si P est irréductible, le groupe de Picard de $D(P)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Démonstration. Par ce qui précède, on peut écrire $D(P)$ comme l'image du plongement de Veronese privée d'un hyperplan, ce qui est clairement affine car c'est un fermé d'un ouvert standard de $\mathbb{P}^N$.
Pour ce qui est du groupe de Picard, il suffit d'observer que si P est irréductible on a :

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \setminus V(P)) = \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n)/\langle \mathrm{div}(P) \rangle = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

□

11 Un lemme magique

Le lemme suivant peut-être trouvé dans Vakil (11.1.1).

Lemme 35. Considérons deux morphismes de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ et $\mathcal{P}$ une propriété des morphismes de schémas qui soit stable par changement de base et par composition. Supposons que $g \circ f$ et la diagonale de g, $\Delta g : Y \longrightarrow Y \times_Z Y$, ont la propriété $\mathcal{P}$. Alors f a la propriété $\mathcal{P}$.

Démonstration. On décompose f de la façon suivante :

$$X \overset{\gamma=(\mathrm{id},f)}{\longrightarrow} X \times_Z Y \longrightarrow Y.$$

On va montrer que ces deux flèches satisfont $\mathcal{P}$.
Pour cela il suffit de constater que les deux diagrammes suivants sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \times_Z Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta g"'] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

□

Voici tout de suite une application de ce lemme.

Proposition 36. Soit R un anneau noéthérien, X/R un schéma noéthérien, L un fibré en droites très ample et L' un fibré en droites engendré par un nombre fini de sections globales. Alors $L \otimes L'$ est très ample.

Démonstration. Comme L est très ample on a une immersion fermée :

$$i : X \longrightarrow \mathbb{P}^m_R$$

telle que $i^*\mathcal{O}(1) = L$. Comme L' est engendré par un nombre fini de sections globales, on a aussi un morphisme :

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_R$$

tel que $f^*\mathcal{O}(1) = L'$.
On considère alors les morphismes :

$$X \xrightarrow{(i,f)} \mathbb{P}^m_R \times_R \mathbb{P}^n_R \longrightarrow \mathbb{P}^n_R.$$

La composée des deux est i donc est une immersion fermée et la diagonale du second est la diagonale de l'espace projectif sur la base $\mathbb{P}^n_R$, qui est un morphisme séparé, donc cette diagonale est une immersion fermée, et comme les immersions fermées sont stables par changement de base et par composition, le lemme magique 35 donne que (i,f) est une immersion fermée.
On applique alors le plongement de Sègre pour obtenir une immersion fermée :

$$j : X \xrightarrow{(i,f)} \mathbb{P}^m_R \times \mathbb{P}^n_R \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

et on a alors avec les notations de 30 :

$$\sigma^*\mathcal{O}(1) = p^*\mathcal{O}(1) \otimes q^*\mathcal{O}(1)$$

et ainsi :

$$j^*\mathcal{O}(1) = L \otimes L'$$

comme voulu. □

En particulier les fibrés en droites très amples sont stables par produit tensoriel.

12 Dualité de Serre

Théorème 37. Soit k un corps parfait, X/k une variété projective lisse de dimension d et E un fibré vectoriel sur X. On a un isomorphisme canonique :

$$H^i(X,E) \cong H^{d-i}(X, E^* \otimes \mathcal{K}_{X/k})$$

pour tout i.

13 Un peu de classification des variétés

Soit k un corps parfait et X/k une variété projective lisse géoémtriquement connexe de dimension d.

Remarque 38. On rappelle que "géométriquement connexe" signifie que $X' = X \times_k \overline{k}$ est connexe, avec $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.
Cela implique que X est connexe (si $X = U \sqcup V$, alors $X' = U' \sqcup V'$), mais c'est bien plus fort : par exemple la variété réelle $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est projective et lisse sur $\mathbb{R}$ (notez d'ailleurs qu'elle n'a pas de point réel), mais $X' = \operatorname{Spec} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \operatorname{Spec} \mathbb{C} \sqcup \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ n'est pas connexe.
De plus, mentionnons qu'un schéma réduit lisse sur un corps parfait k est connexe si et seulement si il est intègre : en effet, les $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux réguliers donc sont intègres.
Enfin, si X/k est une variété projective lisse géométriquement connexe, on a :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = k.$$

En effet une section globale de $\mathcal{O}_X$ est un morphisme $X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ dont l'image est un fermé propre irréductible de $\mathbb{A}^1$, donc un point q, et en changeant de base à $\overline{k}$, on obtient que q est géométriquement connexe donc c'est un k-point (on peut s'en convaincre en s'inspirant de l'exemple précédent).

