Aspects topologiques et géométriques du raisonnement qualitatif sur le temps et l'espace

Gérard Ligozat

LIMSI, Université Paris-Sud

ENS Ulm, 1er février 2016

Raisonnement qualitatif sur le temps et l'espace

- Il s'agit de **modéliser** la façon dont les humains utilisent leur perception du **temps** et de **l'espace** pour développer des activités telles que la **prévision**, la **planification**, le **déplacement** dans l'espace.
- Ces modèles doivent être **informatisables** et permettre **relier les données informatiques** (bases de données temporelles, géographiques, par exemple) à **d'autres représentations** de l'espace et du temps (langage naturel, schémas, croquis, etc.)

Exemples : le temps

- A 20 :15 j'ai allumé la télévision. Jean n'était pas dans le salon. Il est arrivé à 20 :30 et il est resté 2h30mn. J'ai éteint la télévision à 22 :40.
- Lorsque j'ai allumé la télévision, Jean n'était pas dans le salon ; mais il y était lorsque je l'ai éteinte.

Exemples : l'espace

- Pour arriver à l'atelier de carosserie, le robot avance de 3,80m, tourne d'un angle de 83 degrés, puis avance de 2m pour arriver devant la machine.
- Pour arriver à l'atelier de carosserie, le robot avance jusqu'au niveau de l'extincteur, puis tourne à droite, et avance jusqu'à la machine.

Qualitatif ou/et quantitatif

- Certaines éléments de description sont quantitatifs (utilisation de dates, de durées, de coordonnées, de mesures de distance, d'angles, etc.)
- D'autres sont purement qualitatifs : *lorsque*, *après*, *avant*, *pendant*, *à droite*, *à gauche*, *derrière*, *entre*, adjacence, chevauchement.
- Ce sont les données qualitatives qui nous intéressent ici.
- Un nouveau domaine de recherche consacré aux aspects **qualitatifs** est apparu depuis les années 1980, celui du **raisonnement qualitatif sur le temps et l'espace (RQTE)**.

Applications du raisonnement qualitatif sur le temps

- traitement automatique du langage naturel (« TALN »)
- planification et ordonnancement (ex. recette de cuisine, montage d'un objet)
- reconnaissance de plans (*plan recognition*) (ex. clefs de voiture)
- diagnostic (ex. pannes dans les réseaux)
- raisonnement juridique
- systèmes de question-réponse (au-delà des mots-clefs)

Applications du raisonnement qualitatif sur l'espace

- TALN (sémantique des prépositions spatiales) (ex. *dans*)
- systèmes d'information géographique (géolocalisation, aménagement ou gestion du territoire, hydrologie)
- exploration, cartographie et déplacement d'un robot
- reconnaissance des empreintes digitales
- passage d'un récit à un croquis, une carte, et inversement

La Guerre des Gaules

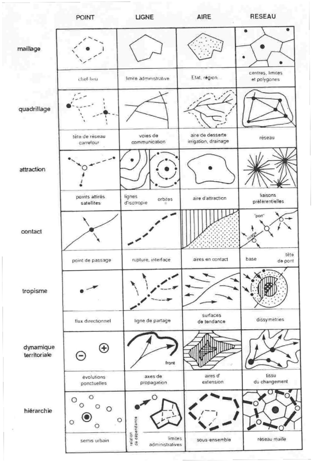
In eadem causa fuerunt Usipetes et Tencteri, quos supra diximus ; qui complures annos Sueborum vim sustinuerunt, ad extremum tamen agris expulsi et multis locis Germaniae triennium vagati ad Rhenum pervenerunt, quas regiones Menapii incolebant. Hi ad utramque ripam fluminis agros, aedificia vicosque habebant ; sed tantae multitudinis adventu perterriti ex eis aedificiis quae trans flumen habuerant demigraverant, et cis Rhenum dispositis praesidiis Germanos transire prohibebant.

Il en a été de même des ***Usipètes et des Tencthères****, que nous avons nommés plus haut ; ils résistèrent pendant nombre d'années aux attaques des Suèves : à la fin cependant, chassés de leurs terres, et après avoir erré trois ans à travers plusieurs cantons de la Germanie, ils* ***arrivèrent près du Rhin, dans des contrées habitées par les Ménapes****, lesquels possédaient, sur l'une et l'autre rive du fleuve, des champs, des maisons et des bourgs. Effrayés à l'arrivée d'une telle multitude,* ***les Ménapes abandonnèrent les habitations qu'ils possédaient au-delà du fleuve****, et, s'étant fortifiés* ***en deçà****, ils s'opposèrent au passage des Germains.*

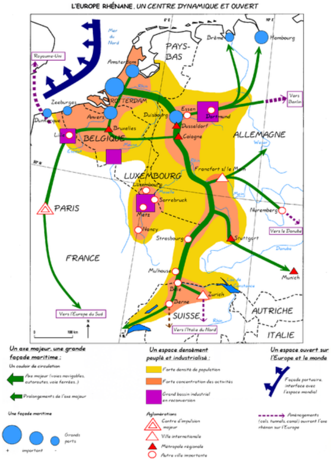
De la langue aux chorèmes

- Comment comprend-on le récit de César à la lecture de ce texte ?
- Construire l'équivalent des « images mentales » que nous manipulons.
- Pour cela, adaptation du langage des chorèmes de Brunet (1980) : les chorèmes permettent de représenter des **processus spatio-temporels**.

