Stat Fonda TD4

Exo 1

1-/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}(f(T_n)) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\right)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \int_0^{+\infty} y^{n/2-1} e^{-y/2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} f\left(\frac{x}{\sqrt{y/n}}\right) dy$$

$$\underset{\text{Fub}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{y^{n/2-1} e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} dy \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\sqrt{y/n}}\right) e^{-x^2/2} dx$$

$$u = x/\sqrt{y/n}, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{y/n}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y^{n/2-1} e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}} f(u)\, e^{-\frac{y}{n}\frac{u^2}{2}} \sqrt{y/n}\, du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} du\, f(u) \int_0^{+\infty} \frac{y^{n/2-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n/2)\sqrt{n}\, 2^{n/2}} e^{-y\left(\frac{1}{2}+\frac{u^2}{2n}\right)} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{du\, f(u)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n/2)\sqrt{n}\, 2^{n/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} du \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} f(u)$$

2- Si $U \sim \Gamma(a,1)$, $E(\sqrt{a}) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}\, t^{a-1} e^{-t}}{\Gamma(a)} dt$

$$= \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)}$$

Par ailleurs, $\Phi_{\Gamma(a,1)}(t) = \left(\frac{1}{1-it}\right)^a$, donc

$$\Phi_{\left(\frac{\Gamma(a,1)-a}{\sqrt{a}}\right)}(t) = e^{-it\sqrt{a}} \left(\frac{1}{1-it/\sqrt{a}}\right)^a = e^{-it\sqrt{a}} e^{-a\ln(1-it/\sqrt{a})}$$

(log C, $|t/a| < 1$) $= e^{-it\sqrt{a}} e^{-a\left(\frac{-it}{\sqrt{a}}\right) + \frac{t^2}{2a} +}$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} + o\left(\frac{t^2}{a}\right)$$

Donc $\frac{\Gamma(a,1) - a}{\sqrt{a}} \xrightarrow[(loi)]{} \mathcal{N}(0,1)$

Donc $\frac{\Gamma(a,1)}{a} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, donc $\sqrt{\frac{\Gamma(a,1)}{a}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$

On ne s'emmerde pas, Markov, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}\left(\left| \frac{\sqrt{\Gamma(a,1)}}{\sqrt{a}} - 1 \right| \right) \leq \varepsilon + \mathbb{E}\left(\left| \sqrt{\frac{\Gamma(a,1)}{a}} - 1 \right| 1_{\left|\sqrt{\frac{\Gamma(a,1)}{a}} - 1\right| > \varepsilon} \right)$$

$$\leq \varepsilon + \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\sqrt{\frac{\Gamma(a,1)}{a}} - 1 \right)^2 \right)} \sqrt{\mathbb{P}\left(\left| \sqrt{\frac{\Gamma(a,1)}{a}} - 1 \right| > \varepsilon \right)}$$

Avec $\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\sqrt{\frac{\Gamma(a,1)}{a}} - 1 \right)^2 \right)}$

$$\leq 2\,\mathbb{E}\left(1 + \frac{\Gamma(a,1)}{a} \right) \leq 4 \text{, donc}$$

$$\mathbb{E}\left(\left| \frac{\sqrt{\Gamma(a,1)}}{\sqrt{a}} - 1 \right| \right) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

On en déduit $\Gamma(a+\frac{1}{2}) / \Gamma(a) \underset{a \to +\infty}{\sim} \sqrt{a}$, et

alors ~~$t_n(x)$~~ Comme $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(n+1)}{2} \log(1+\frac{x^2}{n})}$

$$= e^{-\frac{x^2(n+1)}{2n} + o(1)} \longrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$t_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3-1 D'après scheffé, t_n étant une densité qui cvge vers une densité, on a $t_n \xrightarrow{L^1} t$, donc $T_n \xrightarrow{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$.

Exo2

- Variance connue :

$$\frac{\bar{X}_n}{\sigma^2} \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(\frac{m}{\sigma^2}, \frac{1}{n}\right), \text{ et } \left[\bar{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

est un $IC(\alpha)$ pour m.

- moyenne connue :

$$S := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 \overset{(loi)}{=} \frac{\sigma^2}{n} \chi^2(n).$$

$q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{\frac{\alpha}{2}}$ quantiles du $\chi^2(n)$.

$$\mathbb{P}\left(S \in \left[\frac{\sigma^2}{n} q_{\frac{\alpha}{2}}, \frac{\sigma^2}{n} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \right) = 1 - \alpha$$

Donc $\mathbb{P}\left(\sigma^2 \in \left[\frac{nS}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{nS}{q_{\alpha/2}}\right]\right) = 1-\alpha$.

