Exercices, 3

EXERCICE 1 (Révisions sur les vecteurs gaussiens). — On rappelle que $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ désigne la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

1. Donner la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculer $\mathbb{E}[X^k]$, $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, de matrice de covariance V et de moyenne $m \in \mathbb{R}^n$. Expliciter la fonction caractéristique de Y.
4. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, centré et de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$. Quelle est la loi de AY si A est une matrice orthogonale?
5. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et Y, indépendante de X, de loi donnée par $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = -1) = p$. Donner la loi de X et la loi de Z. Sont-elles indépendantes ? Décorrélées ? Le couple (X, Z) est-il gaussien ?

EXERCICE 2 (Loi invariante par rotation). — Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X et Y sont indépendantes et que la loi du vecteur aléatoire (X, Y) est invariante par les rotations de centre 0.

1. Montrer que X et Y ont la même loi, et que cette loi est symétrique.
2. On note φ la fonction caractéristique de X. Montrer que pour tous u, v, on a $\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ puis trouver explicitement φ.

EXERCICE 3 (Méthode de Box-Muller). — Soit (U_1, U_2) une variable uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$. On pose

$$Y_1 = \sqrt{-2\ln U_1} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2\ln U_1} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

1. Quelle est la loi de $Y_1^2 + Y_2^2$? Et de Y_2/Y_1 ?
2. Montrer que le couple (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_2.

EXERCICE 4. — Soit Y un vecteur gaussien de dimension n dont la matrice de covariance est diagonale par blocs : $V = \operatorname{diag}(V_1, \ldots, V_k)$, où chaque V_j est de taille $\ell_j \times \ell_j$. Démontrer que les vecteurs

$$Z_1 = (Y_1, \ldots, Y_{\ell_1}),\ Z_2 = (Y_{\ell_1+1}, \ldots, Y_{\ell_1+\ell_2}), \ldots, Z_k = (Y_{\ell_1+\cdots+\ell_{k-1}+1}, \ldots, Y_n)$$

sont indépendants.

EXERCICE 5. — Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable et de matrice de covariance K. Soit T_1 (resp. T_2) une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{d_2}$).

1. Expliciter la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(T_1 X, T_2 X)$.
2. Dans le cas où X est gaussien, montrer que les vecteurs aléatoires $T_1 X$ et $T_2 X$ sont indépendants si et seulement si $T_1\, K\, T_2^\top = 0$.

Exercice 6. — Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$\Sigma(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où $\rho \in [0, 1]$. Montrer que $X + Y$et $X - Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Exercice 7. — Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes $\mathscr{N}(0, \sigma_1^2)$ et $\mathscr{N}(0, \sigma_2^2)$. Montrer que les variables $(X_1 + X_2)^2$ et $(X_1 - X_2)^2$ sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Exercice 8. — Soit $X \sim \mathscr{N}(0, \Gamma)$. Le but de cet exercice est d'établir la formule suivante: pour toute matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{X^\top S X}{2}}\right] \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\det(I - \Gamma S)}} & \text{si } I - \Gamma S \text{ est définie positive} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier cette formule dans le cas $d = 1$.
2. Traiter ensuite le cas où d est quelconque, mais S est diagonale et $\Gamma = \mathrm{Id}$.
3. Passer au cas où d et S sont quelconques, mais $\Gamma = \mathrm{Id}$.
4. Conclure dans le cas général.

Exercice 9. — Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien d'espérance μ et de matrice de covariance Σ, avec

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de la matrice V et en déduire que, presque sûrement, $X_2 - X_3 = 1$.
2. Le vecteur (X_1, X_2) admet-il une densité dans $\mathbb{R}^2$? Si oui, l'expliciter.
3. Quel est le support dans $\mathbb{R}^3$ de la loi de X ?

Exercice 10. — Soient $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, et

$$Z \ := \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad\qquad V \ := \ \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Z)^2.$$

1. Quelle est la loi de Z ?
2. Montrer que $(Z, X_1 - Z, \cdots, X_n - Z)$ est un vecteur gaussien que l'on précisera.
3. Montrer que les variables aléatoires Z et V sont indépendantes.
4. Exprimer $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$ à l'aide de $Z - \mu, V$ et n.
5. En déduire l'espérance, la fonction caractéristique puis la loi de V.