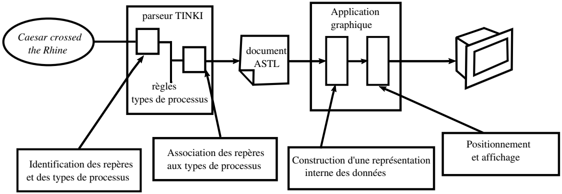
Chorèmes


POINT
LIGNE
AIRE
RESEAU
maillage
chef-lieu
limite administrative
Etat, région
centres, limites et polygones
quadrillage
tête de réseau carrefour
voies de communication
aire de desserte irrigation, drainage
réseau
attraction
points attirés satellites
lignes d'isotropie
orbites
aire d'attraction
liaisons préférentielles
contact
point de passage
rupture, interface
aires en contact
"pont"
base
tête de pont
tropisme
flux directionnel
ligne de partage
surfaces de tendance
dissymétries
dynamique territoriale
front
évolutions ponctuelles
axes de propagation
aires d' extension
tissu du changement
hiérarchie
semis urbain
relation de dépendance
limites administratives
sous-ensemble
réseau maillé

Chorèmes


L'EUROPE RHÉNANE, UN CENTRE DYNAMIQUE ET OUVERT
PAYS-BAS
BELGIQUE
LUXEMBOURG
ALLEMAGNE
FRANCE
SUISSE
AUTRICHE
ITALIE
PARIS
ROTTERDAM
Amsterdam
Brême
Hambourg
Zeebrugge
Anvers
Dunkerque
Bruxelles
Lille
Duisbourg
Essen
Dortmund
Dusseldorf
Cologne
Francfort s/ le Main
Sarrebruck
Metz
Nancy
Strasbourg
Nuremberg
Stuttgart
Munich
Mulhouse
Bâle
Zurich
Berne
Vers Berlin
Vers le Danube
Vers l'Europe du Sud
Vers l'Italie du Nord
100 km
Un axe majeur, une grande façade maritime :
Un couloir de circulation
Axe majeur (voies navigables, autoroutes, voie ferrées..)
Prolongements de l'axe majeur
Une façade maritime
Grands ports
+ important -
Un espace densément peuplé et industrialisé :
Forte densité de population
Forte concentration des activités
Grand bassin industriel en reconversion
Aglomérations
Centre d'impulsion majeur
Ville internationale
Métropole régionale
Autre ville importante
Un espace ouvert sur l'Europe et le monde
Façade portuaire, interface avec l'espace mondial
Aménagements (cols, tunnels, canal) ouvrant l'axe rhénan sur l'Europe

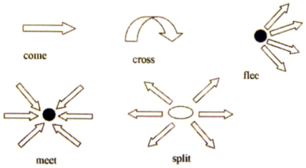
Architecture générale du système



- Un **analyseur syntaxique** (TINKI) est chargé des tâches suivantes :
  - Repérer et catégoriser les **repères** (*landmarks*) et les **types de processus spatio-temporels** (*action patterns*) du texte ;
  - assigner un type aux repères ;
  - assigner un type de processus spatio-temporel à chaque entité spatiale.

Architecture générale du système

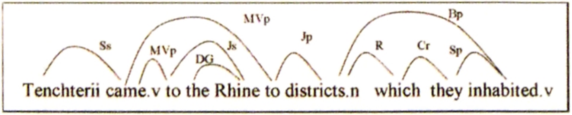
- Le résultat de l'analyse est une représentation dans le langage ASTL en termes de **scènes** qui comportent un **texte**, des **acteurs** et des **actions**.
- La représentation ASTL est alors passée au module graphique qui se charge de la construction d'une représentation utilisant des schémas de type chorème.



Un exemple

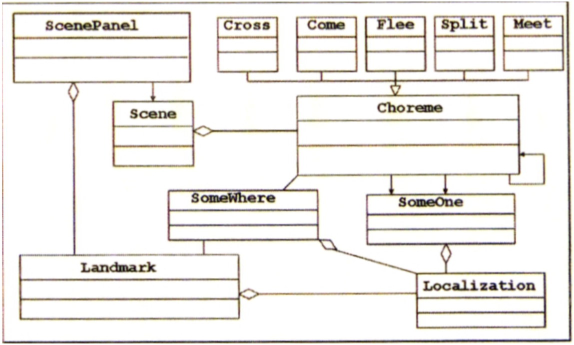
The Tenchterii came to the Rhine to districts which they inhabited

- La résolution de la co-référence (*they* = *les Ménapes* est effectuée dans un pré-traitement).
- L'analyse syntaxique fournit la structure illustrée dans la figure.
- Une **scène** est associée à *came*, qui a un **acteur**, et une **position**.