Le genre géométrique de X est défini par :

$$P_g(X) = \dim H^0(X, \mathcal{K}_{X/k})$$

et le genre arithmétique est :

$$P_a(X) = (-1)^d(\chi(\mathcal{O}_X) - 1).$$

Remarque 39. Si X est une courbe, la dualité de Serre 37 donne :

$$h^i(\mathcal{O}_X) = h^{1-i}(\mathcal{K}_{X/k})$$

qui est nul si $i > 1$. Ainsi, d'après la remarque précedente 38 :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) = 1 - h^0(\mathcal{K}_{X/k})$$

donc :

$$P_a(X) = P_g(X).$$

Notons que la proposition 15 donne, pour $d \geq 0$:

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}$$

et pour $d < 0$:

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = (-1)^n \binom{-d-1}{n}$$

qui vaut 0 si $d > -n-1$.

Le calcul du genre arithmétique ou géométrique d'une hypersurface est très facile.

Théorème 40. Soit Z une hypersurface irréductible de degré $d \geq 1$ dans $\mathbb{P}^n$ avec $n \geq 2$. On a :

$$P_a(Z) = \binom{d-1}{n}.$$

Si Z est également lisse, on a aussi :

$$P_g(Z) = P_a(Z).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux qui définit Z. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

avec i l'inclusion de Z dans $\mathbb{P}^n$. Ainsi, par la formule $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = H^i(\mathbb{P}^n, i_*\mathcal{O}_Z)$, on a :

$$\chi(\mathcal{O}_Z) = \chi(i_*\mathcal{O}_Z) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) - \chi(\mathcal{I}).$$

De plus :

$$\mathcal{I} \cong \mathcal{O}(-[Z]) \cong \mathcal{O}(-d)$$

et donc :

$$\chi(\mathcal{O}_Z) = 1 - (-1)^n \binom{d-1}{n}.$$

On a donc :

$$P_a(Z) = (-1)^{n-1}\left(-(-1)^n \binom{d-1}{n}\right) = \binom{d-1}{n}.$$

Supposons maintenant que Z est lisse. On a :

$$\mathcal{K}_Z = i^*\mathcal{K}_{\mathbb{P}^n} \otimes i^*\mathcal{O}(d) = i^*\mathcal{O}(d-n-1)$$

donc on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-n-1) \longrightarrow \mathcal{O}(d-n-1) \longrightarrow i_*\mathcal{K}_Z \longrightarrow 0$$

qui donne la formule voulue en appliquant la suite longue en cohomologie. □

En particulier, une courbe de genre 2 ne se plonge pas dans $\mathbb{P}^2$.
On définit, pour $j \geq 0$, le j-ème plurigenre de X par :

$$P_{g,j} = H^0(X, \mathcal{K}_{X/k}^{\otimes j})$$

et en choisissant une base on obtient une application rationnelle :

$$\varphi_j : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_{g,j}-1}$$

appelée j-ème application canonique.
On définit aussi l'anneau canonique de X :

$$\bigoplus_{j \geq 0} H^0(X, \mathcal{K}_{X/k}^{\otimes j}).$$

Enfin, la dimension de Kodaira de X, notée $\kappa(X)$, vaut $-\infty$ si $P_{g,j} = 0$ pour tout $j \geq 1$ et sinon vaut :

$$\kappa(X) = \sup_{j \geq 1} \dim \varphi_j(X).$$

Ainsi :

$$-\infty \leq \kappa(X) \leq \dim(X)$$

et par exemple $\kappa(\mathbb{P}^n) = -\infty$ pour $n \geq 1$. Pour une courbe elliptique E le faisceau canonique est trivial et donc $\kappa(E) = 0$.