∘) <u>Moyenne et variance inconnue</u>

→ <u>Rappel</u> : $\bar{X}$ et $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = V$ sont $\perp\!\!\!\perp$,
avec $(n-1)V = \chi^2(n-1)\times\sigma^2$.

On a $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-m)}{\sqrt{V}} \overset{(loi)}{=} T(n-1)$. q_α le α-quantile d'une Student à $(n-1)$ degrés de libertés.

$$\left[\bar{X} - \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \sqrt{\frac{V}{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] IC(\alpha).$$

et $\left[\frac{(n-1)V}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)V}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$ $IC(\alpha)$ pour σ.
– quantile $\chi^2(n-1)$

Exo 3

1- $IC(95\%)$: $\left[0{,}5 \pm \frac{1}{10\sqrt{10}} q_{97,5\%}\right]$

2- $IC(95\%)$: $\left[0.5 \pm \frac{1}{10\sqrt{10}} q_{97,5\%}\right]$, avec quantile d'un Student à 9 degrés de lib.

3- Avec $q_{97,5\%} \simeq 1.96$ (cas Gaussien)
$\simeq 2.26$ (cas Student(9)).

Ds cas Var inconnue, $IC = [0{,}5 \pm 0.07]$. La piscine est Ok.

4- $\left[\frac{9\times10^{-2}}{q_{97,5\%}}, \frac{0{,}009}{q_{2,5\%}}\right]$ IC. (q quantiles $\chi^2(9)$)

avec $q_{5\%} \simeq 3.32$
$q_{95\%} \simeq 16{,}9$

~~Exo 4~~

~~1- $\left[\frac{(n-1)V}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)V}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$.~~

~~2- $l_n = (n-1)V\left(\frac{1}{q_{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$~~

~~$E(l_n) = (n-1)\sigma^2\left(\frac{1}{q_{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$~~

~~3- $q_{\frac{\alpha}{2}}(\chi^2(n-1)) \quad (n-1)$~~
~~$\forall$~~

Exo 4

1- $\left[\frac{(n-1)V}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)V}{q_{\alpha/2}}\right]$ IC (α), q quatiles $\chi^2(n-1)$.

2- On a $\frac{\left(\frac{V}{\sigma^2}-1\right)\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$.

Avec les quatiles Gaussiens,

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{V}{\sigma^2}-1\right) \times \sqrt{\frac{n-1}{2}} \in \left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right)=\alpha$$

Or $\left(\frac{V}{\sigma^2}-1\right)\sqrt{\frac{n-1}{2}} \leq q_{1-\alpha/2}$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{\sigma^2} \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 \geq \frac{V}{\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}+1}$$

Donc ICA(α) =

$$\left[\frac{V}{1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{V}{1-\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

On a $l_n = \mathbb{E}(V)\left[\frac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, c_\alpha} - \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, c_\alpha}\right]$

$$= [illegible]\,\sigma^{-2}\left[1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, c_\alpha + O\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1-\sqrt{\frac{2}{n-1}}\, c_\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right.$$

$$= C_\alpha\left(\sqrt{n-1}\right)^{-1}\sigma^{-2}\,(1+o(1))\;\square.$$

Exo 5

1- $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \sigma D \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$,

avec ε_i iid $\mathcal{N}(0,1)$. $D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \sqrt{1/3} & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}$.

2- Moindres carrés: candidats $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et s

$$\hat{\theta} = (\cancel{A}^t A)^{-1} A^t \mathcal{Y}.$$

IV

Avec $(A^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA)^{-1}A^tY = \begin{pmatrix} (Y_1+Y_2)/2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}.$$

Prévis° : $\hat{y} = A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} Y_1+Y_2/2 \\ \frac{Y_1+Y_2}{2} \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}.$

$$\|Y-\hat{y}\|^2 = 2\left(\frac{Y_1-Y_2}{2}\right)^2 \underset{(loi)}{=} \frac{1}{2}\times\left(\right. \text{[illegible]} \; \frac{4}{3}\chi^2(1)\sigma^2$$

$$= \frac{2\sigma^2}{3}\chi^2(1).$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{3}{2}\|Y-\hat{y}\|^2 = \frac{3}{4}(Y_1-Y_2)^2.$$

$$\hat{\mu}_1 \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma^2\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