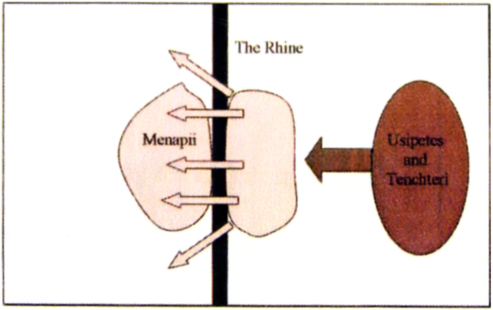
Analyse syntaxique d'une phrase

Le composant de visualisation



- Un canevas ScenePanel est créé pour recevoir les objects spatio-temporels et leur associer des objets graphiques dont la position est calculée par l'objet Localisation.

Représentation symbolique

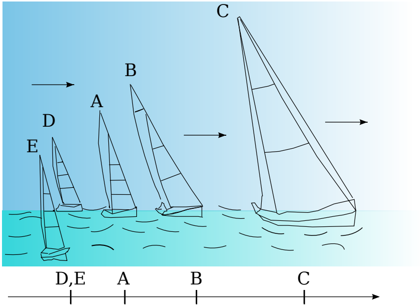


Une représentation possible du schéma mental après lecture du texte.

Un premier exemple : le calcul des points

- Parmi les formalismes qui vont nous intéresser, le plus simple est **calcul des points**.
- Il s'agit de raisonner sur des relations qualitatives entre **points** d'un axe orienté.
- On considère trois relations : **précède** notée « $<$ », **suit** notée « $>$ », et **égale**, notée « *eq* ».

Une régate : reportage



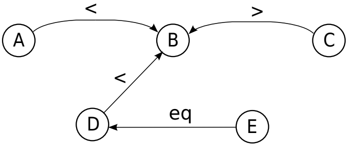
Premier reporter :

1. A se trouve derrière B ;
2. C est devant B ;
3. D est derrière B ;
4. E est au même niveau que D.

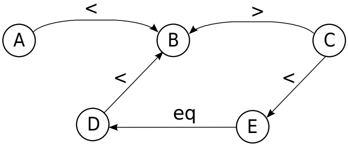
Question posée :

5. Est-ce que C peut être derrière E ?

Régate : représenter



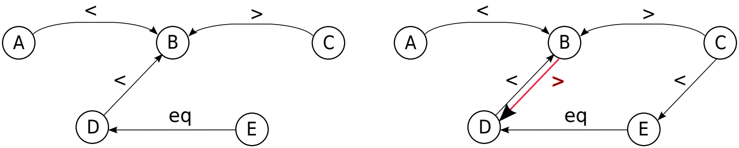
(a)



(b)

En (a), déclarations du premier reporter ; en (b), on a rajouté celle du second.

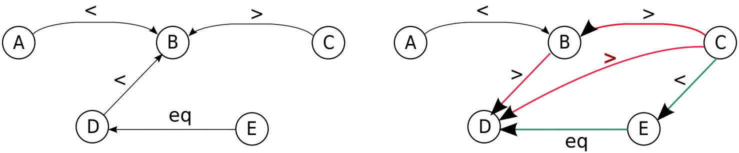
Régate : raisonner



(a) (b)

On peut utiliser l'opération d'**inversion**, qui échange $<$ et $>$

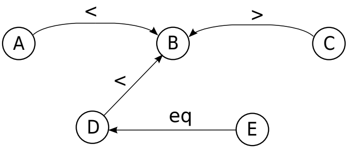
Régate : raisonner



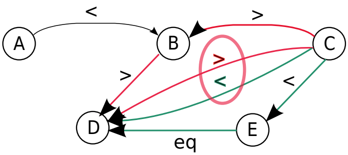
(a) (b)

. . . et celle de **composition**, qui permet de conclure que C > D.

Régate : raisonner



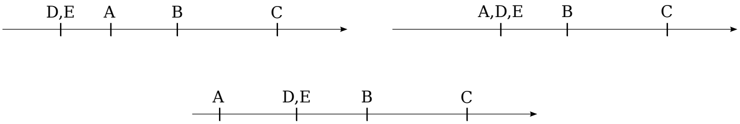
(a)



(b)

…et celle de **composition**, qui permet de conclure que C > D.
Mais la composition de < avec eq montre que C < D :
contradiction !
Le réseau (b) n'est pas cohérent.