Définition 41. X est dite de type général si $\kappa(X) = \dim X$ (c'est en fait souvent le cas comme on le verra), elle est dite de Fano si $\mathcal{K}_{X/k}^{-1}$ est ample et elle est de Calabi-Yau si $\mathcal{K}_{X/k}$ est de torsion dans le groupe de Picard.

Cette classification a des implications sur la question des points rationnels de X.

14 Courbes

14.1 Théorème de Bézout pour les courbes planes

Soit k un corps algébriquement clos et X, Y deux hypersurfaces réduites de $\mathbb{P}^2$ définies par des polynômes homogènes P, Q de degrés d_1 et d_2. On suppose que X et Y n'ont pas de composante irréductible en commun (autrement dit que P et Q sont premiers entre eux).
L'intersection schématique $Z = X \cap Y$ est alors un fermé de dimension 0 (pas nécessairement réduit) défini par le faisceau d'idéaux :

$$\mathcal{I}_Z = \mathcal{I}_X + \mathcal{I}_Y.$$

Ainsi Z est le spectre d'un anneau artinien, n'a que des points fermés, et pour chaque $z \in Z$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,z}$ est un k-espace vectoriel de type fini dont la dimension est la *multiplicité d'intersection* de X et Y en z. On a donc naturellement :

$$\chi(\mathcal{O}_Z) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \sum_{z \in Z} \dim_k \mathcal{O}_{Z,z}$$

qui donne le nombre de points d'intersections de X et Y en comptant la multiplicité.
Or on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{I}_X \oplus \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0.$$

Autrement dit :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-d_1 - d_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0.$$

Or on sait que :

$$i_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} / \mathcal{I}_Z$$

donc on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-d_1 - d_2) \longrightarrow \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_Z) = \chi(i_*\mathcal{O}_Z) &= \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) - \chi(\mathcal{O}(-d_1)) - \chi(\mathcal{O}(-d_2)) + \chi(\mathcal{O}(-d_1 - d_2)) \\ &= 1 - \frac{(d_1+1)(d_1+2)}{2} - \frac{(d_2+1)(d_2+2)}{2} + \frac{(d_1+d_2+1)(d_1+d_2+2)}{2} \\ &= d_1 d_2.\end{aligned}$$

On en déduit le théorème de Bézout.

Théorème 42. Soit k un corps algébriquement clos, X et Y deux fermés réduits de $\mathbb{P}^2$ définis par des polynômes homogènes P et Q de degrés d_1 et d_2. Si X et Y n'ont pas de composante irréductible en commun, alors leur nombre de points d'intersection comptés avec multiplicité est $d_1 d_2$.

Remarque 43. Ce théorème peut être largement généralisé. D'abord, si on prend un corps non algébriquement clos, la même preuve fonctionne mais il faut prendre en compte, non seulement la multiplicité d'intersection, mais aussi le degré résiduel des points d'intersection.
En plus haute dimension, l'idée est que le produit tensoriel dérivé de $i_{X,*}\mathcal{O}_X$ et $i_{Y,*}\mathcal{O}_Y$ dans la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathbb{P}^n$ "représente bien" l'intersection de X et Y. C'est exactement ce qu'on a fait dans la preuve ci-dessus, on a choisi des résolutions de ces deux faisceaux et on a calculé leur produit tensoriel pour obtenir une résolution de $\mathcal{O}_Z$.

14.2 Théorème de Riemann-Roch

Soit k un corps parfait et X/k une courbe projective lisse géométriquement connexe de genre g (le genre est aussi bien le genre arithmétique que le genre géométrique d'après 39, donc il est positif). On note K le corps des fonctions de X.
Si L est un fibré en droites sur X, la dualité de Serre 37 donne :

$$h^1(L) = h^0(\kappa_X \otimes L^{-1}) \qquad (*)$$

et $h^i(L) = 0$ pour $i > 1$.
On peut reformuler cela dans le langage des diviseurs via l'isomorphisme 9 :

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

On rappelle que K_X est un diviseur canonique, c'est à dire un diviseur associé au fibré en droites $\mathcal{K}_X$. Concrètement, K_X est le diviseur d'une 1-forme méromorphe non nulle sur X. Étant donné un diviseur D, on pose :

$$\mathcal{L}(D) = H^0(X, \mathcal{O}(D)) = \{f \in K \setminus \{0\} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

et $\ell(D) = \dim \mathcal{L}(D)$ qui est fini d'après 23 et ne dépend que de la classe de D dans le groupe de classes.
On a alors, en appliquant $(*)$ au fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ associé au diviseur D :

$$h^1(\mathcal{O}(D)) = \ell(K_X - D).$$

On en déduit la formule suivante.

