Exercices, 5

Solution 1 (Exercice 8). —

1. La variation totale étant une distance sur l'espace des lois de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, d_{TV} vérifie les propriétés de symétrie et inégalité triangulaire requises. Reste à vérifier l'hypothèse de séparation. Si u, v sont tels que $\mathrm{d}_{TV}(u,v) = 0$, alors $H2$ implique que $\|u-v\| \leq \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, et donc que $u = v$. On en déduit que le modèle est identifiable, et que d_{TV} est bien une distance.

2. En utilisant $H1$, on note $\delta(\varepsilon) > 0$ le module de continuité Euclidien correspondant à une distance en variation totale majorée par ε. Comme Θ est compact, il existe $\theta_1, \ldots, \theta_N$ tels que $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}(\theta_i, \delta(\varepsilon)) \supseteq \Theta$. En utilisant $H1$ encore, on en déduit $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_{TV}(\theta_i, \varepsilon) \supseteq \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}(\theta_i, \delta(\varepsilon)) \supseteq \Theta$.

3. D'après la question 2), il existe j_0 tel que $\theta \in \mathcal{B}_{TV}(\theta_{j_0}, \varepsilon)$. Soit j tel que $\mathrm{d}_{TV}(\theta_j, \theta) > 6\varepsilon$. On a alors $\mathrm{d}_{TV}(\theta_j, \theta_{j_0}) > 5\varepsilon$. On en déduit
$$\begin{aligned}
\varphi(j) &= \max_{s=1,\ldots,N(\varepsilon)} |P_{\theta_j}(A_{j,s}) - P_\theta(A_{j,s})| \\
&\geq \max_{s=1,\ldots,N(\varepsilon)} |P_{\theta_j}(A_{j,s}) - P_{\theta_{j_0}}(A_{j,s})| - \varepsilon \\
&\geq |P_{\theta_{j_0}}(A_{j,j_0}) - P_{\theta_{j_0}}(A_{j,j_0})| - \varepsilon \\
&> 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

4. En utilisant l'inégalité de Cebicev combinée avec une borne d'union, on obtient,
$$\mathbb{P}\left(\sup_{i,j \in [\![1, N(\varepsilon)]\!]} |(P - P_n)(A_{i,j})| > \varepsilon \right) \leq N(\varepsilon)^2 \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
Or, si $\sup_{i,j \in [\![1,N(\varepsilon)]\!]} |(P-P_n)(A_{i,j})| \leq \varepsilon$, on a, pour $i \in [\![1, N(\varepsilon)]\!]$,
$$|\varphi(i) - \varphi_n(i)| \leq \max_{j \in [\![1,N(\varepsilon)]\!]} |(P-P_n)(A_{i,j})| \leq \varepsilon,$$
d'où le résultat.

5. On se place sur l'évènement décrit à la question précédente. On commence par remarquer que $\varphi_n(j_0) \leq 2\varepsilon$. Ensuite, si $\mathrm{d}_{TV}(\theta_j, \theta) > 6\varepsilon$, d'après 3$-$ et 4$-$ on déduit que $\varphi_n(j) > 3\varepsilon > \varphi_n(j_0)$. On en déduit alors que sur cet évènement $T_{n,\varepsilon} \in \{\theta_j \mid \mathrm{d}_{TV}(\theta_j, \theta) \leq 6\varepsilon\}$.

6. On pose
$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \to &]0, +\infty[\\ \varepsilon & \mapsto & (N(\varepsilon)^2/\varepsilon^2). \end{cases}$$
f est strictement décroissante, et $\lim_{\varepsilon \to +\infty} f(\varepsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = +\infty$. On note aussi $f^{-1}(u) = \sup\{t > 0 \mid f(t) \geq u\}$, de sorte que l'on ait $f(f^{-1}(u)) \leq u$. En posant $\varepsilon_n = f^{-1}\left(\frac{n}{\log(n)}\right)$, on a bien $N(\varepsilon_n)^2/(n\varepsilon_n^2) \to 0$. Reste à prouver que $\varepsilon_n \to 0$. On commence par remarque que f^{-1} est décroissante. Il suffit alors de montrer que $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 0$.

   Supposons que $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = a > 0$ (une telle limite existe bien). On a alors, pour tout $n \geq 0$, $f^{-1}(n) \geq a$. Ce dont on déduit que pour tout $t \in]0, a[$, $f(t) \geq n$, et donc $f = +\infty$ sur $]0, a[$, ce qui contredit le point 2$-$.

7. On définit alors $\hat{\theta}_n = T_{n,\varepsilon_n}$, et, en combinant 5− et 6−, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{d}_{TV}(\hat{\theta}_n, \theta) > 6\varepsilon_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $\varepsilon_n \to 0$, on en déduit $\mathrm{d}_{TV}(\hat{\theta}_n, \theta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. En utilisant $H2$, on en déduit que $\hat{\theta}_n$ est consistant.