Régate : trois scénarios possibles



- Si on oublie le deuxième informateur, le réseau correspondant (a) est cette fois cohérent :
- il correspond à trois **scénarios** qualitatifs distincts (le premier d'entre eux est la situation observée)

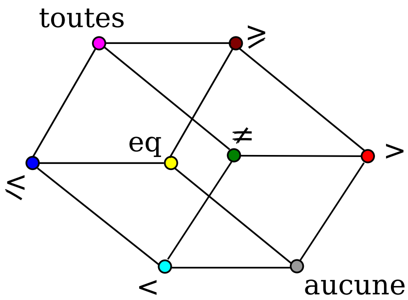
Une régate : bilan

- Le domaine considéré : la droite réelle $\mathbb{R}$;
- partitionnement de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en trois relations binaires (JEPD) désignées par les symboles $<$, eq, et $>$;
- deux opérations, l'**inversion** et la **composition**, permettent de propager les contraintes ;
- le résultat de la composition peut être une **disjonction** : de $X < Y$ et $Y > Z$, on ne peut déduire que $X \ \{<, \text{eq}, >\}\ Z$;

Aspects algébriques

- On est conduit à raisonner avec des disjonctions des trois relations dites **de base**, exprimant un choix entre plusieurs possibilités, du type « ou bien précède, ou bien égale », notée aussi « $\leq$ ».
- On a donc un ensemble qui est une **algèbre** de Boole à 8 éléments, munie d'une opération d'inversion et d'une opération de composition.
- Ce type d'algèbre à opérateurs est ce qu'on appelle une **algèbre relationnelle** (Tarski), notion abstraite qui axiomatise la structure des relations binaires sur un ensemble.

Les 8 relations de l'algèbre des points



La table de composition de l'algèbre des points

$\circ$	$<$	eq	$>$
$<$	$\{<\}$	$\{<\}$	$\{<, eq, >\}$
eq	$\{<\}$	$\{eq\}$	$\{>\}$
$>$	$\{<, eq, >\}$	$\{>\}$	$\{>\}$

Composition des relations de base
(le symbole « $\circ$ » dénote la composition)

Raisonnement par contraintes

- La connaissance que l'on possède sur un ensemble de points de l'axe peut être représenté par un réseau dont
  - les sommets représentent ces points ;
  - les arcs sont étiquetés par l'une des 8 relations.
- Si l'étiquette est l'ensemble vide, on a une contradiction. Si elle contient les 8 relations, on ne sait rien.
- Un réseau est **cohérent** si on peut trouver des points sur l'axe qui satisfont les conditions représentées par ce réseau.

Propagation des contraintes et complexité

- On a vu comment on peut **propager** les contraintes en utilisant la composition et l'inverse.
- On a utilisé sans le dire la technique de **cohérence par arcs** qui consiste à comparer la contrainte entre deux sommets avec le résultat de la composition des contraintes sur un arc joignant ces deux sommets.
- Si les résultats ne sont pas compatibles, le réseau ne peut pas être cohérent : la cohérence par arcs est une condition **nécessaire** pour la cohérence.
- Pour l'algèbre des points, cette condition est **suffisante**.

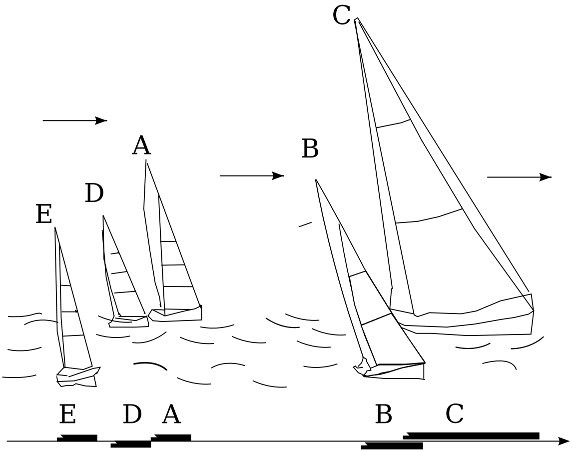
Complexité du raisonnement sur l'algèbre des points

- Le problème central est celui de la **cohérence** d'un réseau donné.
- De manière générale, la **cohérence par arcs** peut être testée en temps cubique ($O(n^3)$) en itérant l'opération

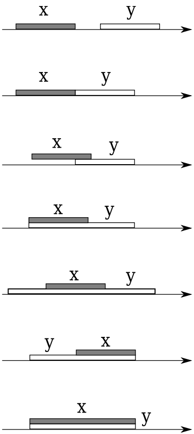
$$C(i,j) \leftarrow C(i,j) \cap (C(i,k) \circ C(k,j))$$

  où $\circ$ désigne la composition, pour tous les triplets (i,j,k) de sommets.
- Pour les points, on peut trouver une solution d'un réseau cohérent en temps carré ($O(n^2)$).