3.- ~~Cours $\hat{\theta} \perp\!\!\!\perp (Y-\hat{y})$ (ici $\left(\frac{Y_1+Y_2}{2}, \frac{Y_1-Y_2}{2}\right) \perp\!\!\!\perp$),~~

~~car $\hat{y}$, de cov $\frac{1}{4}$ [$\hat{\sigma}^2$ [~~

Modèle pas homosced : moindres carrés $\not\equiv$ ÉMV,
Résidus $\not\perp\!\!\!\perp$ prédicte moindre carré

En effet $\|Y-\hat{y}\|^2 = \frac{1}{2}(Y_1-Y_2)^2$, et

~~cov~~ $\mathbb{E}((\hat{\mu}_1-\mu_1)(Y_1-Y_2)) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{Y_1+Y_2-2\mu_1}{2}\right)(Y_1-Y_2\right.$

(avec $Z_i = Y_i - \mu$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}(Z_1^2 - Z_2^2).$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\left(1+\frac{1}{3}\right)).$$

Il ~~Faudrait trouver qqc d'1 de $\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)$ et centré.~~

On passe par les moindres carrés généralisés

(EMV)

$$Y \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(A\mu, \sigma^2 DD^t).$$

$$F_{\mu,\sigma}(y_1, \dots, y_4) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4 \det(\sigma^2 DD^t)}} e^{-\frac{1}{2}(y-A\mu)^t(\sigma^2 DD^t)^{-1}(y-A\mu)^t}$$

$$\log(F_{\mu,\sigma}(y_{1:4})) \mapsto g_y(\mu,\sigma)$$

$$= -2\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log((\sigma^2)^4) - \frac{1}{2}\log(1/6)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(y-A\mu)^t(DD^t)^{-1}(y-A\mu)^t$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu} g_y(\mu,\sigma) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\left[-A^t(DD^t)^{-1}y - A^t(DD^t)^{-1}y + 2A^t(DD^t)^{-1}A\mu\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow A^t(DD^t)^{-1}A\mu = A^t(DD^t)^{-1}y$$

~~Avec $(DD^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$~~

~~$\to \times t$~~

inverse à Gauche.

$$A^t(DD^t)^{-1}A := B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

IV

et donc

$$\hat{\mu} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$= B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 3y_2 \\ y_3 \\ 2y_4 \end{pmatrix}$$

$$= B^{-1}\begin{pmatrix} y_1+3y_2 \\ y_3 \\ 2y_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1+3y_2 \\ y_3 \\ 2y_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (y_1+3y_2)/4 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Pour σ^{-2} $(=v)$,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\ell_y(\hat{\mu},v)\right) = -\frac{2}{v} + \frac{1}{2v^2}(y-A\hat{\mu})^t(DD^t)^{-1}(y-A\hat{\mu})$$

Avec $A^t(DD^t)^{-1}A\hat{\mu} = A^t(DD^t)^{-1}y$ (*)

~~$\Rightarrow \hat{\mu} = A^t(AA^t)^{-1}$~~

~~$= -\frac{2}{v}+\frac{1}{2v^2}\left[y^t(DD^t)^{-1}y\right.$~~

~~$y = A\mu + \sigma D\varepsilon$~~

$$\Leftrightarrow \hat{v} = \frac{1}{4}\left(\overset{\hat{y}^t}{(y-A\hat{\mu})}(DD^t)^{-1}\overset{\hat{y}}{(y-A\hat{\mu})}\right).$$

$$\boxed{\underline{\text{Rq}}\ \text{on a } \hat{y} \text{ (et } \hat{\mu}) \perp\!\!\!\perp \overset{\hat{v}}{(\hat{y})}.\ (\text{l.i.s})}$$

~~$\rightarrow$ En effet, $y - \hat{y} = A\mu + \sigma D\varepsilon - A\hat{\mu}$~~

~~$\mathbb{E}\left((y-\hat{y})\,\hat{y}^t\right) = \mathbb{E}\left((A\mu+\sigma D\varepsilon)\right)$~~

~~$(*) \Rightarrow A^t(DD^t)^{-1}A\hat{\mu} = A^t(DD^t)^{-1}(A\mu+\sigma D\varepsilon)$~~

~~$\Leftrightarrow A^t(DD^t)^{-1}A(\hat{\mu}-\mu) = \sigma A^t(DD^t)^{-1}D\varepsilon$~~

