Exercices, 3

Exercice 1 (Révisions sur les vecteurs gaussiens). — On rappelle que $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ désigne la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité
$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

1. Donner la fonction caractéristique de la loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. Si $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$, calculer $\mathbb{E}[X^k]$, $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, de matrice de covariance V et de moyenne $m \in \mathbb{R}^n$. Expliciter la fonction caractéristique de Y.
4. Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, centré et de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$. Quelle est la loi de AY si A est une matrice orthogonale?
5. Soit $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$ et Y, indépendante de X, de loi donnée par $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = -1) = p$. Donner la loi de X et la loi de Z. Sont-elles indépendantes ? Décorrélées ? Le couple (X, Z) est-il gaussien ?

Exercice 2 (Loi invariante par rotation). — Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X et Y sont indépendantes et que la loi du vecteur aléatoire (X, Y) est invariante par les rotations de centre 0.

1. Montrer que X et Y ont la même loi, et que cette loi est symétrique.
2. On note φ la fonction caractéristique de X. Montrer que pour tous u, v, on a $\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(\sqrt{u^2 + v^2})$ puis trouver explicitement φ.

Exercice 3 (Méthode de Box-Muller). — Soit (U_1, U_2) une variable uniforme sur $[0, 1] \times [0, 1]$. On pose
$$Y_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

1. Quelle est la loi de $Y_1^2 + Y_2^2$? Et de Y_2/Y_1 ?
2. Montrer que le couple (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_2.

Exercice 4. — Soit Y un vecteur gaussien de dimension n dont la matrice de covariance est diagonale par blocs : $V = \operatorname{diag}(V_1, \ldots, V_k)$, où chaque V_j est de taille $\ell_j \times \ell_j$. Démontrer que les vecteurs
$$Z_1 = (Y_1, \ldots, Y_{\ell_1}),\ Z_2 = (Y_{\ell_1+1}, \ldots, Y_{\ell_1+\ell_2}), \ldots, Z_k = (Y_{\ell_1+\cdots+\ell_{k-1}+1}, \ldots, Y_n)$$
sont indépendants.

Exercice 5. — Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable et de matrice de covariance K. Soit T_1 (resp. T_2) une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{d_2}$).

1. Expliciter la matrice de covariance du vecteur aléatoire (T_1X, T_2X).
2. Dans le cas où X est gaussien, montrer que les vecteurs aléatoires T_1X et T_2X sont indépendants si et seulement si $T_1\,K\,T_2^\top = 0$.

EXERCICE 6. — Soit (X,Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$\Sigma(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où $\rho \in [0,1]$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

EXERCICE 7. — Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$. Montrer que les variables $(X_1+X_2)^2$ et $(X_1-X_2)^2$ sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

EXERCICE 8. — Soit $X \sim \mathcal{N}(0,\Gamma)$. Le but de cet exercice est d'établir la formule suivante: pour toute matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{X^\top SX}{2}}\right] \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\det(I-\Gamma S)}} & \text{si } I-\Gamma S \text{ est définie positive} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier cette formule dans le cas $d=1$.
2. Traiter ensuite le cas où d est quelconque, mais S est diagonale et $\Gamma = \mathrm{Id}$.
3. Passer au cas où d et S sont quelconques, mais $\Gamma = \mathrm{Id}$.
4. Conclure dans le cas général.

EXERCICE 9. — Soit $X = (X_1,X_2,X_3)$ un vecteur gaussien d'espérance μ et de matrice de covariance Σ, avec

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de la matrice V et en déduire que, presque sûrement, $X_2 - X_3 = 1$.
2. Le vecteur (X_1,X_2) admet-il une densité dans $\mathbb{R}^2$? Si oui, l'expliciter.
3. Quel est le support dans $\mathbb{R}^3$ de la loi de X ?

EXERCICE 10. — Soient $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, et

$$Z \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, \qquad\qquad V \;:=\; \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - Z)^2.$$

1. Quelle est la loi de Z ?
2. Montrer que $(Z, X_1 - Z, \cdots, X_n - Z)$ est un vecteur gaussien que l'on précisera.
3. Montrer que les variables aléatoires Z et V sont indépendantes.
4. Exprimer $\sum_{k=1}^n (X_k-\mu)^2$ à l'aide de $Z-\mu, V$ et n.
5. En déduire l'espérance, la fonction caractéristique puis la loi de V.

EXERCICE 11 (Tirages indépendants). — Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ des variables i.i.d. à valeurs dans $\{1,\ldots,d\}$. On note $p_j := \mathbb{P}(Y_1 = j)$ pour $1 \leq j \leq d$, et on pose pour tout $n \geq 1$,

$$N_j^n := \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{(Y_k = j)}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur gaussien Z, dont on donnera les paramètres, tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^d (N_j^n - np_j)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \|Z\|^2.$$