

Exercices, 4

SOLUTION 1 (Exercice 7). —

Soit $\tilde{\theta} = LY$ un estimateur linéaire non-biaisé de θ . Posons

$$D = (L - (X^T X)^{-1} X^T).$$

Comme $\tilde{\theta}$ est non-biaisé, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{\theta}) &= \theta = \mathbb{E}[(X^T X)^{-1} X^T Y + DY] \\ &= \mathbb{E}(\hat{\theta}) + DX\theta \\ &= \theta + DX\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que $DX\theta = 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, et donc que $DX = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{\theta}) &= \text{Cov}(\hat{\theta} + DY) \\ &= \text{Cov}(\hat{\theta}) + \sigma^2 DD^T + \mathbb{E}\left((\hat{\theta} - \theta)(DY)^T\right) + \mathbb{E}\left((DY)(\hat{\theta} - \theta)^T\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((\hat{\theta} - \theta)(DY)^T\right) &= \mathbb{E}\left((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon (D\varepsilon)^T\right) \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} (DX)^T = 0, \end{aligned}$$

et pareillement

$$\mathbb{E}\left((DY)(\hat{\theta} - \theta)^T\right) = \left[\mathbb{E}\left((\hat{\theta} - \theta)(DY)^T\right)\right]^T = 0.$$

On en déduit que

$$\text{Cov}(\tilde{\theta}) = \text{Cov}(\hat{\theta}) + \sigma^2 DD^T,$$

et donc que

$$\text{Cov}(\tilde{\theta}) \succcurlyeq \text{Cov}(\hat{\theta}).$$