TD 3 : intervalles de confiance

Les questions marquées d'un astérisque (*) *sont facultatives.*

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec λ inconnu.

1. Rappeler la formule d'un estimateur $\hat{\lambda}_n$ du maximum de vraisemblance de λ.
2. Dans cette question uniquement, on suppose qu'il existe $\lambda_0 > 0$ connu tel que $\lambda \geq \lambda_0$.
   (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de $1/\lambda$.
   (b) En déduire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de λ.
3. (a) Énoncer le théorème central limite sur la moyenne empirique $\bar{X}_n$.
   (b) Montrer qu'il existe $\sigma(\lambda) > 0$ tel que sous le paramètre λ,
   $$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma(\lambda)^2) \quad \text{en loi}$$
   et donner la formule de $\sigma(\lambda)$.
   (c) En utilisant le théorème de Slutsky, en déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ de λ.
4. (a) Trouver une fonction ϕ telle que sous le paramètre λ,
   $$\sqrt{n}\left(\phi(\bar{X}_n) - \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{en loi.}$$
   (b) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ de λ.

Exercice 2. On sonde n personnes sur k questions où elles peuvent répondre oui ou non. On suppose que les personnes répondent indépendamment les unes des autres (mais les réponses d'une même personne aux questions ne sont, elles, pas indépendantes), et que la probabilité de répondre oui à une question donnée ne dépend pas de la personne. On note p_j la probabilité qu'une personne dise oui à la question j, et $X_{i,j}$ la variable qui vaut 1 si la personne i dit oui à la question j et 0 sinon.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de p_j pour tout j.
2. En déduire une région de confiance de niveau $1-\alpha$ pour le vecteur $p = (p_1, \ldots, p_k)$.

Exercice 3. On répète de manière indépendante une expérience ayant une probabilité p de succès. On suppose $p \geq p_0$ pour $p_0 > 0$ connu.

1. Combien de répétitions faut-il faire au minimum pour être sûr avec probabilité au moins $1-\alpha$ d'obtenir au moins un succès ?
2. Combien de répétitions faut-il faire au minimum pour être sûr avec probabilité au moins $1-\alpha$ d'obtenir au moins k succès ?

Exercice 4. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour (μ, σ^2) inconnu. On admet que la matrice de variance-covariance de (X_1, X_1^2) est

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 2\mu\sigma^2 \\ 2\mu\sigma^2 & 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

1. Énoncer le théorème central limite pour le couple $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2)$.
2. En utilisant la delta-méthode, en déduire la normalité asymptotique de l'estimateur de la variance $\frac{n-1}{n}S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ où $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$.
3. En déduire la normalité asymptotique de S_n^2. *Indication pour vérifier vos calculs : la variance de la limite dépend-elle de μ ?*
4. En déduire un intervalle de confiance de σ^2.
5. **(*)** Démontrer la formule de la matrice de variance-covariance.