Le calcul des intervalles (Allen, 1983)

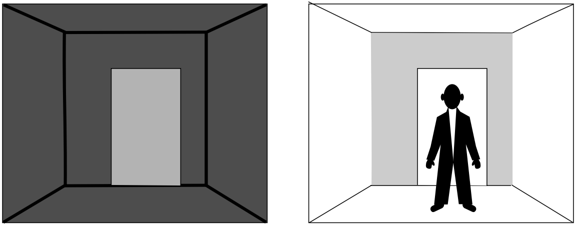


Les relations d'Allen



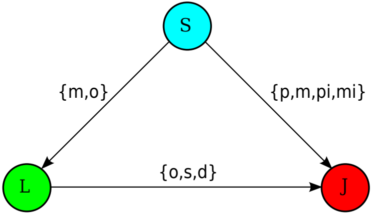
x p y	x *precedes* y
y pi x	y *is preceded by* x
x m y	x *meets* y
y mi x	y *is met by* x
x o y	x *overlaps* y
y oi x	y *is overlapped by* x
x s y	x *starts* y
y si x	y *is started by* x
x d y	x *during* y
y di x	y *contains* x
x f y	x *finishes* y
y fi x	y *is finished by* x
x eq y	x *equals* y

Le calcul des intervalles (Allen 1983)



- Jean n'était pas dans la pièce lorsque j'ai actionné l'interrupteur pour allumer la lumière ;
- mais Jean était dans la pièce plus tard lorsque la lumière s'est éteinte.

Réseaux de contraintes sur l'algèbre des intervalles



- Trois sommets :
  - S = interrupteur,
  - L = lumière,
  - J = Jean est dans la pièce ;
- Arcs étiquetés par des relations qui sont des sous-ensembles des relations de base ;

L'algèbre d'Allen

- la structure obtenue sur les treize relations disjonctives entre intervalles est une **algèbre relationnelle** appelée **algèbre d'Allen**, qui contient 8192 éléments ;
- inverse et composition opèrent sur les relations disjonctives ;
- la propagation des contraintes utilise ces deux opérations.

Composition dans l'algèbre d'Allen

Sachant que rouge o jaune (rouge *chevauche* jaune)

Composition dans l'algèbre d'Allen

Sachant que rouge o jaune (rouge *chevauche* jaune)

et que jaune d bleu (jaune *pendant* bleu)

Composition dans l'algèbre d'Allen

Sachant que rouge o jaune (rouge *chevauche* jaune)

et que jaune d bleu (jaune *pendant* bleu)

on peut en conclure que trois relations sont possibles entre rouge et bleu : o, s, ou d

La **table de composition** contient donc

$$o \circ d = \{o, s, d\}$$

Complexité du formalisme d'Allen

Les problèmes de base :

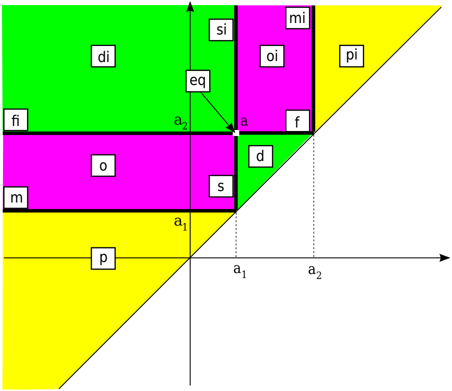
- **Cohérence** : un réseau donné est-il cohérent ?
- **Solutions** : déterminer une solution / toutes les solutions s'il en existe.

- Du point de vue de la complexité, équivalence polynomiale ;
- la propriété de **cohérence par arcs** est une condition nécessaire de cohérence ;
- lorsque le problème est polynomial, est-elle suffisante ?
- Mêmes questions si on se restreint à un sous-ensemble de relations stable par inverse et composition, appelé **sous-classe**.

Complexité du formalisme d'Allen

- pour les relations disjonctives arbitraires ($2^{13} = 8192$ relations), le problème de **cohérence** d'un réseau est NP-complet ;
- polynomial si toutes les relations sont équivalentes à une conjunction de relations sur les extrémités des intervalles (relations dites **ponctualisables**) ;
- en particulier, vrai pour les **relations convexes** (83 relations) qui sont équivalentes à des contraintes sur les extrémités n'utilisant pas la relation $\neq$.
- Jusqu'en 1995, on ne connaissait pas de sous-algèbre de plus grande taille dont le problème de cohérence soit polynomial.

Les régions associées aux relations d'Allen

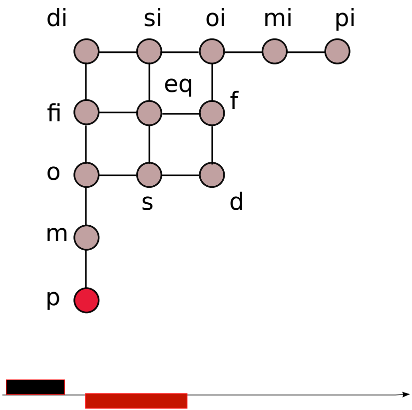


Étant donné un intervalle (a_1, a_2), les intervalles $x = (x_1, x_2)$ tels que $x \rho a$, où ρ est une des 13 relations de base sont situés dans la région indiquée dans la figure.