Proposition 44. Pour tout diviseur D sur X on a :

$$\chi(D) = \ell(D) - \ell(K_X - D)$$

avec $\chi(D)$ défini comme $\chi(\mathcal{O}(D))$.

On définit le degré d'un diviseur $D = \sum_x n_x[x]$ par la formule suivante :

$$\deg(D) = \sum_x n_x [k(x) : k]$$

qui est bien défini car les points de codimension 1 d'une courbe sont les points fermés. Notez que sur un corps algébriquement clos, c'est simplement la somme des n_x.

Théorème 45. Soit k un corps parfait, X une courbe (projective lisse géométriquement connexe) sur k et D un diviseur de X. On a :
$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Démonstration. Soit D un diviseur sur X et x un point fermé de X. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(D - [x]) \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow j_* k(x) \longrightarrow 0$$

avec $j_* k(x)$ le faisceau gratte-ciel en x. Or le faisceau $j_* k(x)$ est flasque donc acyclique et ainsi :

$$\chi(j_* k(x)) = [k(x) : k].$$

On a donc :
$$\chi(D) = \chi(D - x) + [k(x) : k].$$
On en déduit immédiatement la formule suivante pour tout diviseur D :

$$\chi(D) = \chi(0) + \deg(D).$$

Enfin, on a :
$$\chi(0) = \ell(0) - \ell(K) = 1 - g$$
par définition de g. $\square$

Le théorème de Riemann-Roch a de nombreuses conséquences immédiates.

Corollaire 46. Le degré d'un diviseur principal est nul. En particulier, si $\deg(D) < 0$, alors $\ell(D) = 0$. De plus, pour tout diviseur D on a l'inégalité de Riemann suivante :

$$\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g.$$

On a aussi :
$$\deg(K_X) = 2g - 2.$$
Si $\deg(D) > 2g - 2$ alors on a :
$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Démonstration. Soit $f \in K^\times$ et $D = \operatorname{div}(f)$. Puisque D est nul dans le groupe de classes, on a $\ell(D) = \ell(0) = 1$ et $\ell(K_X - D) = \ell(K_X) = g$ et donc :

$$1 - g = \deg(\operatorname{div}(f)) + 1 - g$$

d'où le fait que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$. L'inégalité de Riemann est claire. Ensuite, en appliquant Riemann-Roch à $D = K_X$ on obtient :
$$\ell(K) - \ell(0) = \deg(K_X) + 1 - g$$
donc $\deg(K_X) = 2g - 2$. Si $\deg(D) > 2g - 2$, alors $\deg(K_X - D) < 0$ donc $\ell(K_X - D) = 0$ et ainsi :

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

$\square$

Puisque le degré d'un diviseur principal est nul, on obtient un morphisme bien défini :

$$\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}.$$

Ce morphisme est surjectif si $k = \overline{k}$ ou s'il existe un point rationnel, et en général on sait simplement qu'il n'est pas nul.
Le noyau est noté $\mathrm{Cl}^0(X)$. Par l'isomorphisme 9, on peut aussi parler du degré d'un fibré en droites et du groupe de Picard de degré 0, noté $\mathrm{Pic}^0(X)$. Pour une courbe elliptique sur k algébriquement clos, ce groupe s'identifie au groupe des points fermés.
Voici quelques applications de Riemann-Roch en géométrie arithmétique.

Proposition 47. Soit X/k une courbe (projective lisse géométriquement connexe) sur un corps parfait k.
Si X est de genre 1 et possède un diviseur de degré 1 (ce qui revient à dire que les degrés des extensions résiduelles sont premiers entre eux), alors X a un point rationnel et est donc une courbe elliptique sur k.
Si X est de genre $g \geq 2$, il existe une extension ℓ/k de degré au plus $2g-2$ telle que $X(\ell) \neq \emptyset$.