Exercice 11 (Tirages indépendants). — Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ des variables i.i.d. à valeurs dans $\{1, \ldots, d\}$. On note $p_j := \mathbb{P}(Y_1 = j)$ pour $1 \leq j \leq d$, et on pose pour tout $n \geq 1$,

$$N_j^n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(Y_k = j)}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur gaussien Z, dont on donnera les paramètres, tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d}(N_j^n - np_j)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \|Z\|^2.$$

EXERCICE 12. — *** - Test du Chi-Deux d'adéquation-Modèle Poissonien**

Soit X variable aléatoire sur $\{1,\dots,d\}$, caractérisée par le vecteur $\mathbf{p} = (\mathbb{P}(X=1),\dots,\mathbb{P}(X=d))^T$. On se donne $(X_i)_{i=1,\dots,+\infty}$ une suite infinie de variables i.i.d. de même loi que X, N une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$ (où n est un entier) indépendante des $(X_i)_{i=1,\dots,+\infty}$. On suppose que l'on observe $X_1,\dots,X_N$. Dans un premier temps on supposera n connu.

1. Proposer un modèle pour ces observations.
2. En notant $E_j = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{X_i=j}$, donner la loi de $E=(E_1,\dots,E_d)^T$.
3. Montrer que si Z_n est un vecteur aléatoire tel que
   (a) Pour tout j, $Z_{n,j} \rightsquigarrow Z_j$.
   (b) $(Z_{n,1},\dots,Z_{n,d})$ sont indépendantes.

   Alors $Z_n \rightsquigarrow Z=(Z_1,\dots,Z_d)^T$, où $(Z_1,\dots,Z_d)$ sont indépendantes.
4. Construire un test du Chi-deux d'adéquation pour les hypothèses

$$\begin{cases} H_0 & : \quad \mathbf{p} = \mathbf{p_0} \\ H_1 & : \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{p_0}, \end{cases}$$

   où $\mathbf{p_0}$ est un vecteur proba de référence (dont on supposera chacune des coordonnées non nulle). On se placera dans le régime n grand (et toujours connu).
5. Proposer un test dans le cas où n est grand mais inconnu.

Les propriétés fondamentales des vecteurs Gaussiens caractérisent les vecteurs Gaussiens

On part d'un vecteur aléatoire $X=(X_1,\dots,X_d)$, formé de variables aléatoires centrées, indépendantes et de variance 1 (non nécessairement de même loi).

EXERCICE 13. — **Caractérisation par moyenne et covariance**

On a vu en cours que la loi d'un vecteur Gaussien est uniquement déterminée par son vecteur de moyenne et matrice de covariance. On veut montrer la réciproque. Supposons que X est tel que

$$\forall A,B \in \mathbb{R}^{d\times d} \quad (\mathrm{Cov}(AX) = \mathrm{Cov}(BX) \quad \Rightarrow \quad AX \sim BX).$$

Montrer que X est un vecteur Gaussien standard.

EXERCICE 14. — *** - Caractérisation par le lien entre algèbre linéaire et dépendance.**

On a vu en cours que si X est un vecteur Gaussien standard, alors pour tout sous-espaces orthogonaux V_1 et V_2 de $\mathbb{R}^d$, $\pi_{V_1}X \perp\!\!\!\perp \pi_{V_2}X$. On va montrer la réciproque.

On suppose que, pour tout $a,b\in\mathbb{R}^d$, $a\perp b \Rightarrow \langle a,X\rangle \perp\!\!\!\perp \langle b,X\rangle$. Montrer que X est un vecteur Gaussien.

Remarque: En cours la propriété de covariance nulle implique indépendance découle de la caractérisation par matrice de covariance (à espérance fixée). Pour la réciproque, on remarque que la caractérisation de l'exercice 14 induit celle de l'exercice 13: l'invariance par rotation induit l'indépendance de $\langle u_1,X\rangle$ et $\langle u_2,X\rangle$, où u_1 et u_2 sont les deux premières lignes de la matrice de rotation.
Remarque 2: La caractérisation de l'exercice 14 est encore trop forte: on peut montrer que s'il existe deux vecteurs $a,b\in\mathbb{R}^d$ à coordonnées toutes non nulles tels que $\langle a,X\rangle \perp\!\!\!\perp \langle b,X\rangle$, alors X est un vecteur Gaussien (Théorème de Darmois-Skitovitch).