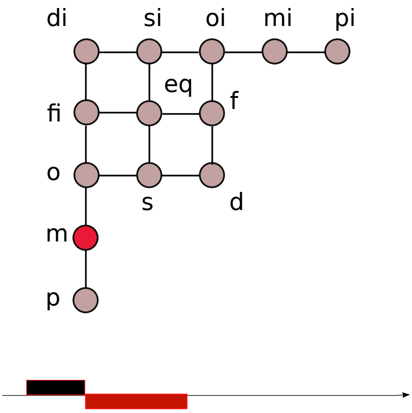
Topologie et géométrie

- Les 13 régions constituent une partition du demi-plan situé au-dessus de la diagonale.
- On peut définir la **clôture** topologique d'une relation d'Allen qui est elle-même une relation d'Allen.
- On peut également lui associer une **dimension**, qui correspond intuitivement aux nombre de degrés de liberté.

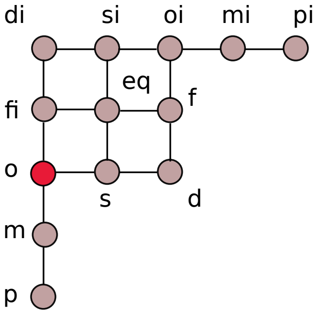
Le treillis des relations de base d'Allen



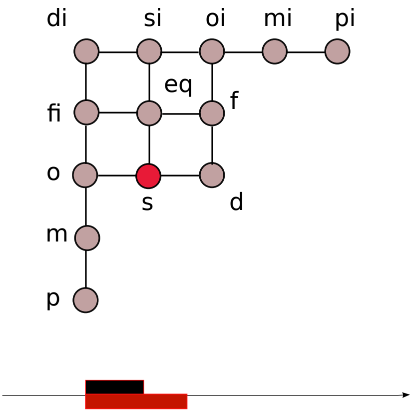
Le treillis des relations de base d'Allen



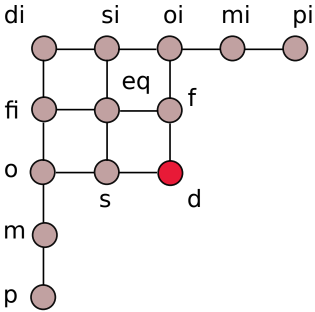
Le treillis des relations de base d'Allen

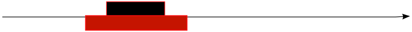


Le treillis des relations de base d'Allen

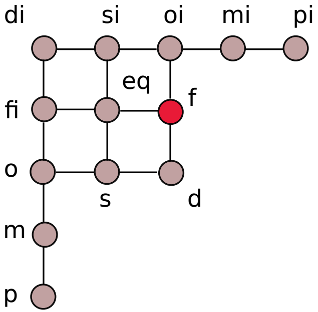


Le treillis des relations de base d'Allen

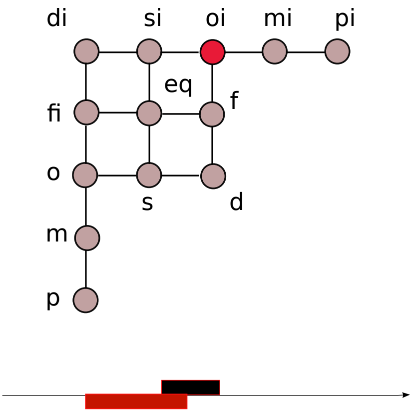




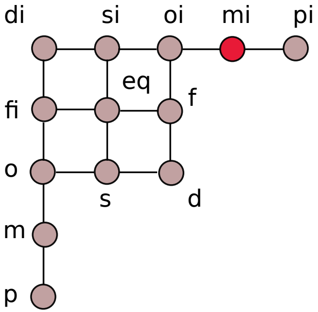
Le treillis des relations de base d'Allen



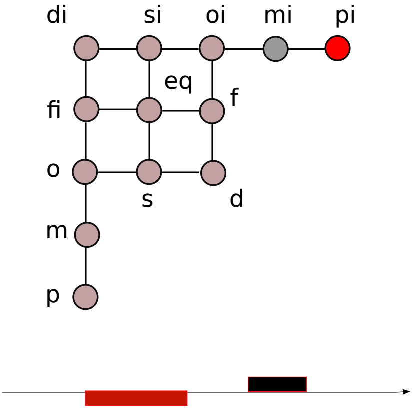
Le treillis des relations de base d'Allen



Le treillis des relations de base d'Allen

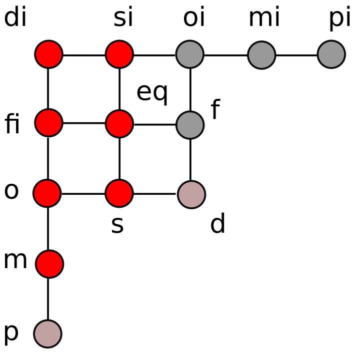


Le treillis des relations de base d'Allen



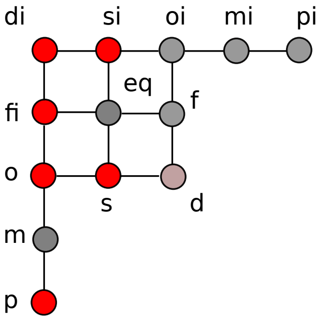
Relations convexes

- Les relations convexes sont les **intervalles** du treillis ;



Relations pré-convexes

- Les relations **pré-convexes** sont celles que l'on peut compléter par des relations de dimension 0 ou 1 pour obtenir des relations convexes.
- Il y a dans l'algèbre plus de 10 % de relations pré-convexes.