Démonstration. Dans le premier cas, on a, pour D de degré 1 :

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = 1$$

et $\deg(K_X - D) = -1$ donc $\ell(K_X - D) = 0$ et ainsi :

$$\ell(D) = 1.$$

Ainsi il existe $f \in K^\times$ tel que $D + \operatorname{div}(f) \geq 0$, et quitte à remplacer D par $D + \operatorname{div}(f)$ qui lui est équivalent on peut supposer que $D \geq 0$. Or D est de degré 1 et est positif donc D consiste en un seul point de degré 1, c'est à dire un point rationnel.
Dans le second cas, on a $\ell(K_X) > 0$ donc quitte à ajouter un diviseur principal on peut supposer $K_X \geq 0$. On a donc un diviseur positif de degré $2g-2 > 0$ donc il existe un point de degré au plus $2g-2$. $\square$

Le résultat suivant est une globalisation d'un phénomène bien connu sur les extensions d'anneaux de Dedekind. On l'a déjà vu.

Théorème 48. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini entre courbes (projectives lisses géométriquement connexes) sur k un corps parfait, et soit L un fibré en droites sur Y. On a alors :

$$\deg(f^*L) = \deg(f)\deg(L).$$

De façon équivalente, si f est séparable, pour tout D un diviseur sur Y, on a :

$$\deg(f^*D) = \deg(f)\deg(D).$$

Corollaire 49. (Riemann-Hurwitz pour les courbes) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini séparable entre courbes (projectives lisses géométriquement connexes) sur k un corps parfait. On a :

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \deg(R_{X/Y}).$$

Démonstration. Partons de 12 :

$$\mathcal{K}_X = f^*\mathcal{K}_Y \otimes \mathcal{O}(R_{X/Y}).$$

On prend alors le degré et on applique le théorème précédent 48 :

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \deg(R_{X/Y}).$$

$\square$

La formule de Riemann-Hurwitz a des conséquences non-triviales.

Corollaire 50. Soient X, Y deux courbes (projectives lisses géométriquement connexes) sur k un corps parfait.

- S'il existe un morphisme fini $X \longrightarrow Y$, alors $g(X) \geq g(Y)$.
- Si $g(X) = g(Y) = 1$, tout morphisme fini séparable $X \longrightarrow Y$ est étale.
- Si $g(X) = g(Y) \geq 2$, tout morphisme fini séparable $X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme.
- Si $g(Y) = 1$ et s'il existe $X \longrightarrow Y$ fini étale, alors $g(X) = 1$.
- Tout morphisme fini étale $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est un isomorphisme (ceci entraîne que $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe).

Démonstration. Pour le premier point, on se ramène au cas où le morphisme f est séparable (car un morphisme purement inséparable préserve le genre) on a, avec d le degré de f et r le degré du diviseur de ramification :

$$2g(X) - 2 = d(2g(Y) - 2) + r$$

donc :

$$2g(X) - 2g(Y) = r + 2 + 2g(Y)(d-1) - 2d \geq 0$$

si $g(Y) \geq 1$, et sinon l'inégalité à montrer est évidente.
Pour le second point, on a :

$$0 = r$$

donc $R_{X/Y} = 0$, et f est étale.
Pour le troisième point, on a :

$$(2g-2)(d-1) + r = 0$$

donc $d = 1$ et f est un isomorphisme, car $2g - 2 > 0$.
Pour le quatrième point, on a :

$$2g(X) - 2 = 0$$

donc $g(X) = 1$. Notez qu'un morphisme étale est séparable.
Enfin, soit $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un morphisme fini étale (donc séparable). On a donc :

$$2g(X) - 2 = -2d$$

donc $g(X) = 1 - d$ et $d = 1$. □

14.3 Classification des courbes

Dans cette partie, courbe signifie toujours *courbe projective lisse géométriquement connexe* sur k un corps parfait.
Commençons par étudier les courbes de genre 0.