En effet,

~~$\hat{v} = \frac{1}{4}\left[(A(\mu-\hat\mu) + \sigma D\varepsilon)^t (DD^t)^{-1}(A(\mu-\hat\mu)+\sigma D\varepsilon)\right]$~~

~~$= \frac{1}{4}\left[(\hat\mu-\mu)^t \underbrace{A^t (DD^t)^{-1} A(\mu-\hat\mu)}_{\sigma A^t (DD^t)^{-1} D\varepsilon} + 2\overset{\sigma}{\varepsilon}^t D^t (DD^t)^{-1} A(\mu-\hat\mu) + \sigma^2 \varepsilon^t \underbrace{D (DD^t)^{-1} D^t}_{I_4} \varepsilon\right]$~~

$= \frac{1}{4}\left[(\hat\mu-\mu)^t \right.$

Ici, $\hat{v} = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 3(y_2-y_1)/4 \\ (y_1-y_2)/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & 0 \\ 0 & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(y_2-y_1)/4 \\ (y_1-y_2)/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{9}{16}(y_2-y_1)^2 + \frac{3}{16}(y_1-y_2)^2 \right]$

$= \frac{3}{16}(y_2-y_1)^2.$

On a $\hat\mu_1 \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{1}{16}(1 + \underset{1}{\cancel{1}})\sigma^2\right)$

$= \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{16}\sigma^2\right) = \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{8}\right).$

$\hat{v} \overset{(loi)}{=} \frac{3\sigma^2}{16}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{\sigma^2}{4}\chi^2(1).$

$((y_2-y_1), (y_1+3y_2))\vec{v_g}$, de cov.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Donc $\hat{v} \perp\!\!\!\perp \hat\mu_1$.

Donc $\frac{(\hat\mu_1 - \mu_1)\times\sqrt{8}}{4\hat{v}} \overset{(loi)}{=} \mathcal{T}(1).$

(V)

On a un IC(α) pour μ_1 : $[\hat{\mu}_1 \pm \sqrt{2}\hat{v}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}]$,

avec quantiles Student (1).

5-

a) $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A} \mu_1 + \sigma D \varepsilon.$

b) On réécrit

$$(A')^t (DD^t)^{-1} A \tilde{\mu}_1 = (A')^t (DD^t)^{-1} y$$

Avec $(A')^t (DD^t)^{-1} A = (1 \text{—} 1)\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$= (1 \text{—} 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7.$

On a $7\tilde{\mu}_1 = (1 \text{—} 1)\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_4 \end{pmatrix}$

$= (1 \text{—} 1)\begin{pmatrix} Y_1 \\ 3Y_2 \\ Y_3 \\ 2Y_4 \end{pmatrix}.$

Donc $\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{7}(Y_1 + 3Y_2 + 2Y_4 + Y_3)$

$\underset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{1}{49}[1+1+1+1]\sigma^2\right)$

$\underset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{4}{49}\sigma^2\right).$

On a $\mathbb{E}(|\mu_1 - \hat{\mu}_1|^2) = \frac{\sigma^2}{8}$

$\mathbb{E}(|\mu_1 - \tilde{\mu}_1|^2) = \frac{4\sigma^2}{49} < \mathbb{E}(|\mu_1 - \hat{\mu}_1|^2)$

6- a) $\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{7}(Y_1 + 3Y_2 + Y_3 + 2Y_4)$

$= \mathcal{N}\left(\frac{4\mu_1}{7} + \frac{\mu_2}{7} + \frac{2\mu_3}{7}, \frac{4\sigma^2}{49}\right)$

$\mathbb{E}(|\tilde{\mu}_1 - \mu_1|^2)$

$= \frac{4\sigma^2}{49} + \left(\frac{3}{7}\mu_1 - \frac{\mu_2}{7} - \frac{2\mu_3}{7}\right)^2$

b) Si

$(3\mu_1-\mu_2-2\mu_3)^2 < \left(\frac{49}{8}-4\right)\sigma^2$, $\tilde{\mu}_1$ est

meilleur que $\hat{\mu}_1$

$\Leftrightarrow |\mu_2+2\mu_3-3\mu_1| < \sigma\sqrt{\frac{17}{8}}$ □

Exo 6

1) $Y = b_0 \mathbb{1} + b_1 x + \sigma\varepsilon$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{X} b + \varepsilon$$

$$Y \underset{(loi)}{=} \mathcal{N}(Xb, \sigma^2 I_n)$$

Modèle homoscéd : Moindres carrés $\Leftrightarrow$ EMV.