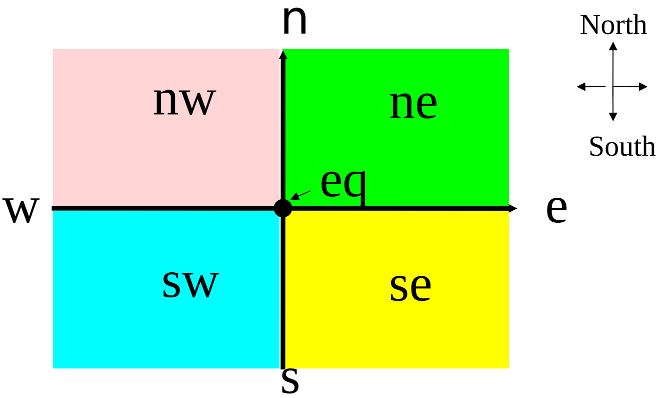
Résultats de complexité

- La sous-classe des **relations pré-convexes**, ou **relations de ORD-Horn**, constitue l'unique sous-classe polynomiale maximale contenant toutes les relations de base.
- Pour les réseaux pré-convexes, le **problème de cohérence** peut être résolu en employant la méthode de cohérence par arcs.
- La clôture algébrique peut être calculée en temps $O(n^3)$, où n est le nombre de sommets du réseau.

Une galerie de formalismes . . .

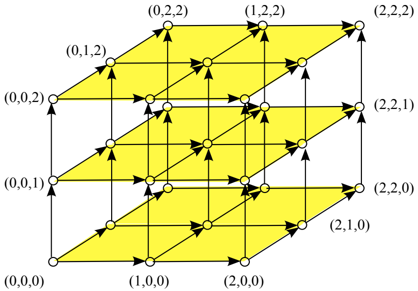
Calcul des relations cardinales

- C'est une version 2D du calcul des instants



Calcul des 3-points

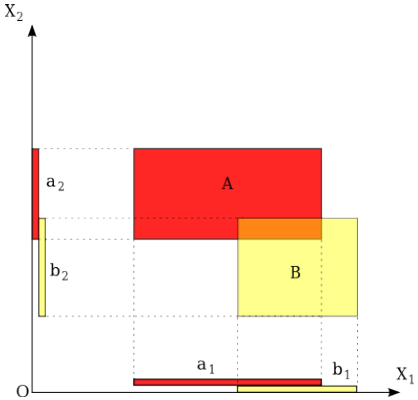
- C'est une version 3D du calcul des points



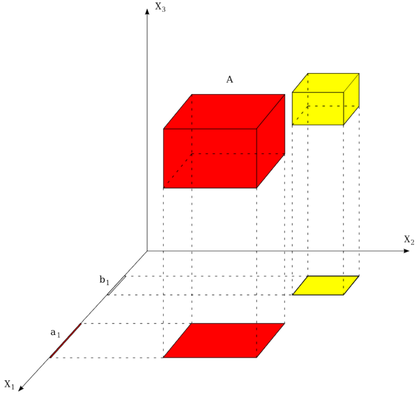
Le treillis des relations entre 3-points

Le calcul des rectangles

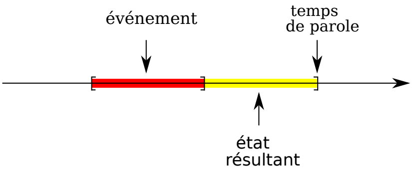
- C'est une version 2D du calcul d'Allen



Le calcul des parallélépipèdes



Intervalles généralisés



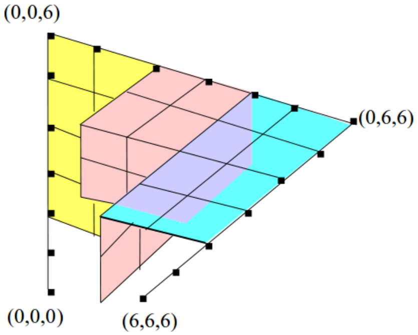
Tiens, il a plu !

Une représentation de la valeur de **parfait** du passé composé en français.

Intervalles généralisés

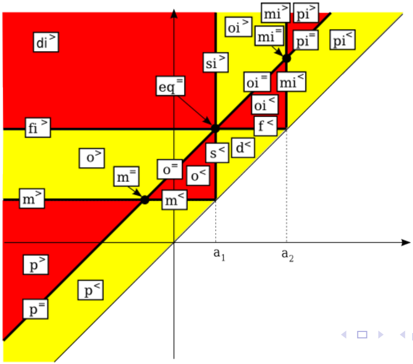
- On est amenés à introduire des suites ordonnées de trois points ou **3-intervalle** ;
- les relations de base entre 3-intervalles ont une structure de treillis ;
- de manière générale, on peut considérer les relations de base, ou **(p,q)-relations**, entre **p-intervalles** et **q-intervalles** ;
- les intervalles au sens d'Allen sont les 2-intervalles.