Proposition 51. Soit X une courbe de genre 0 qui possède un k-point. Alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.
En particulier, si X est une courbe de genre 0, il existe ℓ/k une extension finie telle que $X \times_k \ell$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

Démonstration. Prenons P un k-point de X. Le théorème de Riemann-Roch 45 donne :

$$\ell([P]) = \deg([P]) + 1 - g(X) = 2$$

car $\deg([P]) > -2$. Ainsi on a une base $(1, f)$ de $\mathcal{L}([P])$. Ceci donne un morphisme :

$$g : X \xrightarrow{[1,f]} \mathbb{P}^1$$

Le morphisme g est fini car il n'est pas constant et c'est un morphisme entre courbes lisses (voir le cours de Tamiozzo).
On a donc :

$$1 = \deg(\mathcal{L}([P])) = \deg(g^* \mathcal{O}(1)) = \deg(g)$$

d'après 48, donc g est un isomorphisme. □

Si X est de genre 1, on a une application :

$$J : X(k) \longrightarrow \mathrm{Cl}^1(X)$$

avec $\mathrm{Cl}^1(X)$ l'ensembel des classes de diviseurs de degré 1, qui envoie x sur $[x]$. Cette application est surjective car si D est de degré 1, Riemann-Roch donne $\ell(D) = 1$ donc on peut supposer $D \geq 0$ et ainsi D est (équivalent à) un point.
Elle est injective car si $[x] \equiv [y]$ avec $x \neq y$, il existe f de diviseur $[x] - [y]$, et f réalise un isomorphisme avec $\mathbb{P}^1$, ce qui est absurde.

Ainsi, si X possède un k-point, $X(k)$ est un $\mathrm{Cl}^0(X)$-torseur, et quitte à choisir un k-point, o, on obtient la fameuse bijection d'Abel-Jacobi :
$$X(k) \cong \mathrm{Cl}^0(X)$$
via $x \mapsto [x]-[o]$. Ainsi X est une courbe elliptique et :
$$\mathrm{Pic}(X) \cong X(k) \times \mathbb{Z}.$$

14.4 Application : Le groupe de Picard du cercle

Le but de ce paragraphe est de calculer le groupe de Picard de :
$$X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$
le cercle réel. On va montrer que :
$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
tandis que $\mathrm{Pic}(X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 0$.
Notez que ce n'est pas en contradiction avec le fait que la cohomologie d'un faisceau de modules soit inchangée après extension des scalaires car $\mathcal{O}_X^\times$ n'est pas un faisceau de modules.
Pour faire ce calcul, on commence par considérer la courbe projective associée :
$$Y = V(X^2+Y^2-Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2.$$
Par le theorème 40, Y est une courbe projective lisse géométriquement connexe de genre :
$$g(Y) = \binom{1}{2} = 0.$$
Comme Y possède un point réel, on a :
$$Y \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$
et donc $\mathrm{Cl}(Y) = \mathbb{Z}$, engendré par la classe d'un diviseur de degré 1. Or :
$$X = Y \setminus \{I\}$$
avec I le point fermé associé au point complexe $[1:i:0]$ modulo l'action de Galois. On a alors :
$$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cl}(Y)/\langle [I] \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
car I est de degré 2.
Puisque X est lisse, c'est aussi le groupe de Picard de X d'après 9.
Sur $\mathbb{C}$, la situation est différente. Posons $X' = X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $Y' = X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on a cette fois :
$$X' = Y' \setminus \{[1:i:0],[1:-i:0]\}$$
donc :
$$\mathrm{Cl}(X') = (\mathrm{Cl}(Y')/\langle [1:i:0] \rangle)/\langle [1:-i:0] \rangle = 0$$
car on a retiré un point de degré 1.
Ceci donne un calcul du groupe des classes de l'anneau de Dedekind $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ qui n'est pas trivial a priori.

14.5 Fibrés en droites amples et très amples sur les courbes

Théorème 52. (Caractérisation des immersions fermées sur un corps algébriquement clos) Soit k un corps algébriquement clos, X une variété projective sur k, L un fibré en droites sur X et $s_0, \ldots, s_n$ des sections globales de L qui engendrent L.
On note $V \subseteq H^0(X,L)$ l'espace engendré par les s_i. Le morphisme :
$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
associé aux s_i est une immersion fermée si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

— Pour tous x, y points fermés distincts de X, il existe $s \in V$ tel que $s(x) = 0$ et $s(y) \neq 0$.