$\hat{b} = ?$

min $\|Y - Xb\|^2$ donné par

$$X^t X b - X^t Y = 0$$

$$\Leftrightarrow b = (X^t X)^{-1} X^t Y.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y-\hat{Y}\|^2}{n-2} = \|Y - X\hat{b}\|^2 / n-2$$

$$= \frac{\|\cancel{M}(I - X(X^tX)^{-1}X^t)Y\|^2}{n-2} \overset{(loi)}{=} \frac{1}{n-2}\chi^2(n-2).$$

On a $\hat{b} \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(b, \sigma^2 (X^tX)^{-1})$

$$= \mathcal{N}\left(b, \sigma^2 \begin{pmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n\overline{x^2} \end{pmatrix}^{-1}\right)$$

$$\overset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(b, \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} \overline{x^2} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \Big/ (\overline{x^2} - \bar{x}^2)\right),$$

et $\hat{b} \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$.

VI

2.

a) $Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0 = b_0 - \hat{b}_0 + (b_1 - \hat{b}_1)x_0 + \eta$

$$= (1, x_0)\left(b - \hat{b}\right) + \eta$$

$$\underset{(loi)}{=} (1, x_0)\, \mathcal{N}\left(0_2, \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \begin{pmatrix} \overline{x^2} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\perp\!\!\perp}{+} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\underset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left[1 + \frac{\cancel{1}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}\left[\overline{x^2} - 2x_0\bar{x} + x_0^2\right]\right]\right)$$

$$\underset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) + (\bar{x} - x_0)^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}\right)\right)$$

2.b) On a aussi

$\hat{\sigma}^2 \perp\!\!\perp Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0$ (car

$\hat{\sigma}^2 \perp\!\!\perp (\hat{b}, Y_0)$)

Donc

$\dfrac{Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) + (\bar{x} - x_0)^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}} \underset{(loi)}{=} T(n-2)$. Si $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile pour $T(n-2)$, avec proba α,

$$\frac{Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) + (\bar{x} - x_0)^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}} \in \left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\begin{cases} Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0 \leq \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) + 1}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}\, q \\ Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0 \geq -\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1 + (\overline{x^2} - \bar{x}^2)}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}\, q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \leq \frac{1}{\hat{b}_1}\left[Y_0 - \hat{b}_0 + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1 + (\overline{x^2} - \bar{x}^2)}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}\, q \right] \\ x_0 \geq \frac{1}{\hat{b}_1}\left[Y_0 - \hat{b}_0 - \hat{\sigma}\, q \sqrt{1 + \frac{1 + (\overline{x^2} - \bar{x}^2)}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}} \right] \end{cases}$$

3 - a)

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2 + \sum_{j=1}^{m} (Y_{0j} - \bar{Y}_0)^2}{(n+m-3)}$$

$$\underset{(loi)}{=} \frac{\sigma^2 \chi^2(n+m-3)}{n+m-3} \quad . \text{ car } \chi^2(p) \overset{\perp\!\!\!\perp}{+} \chi^2(q) = \chi^2(p+q)$$

Donc $\mathbb{E}(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2$.

3 - b)

$$\bar{Y}_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0 \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) + (\bar{x} - x_0)^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \right)\right)$$

3 - c) On a $\tilde{\sigma}^2 \perp\!\!\!\perp \bar{Y}_0 - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_0$. En effet :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2 \perp\!\!\!\perp \left(\bar{Y}_0, \sum_{j=1}^{m} (Y_{0j} - \bar{Y}_0)^2, \hat{b} \right) \\ \sum_{j=1}^{m} (Y_{0j} - \bar{Y}_0)^2 \perp\!\!\!\perp \left(\hat{\sigma}^2, \hat{b}, \bar{Y}_0 \right) \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{1}{\hat{b}_1}\left[\bar{Y}_0 - \hat{b}_0 \pm \tilde{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1 + (\overline{x^2} - \bar{x}^2)}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}\, q \right] IC(\alpha),$$

Où q quantile $T(n+m-3)$.

d) Oui, on a encore $\hat{\sigma}^2 \perp\!\!\!\perp (\bar{Y}_0, \hat{b})$, et

donc $\frac{1}{\hat{b}_1}\left[\bar{Y}_0 - \hat{b}_0 \pm \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1+(\bar{x}^2 - \overline{x^2})}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}\, q \right]$

avec q = quantile $T(n-2)$ suffit.

Mais c'est moins précis.