Solution 1. — Exo3

1. En posant $X_i = \log(1+R_i)$, on a
$$\log(1+\rho_n) = \frac{1}{n}X_i.$$
Or, comme $R_i \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour $\varepsilon < 1$, $X_i \in L_\infty(\mathbb{P})$, et la loi des grands nombres donne
$$\log(1+\rho_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu = \mathbb{E}(X).$$
On en déduit
$$\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} r = e^\mu - 1.$$

2. Comme $X_i \in L_\infty(\mathbb{P})$, le théorème central limite donne
$$\sqrt{n}(\log(1+\rho_n) - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
où $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Comme $g : u \mapsto e^u - 1$ est $C^1$, la méthode $\Delta$ donne
$$\sqrt{n}(\rho_n - r) \rightsquigarrow \sigma(1+r)\mathcal{N}(0,1).$$
Par ailleurs, $|R_i| \leq \varepsilon$ implique $\sigma^2 \leq \delta(\varepsilon)^2$, où
$$\delta(\varepsilon)^2 = \left(\frac{\log(1+\varepsilon) - \log(1-\varepsilon)}{2}\right)^2.$$
On en déduit que
$$\limsup \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{(\rho_n - r)}{1+r} \in [-\delta(\varepsilon)q, \delta(\varepsilon)q]\right) \geq 98\%,$$
si $q$ est le quantile d'ordre 99% d'un $\mathcal{N}(0,1)$, et on en déduit l'intervalle de confiance asymptotique
$$\left[\frac{\rho_n - \frac{\delta(\varepsilon)q}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{\sigma\delta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}} ; \frac{\rho_n + \frac{\delta(\varepsilon)q}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\sigma\delta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}}\right].$$

Solution 2. — Exo8

1. Le Théorème central limite s'applique, et on a $\sqrt{n}\bar{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. cos étant dérivable en 0, la méthode $\Delta$ donne alors
$$\sqrt{n}(\cos(\bar{X}_n - 1) \rightsquigarrow \cos'(0)\mathcal{N}(0,1) \sim 0.$$
On en déduit que $\sqrt{n}(\cos(\bar{X}_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

2. Notons $g : x \mapsto (1-\cos(x))/x^2$. Comme cos est deux fois dérivable en 0, $g$ est continue en 0, avec $g(0) = 1/2$. On en déduit alors que $g(\bar{X}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1/2$. En appliquant le Lemme de Slutsky, on obtient
$$n(\cos(\bar{X}_n) - 1) = (\sqrt{n}\bar{X}_n)^2 \times g(\bar{X}_n) \rightsquigarrow (1/2)\mathcal{N}(0,1)^2,$$
où il a été utilisé que $(\sqrt{n}\bar{X}_n)^2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)^2$ par continuité de $x \mapsto x^2$.

3. On va prouver le résultat suivant: soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, et soient $x \in \mathbb{R}$, $X$ variable aléatoire tels que $a_n(X_n - x) \rightsquigarrow X$. Soit $g$ une fonction $k$ fois différentiable en $x$, alors

$$a_n^k k! \left( g(X_n) - \sum_{j=0}^{k-1} g^{(j)}(x) \frac{(X_n - x)^j}{j!} \right) \rightsquigarrow g^{(k)}(x) X^k.$$

Notons $h : y \mapsto (y - x)^{-k} \left( g(y) - \sum_{j=0}^{k-1} g^{(j)}(x) \frac{(y-x)^j}{j!} \right)$. La formule de Taylor Young implique que $h$ est continue en $x$, avec $h(x) = g^{(k)}(x)/k!$. En raisonnant comme précédemment, on a d'une part que $a_n^k (X_n - x)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X^k$ (continuité de $x \mapsto x^k$), et d'autre part que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ ($r_n$ tend vers $+\infty$). Le Lemme de Slutsky donne alors

$$a_n^k \left( g(X_n) - \sum_{j=0}^{k-1} g^{(j)}(x) \frac{(X_n - x)^j}{j!} \right) = (a_n^k (X_n - x)^k) \times h(X_n) \rightsquigarrow (g^{(k)}(x)/k!) X^k.$$