— Pour tout x point fermé de X, l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_x L_x / \mathfrak{m}_x^2 L_x$ est engendré par les s_x, pour $s_x \in V$ nulle en x.

Démonstration. Remarquons d'abord que φ est injective sur les points fermés si et seulement si, pour tous x, y fermés distincts, il existe un hyperplan projectif H qui contient $\varphi(x)$ mais pas $\varphi(y)$, ce qui revient à dire qu'il existe $s \in V$ nul sur x mais pas sur y. Le premier point est donc équivalent à ce que φ soit injective sur les points fermés.
Clarifions à présent le second point. Soit x un point fermé de X, considérons la différentielle de φ en x :

$$d\varphi_x : T_x X \longrightarrow T_{\varphi(x)} \mathbb{P}^n.$$

Celle-ci est injective si et seulement si la codifférentielle :

$$\nu : \Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes k(\varphi(x)) \longrightarrow \Omega_X \otimes k(x)$$

est surjective. Or $\Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes k(\varphi(x))$ est l'espace des $u = \sum_{i=0}^n u_i dX_i$ qui vérifient :

$$\sum_i u_i s_i(x) = 0.$$

En tensorisant par L qui est inversible, on obtient que ν est surjective si et seulement si :

$$\Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes L \otimes k(\varphi(x)) \longrightarrow \mathfrak{m}_x L_x / \mathfrak{m}_x^2 L_x$$

est surjective, ce qui revient à dire que l'espace de droite est engendré par les $\sum_i u_i s_i$ qui s'annulent en x.
Ainsi le deuxième point équivaut à ce que la différentielle de φ soit injective en tout point fermé.
Clairement une immersion fermée vérifie ces deux conditions. La réciproque utilise le lemme de Nakayama et le fait que k est algébriquement clos (dans le cas d'une courbe, il est assez facile de voir que φ est un homéomorphisme sur son image). □

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 53. Soit k un corps algébriquement clos et X/k une *courbe* projective (i.e. propre) lisse géométriquement connexe et soit D un diviseur tel que pour tous points fermés x et y on ait :

$$\ell(D - [x] - [y]) + 2 = \ell(D).$$

Alors il existe $s_0, \ldots, s_n$ des sections globales de $\mathcal{O}(D)$ qui engendrent $\mathcal{O}(D)$ et qui donnent une immersion fermée $X \longrightarrow \mathbb{P}^n$.
En particulier, D (ou plutôt $\mathcal{O}(D)$) est très ample.

Démonstration. Soit x un point fermé de X. On a nécessairement $\ell(D - [x]) = \ell(D) - 1$ donc il existe $s \in \mathcal{L}(D) \setminus \mathcal{L}(D - [x])$, i.e. s engendre $\mathcal{O}(D)_x$. Comme $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ est de dimension finie, on en déduit que $\mathcal{O}(D)$ est engendré par un nombre fini de sections globales. On montre maintenant le critère du théorème 52, avec $V = H^0(X, \mathcal{O}(D))$. Si $x \neq y$ sont deux points fermés distincts, la première condition est claire car on trouve $s \in \mathcal{L}(D - [x]) \setminus \mathcal{L}(D - [x] - [y])$.
Pour la seconde, on trouve $s \in \mathcal{L}(D - [x]) \setminus \mathcal{L}(D - 2[x])$ de sorte que s s'annule à l'ordre 1 en x, ce qui est exactement ce qu'on veut. □

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 54. Soit k un corps parfait et X/k une courbe projective lisse de genre g.

— Si D est un diviseur de degré au moins $2g + 1$, alors toute base de $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ donne une immersion fermée vers $\mathbb{P}^{\ell(D)-1}$ et D est très ample.

— Les diviseurs amples sur X sont exactement ceux de degré strictement positif.

— Enfin, X est de type général si et seulement si $g \geq 2$.