Le treillis des (3,3)-relations



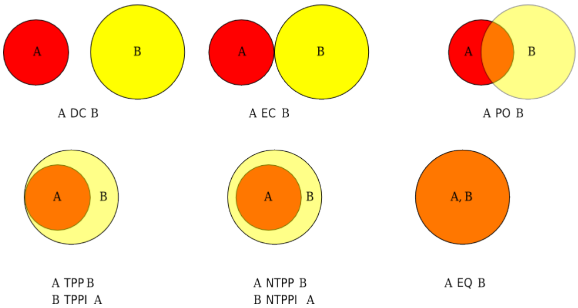
Le formalisme INDU

- Un raffinement du calcul d'Allen (durées relatives prises en compte).
- il possède des propriétés intéressantes ;
- par exemple, son algèbre associée **n'est pas associative**.



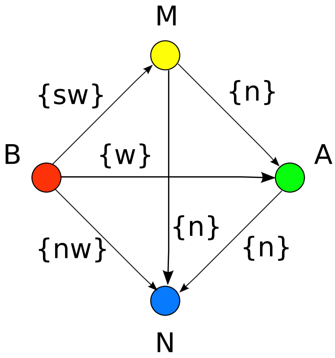
Le calcul RCC-8

- Un formalisme qui représente des **relations topologiques** entre régions ;
- il possède 8 relations de base (d'où son nom).



Techniques d'étude de la complexité

- Essentiellement deux approches
  - l'approche **syntaxique** (basée sur les propriétés des clauses de Horn) ;
  - l'approche **topologico-géométrique** illustrée ici.
- Pour les formalismes utilisant des ordres totaux (n-points, n-blocs, intervalles généralisés), les deux techniques aboutissent toutes deux aux mêmes classes traitables, les relations de ORD-Horn (syntaxe) qui sont en même temps les relations **fortement préconvexes**.
- Pour INDU, on obtient des sous-classes distinctes, ce qui montre l'intérêt des deux approches.



Une **représentation faible** de l'algèbre des relations cardinales

Représentation faible d'une algèbre $\mathbf{A}$

- C'est un couple (U, φ) où
  - U est un ensemble
  - φ un morphisme d'algèbres de Boole $\mathbf{A} \to \mathcal{P}(U \times U)$
- l'**inverse** est conservée
- la **composition** vérifie la condition

$$\varphi(a \circ b) \supseteq (\varphi(a) \circ \varphi(b))$$

- C'est une **représentation** si on a l'égalité
- Les RF de l'**algèbre des points** sont les **ordres totaux** ; ce sont des représentations si ces ordres sont **denses** et **infinis à droite et à gauche**.

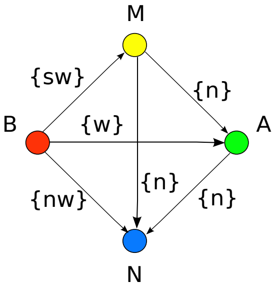
En guise de conclusion

Une autre **représentation faible** (infinie) de cette algèbre, en fait une **représentation** de l'algèbre

En guise de conclusion

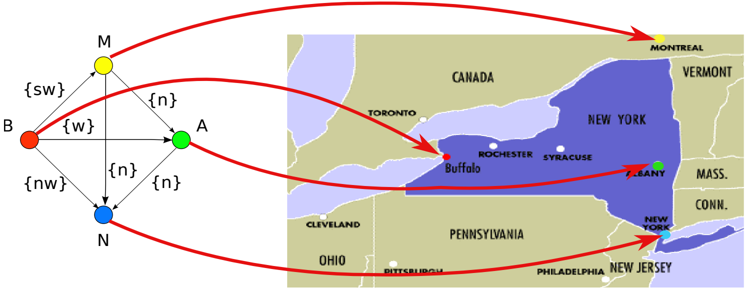
Une autre **représentation faible** (infinie) de cette algèbre,
en fait une **représentation** de l'algèbre

La catégorie des représentations faibles de l'algèbre des relations cardinales



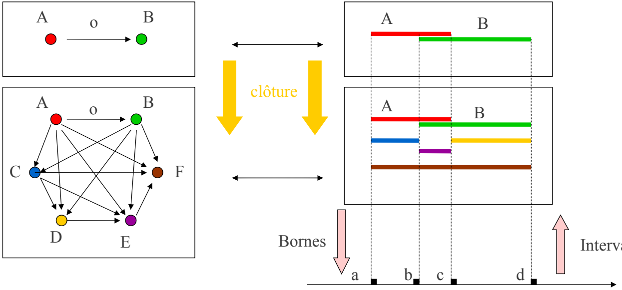
Deux objets de cette catégorie

Cohérence



cohérence = **existence d'un morphisme** dans la catégorie

Relations fonctorielles entre points et intervalles



- Merci de votre attention !
- Avez-vous des questions ?