Démonstration. Le premier point découle directement du corollaire de Riemann-Roch 46 si k est algébriquement clos. Dans le cas quelconque, on utilise le fait qu'un morphisme f est une immersion fermée si et seulement si le morphisme $f \times_k \overline{k}$ est une immersion fermée, car $\overline{k}$ est fidèlement plat sur k.
Le second point découle du premier via 26 et du fait qu'un diviseur de degré 0 n'est pas ample : si D est de degré 0 est ample, il est engendré par un nombre fini de sections globales donc il est équivalent à un diviseur effectif de degré 0, c'est à dire au diviseur nul, et on sait que le diviseur nul n'est pas ample par 28.
Enfin, si $g \geq 2$, alors $\deg(K_{X/k}) > 0$ donc $K_{X/k}$ est ample et X est de type générique. Sinon, $\deg(K_{X/k}) \leq 0$ donc X n'est pas de type générique car aucune puissance de $K_{X/k}$ n'est engendrée par ses sections globales. $\square$

15 Polynômes de Hilbert

Théorème 55. Soit k un corps parfait, soient $n \geq 1$, X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n$ de dimension d et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Il existe un (unique) polynôme $P \in \mathbb{Q}[T]$ de degré au plus d, combinaison entière des polynômes de Hermite (i.e. à valeurs entières sur les entiers), tel que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on ait :

$$\chi(\mathcal{F}(m)) = P(m)$$

avec $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes i^*\mathcal{O}(m)$.

Démonstration. Il est clair qu'on peut se ramener au cas k algébriquement clos (ça ne change pas la caractéristique d'Euler car ça ne change pas les nombres de Betti).
Voyons d'abord le cas $d = 0$: c'est immédiat car $\mathcal{O}(1)$ est trivial sur X.
Supposons maintenant $d \geq 1$. Par le même raisonnement que pour 24, comme k est algébriquement clos, on trouve H un hyperplan de $\mathbb{P}^n$ tel que, en posant $Y = H \cap X$, on ait :

$$\dim(Y) < d.$$

Introduisons des notations pour les immersions fermées en jeu :

$$Y \xrightarrow{j} X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n.$$

On note $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux qui définit X, de sorte qu'on a une suite exacte, par définition de l'intersection schématique :

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{O}(-H) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow (ij)_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0.$$

On la tire en arrière sur X :

$$i^*\mathcal{O}(-H) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

car le tiré en arrière est exact à droite et car la flèche $i^*\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est nulle (on peut se convaincre que le dernier terme est bien celui-ci en se ramenant au cas affine).
On tensorise par $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{C}$ supporté sur Y. Notons que la première flèche est injective sur la germe d'un point $z \in X \setminus Y$ car c'est la tensorisation par $\mathcal{F}_z$ d'un isomorphisme : $[i^*\mathcal{O}(-H)]_z = \mathcal{O}_{X,z}$.
Ainsi on a une suite exacte de faisceaux cohérents (on est sur un schéma noéthérien) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ supportés sur Y. On en déduit l'énoncé voulu par récurrence sur d. $\square$

Le polynôme P est appelé *polynôme de Hilbert* de $\mathcal{F}$ sur X. En conséquence de 23, on a pour m assez grand :

$$h^0(X, \mathcal{F}(m)) = P(m) = O(m^d)$$

quand m tend vers l'infini.

Corollaire 56. Soit k un corps parfait, X un schéma intègre projectif sur k de dimension d et L un fibré en droites sur X. On a :

$$h^0(X, L^{\otimes m}) = O(m^d)$$

quand m tend vers l'infini.

Démonstration. Si L est très ample, cela découle directement de ce qui précède, en l'appliquant à $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.
En général, il existe A très ample car X est projectif, et comme A est ample, pour k assez grand le fibré en droites $A^{\otimes k} \otimes L^{-1}$ est engendré par un nombre fini de sections globales et donc on a un morphisme injectif $\mathcal{O}_X \hookrightarrow A^{\otimes k} \otimes L^{-1}$ car X est intègre, et en tensorisant par L on obtient que L se plonge dans un fibré en droites très ample B, donc :

$$h^0(X, L(m)) \leq h^0(X, B(m)) = O(m^d).$$

□