Stat Fonda TD3

Exo 1

Si $t \in \mathbb{R}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

On a $\mathbb{E}(|Z|^k) < +\infty$, donc $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

et $\phi_Z^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k}\left(\mathbb{E}(e^{itZ})\right)\Big|_0$

$$= (i)^k \mathbb{E}(Z^k), \text{ avec}$$

$$\phi(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^p \frac{t^{2p}}{p!} \quad \text{série entière de}$$

RCV $+\infty$. ~~donc~~ $\cancel{\phi^{(k)}(0) = \frac{(-\frac{1}{2})^k}{k!}}$

On en déduit, si k impair

$$\phi^{(k)}(0) = 0 = \mathbb{E}(Z^k), \text{ et si } k = (2\ell),$$

$$\phi^{(k)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell \frac{(2\ell)!}{\ell!}$$

Donc

$$\mathbb{E}(Z^{2\ell}) = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} = (2\ell-1) \times (2\ell-3) \times \dots \times 1.$$

Exo 2

1. On a $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \overset{(\text{loi})}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix}$. Donc

$X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$, et $Y \overset{\mathcal{L}}{=} -X$, donc $X \overset{\mathcal{L}}{=} -X$.

2. On a, en notant $r = \sqrt{u^2+v^2}$,

$$\phi(u)\phi(v) = \mathbb{E}(e^{iuX + ivY})$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{ir\left(\frac{u}{r}X + \frac{v}{r}Y\right)}\right).$$

Or, si $\frac{u}{r} = \cos\theta$, $\frac{v}{r} = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \overset{(\text{loi})}{=} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Donc $\frac{u}{r}X + \frac{v}{r}Y \overset{(\text{loi})}{=} X$, et

$$\phi(u)\phi(v) = \mathbb{E}(e^{irX}) = \phi\left(\sqrt{u^2+v^2}\right).$$

(-1)

On note $F(t) = \phi(\sqrt{2t})$, pour $t \geq 0$, et on a

$$F(t)F(t) = \phi(\sqrt{2t})\phi(\sqrt{2t}) \underset{\substack{\uparrow \\ = \phi(2\sqrt{t})}}{=} F(2t)$$

$$F(t)^3 = F(t)^2 F(t) = F(2t)F(t) = \phi(\sqrt{4t})\phi(\sqrt{2t})$$

$$= \phi(\sqrt{6t}) = F(3t).$$

...

$$F(t)^n = F(t)^{n-1}F(t) = \cancel{\phi}\, F((n-1)t)F(t)$$

$$= \phi(\sqrt{2(n-1)t})\,\phi(\sqrt{2t})$$

$$= F(nt).$$

On en déduit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = F(1)^n$, et,

pour $q \in \mathbb{Q}$, $F(q) = F(1)^q$. Par continuité,
$\underset{F(1) \geq 0, \text{ car } = F(\frac{1}{2})^2}{}$

on a $F(t) = F(1)^t = \exp(t \ln(F(1)))$ $(F(1) > 0$

sinon $F(0) = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} F(\frac{1}{n})^n$, et $F(1) < 0$ sinon $f \notin C^0_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On en déduit $\phi(\sqrt{2t}) = \exp(t \ln(F(1)))$, et

donc $\phi(t) = \exp(\frac{t^2}{2} \ln(F(1)))$, donc

$(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, -\ln(F(1)) I_2)$

Exo 3

On a $Y = m + L\mathcal{E}$, où $L = OG + \mathrm{Diag}_{\geq 0}$, avec

$LL^t = V$.

Si $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{E}(e^{i\langle t; Y\rangle})$$

$$= \mathbb{E}(e^{i\langle t, L\mathcal{E}\rangle})\, e^{i\langle m, t\rangle}$$

$$= e^{i\langle m,t\rangle}\, \mathbb{E}(e^{i\langle L^t t, \mathcal{E}\rangle})$$

$$= e^{i\langle m,t\rangle}\, e^{-\frac{\|L^t t\|^2}{2}}$$

$$= e^{i\langle m,t\rangle} e^{-\frac{t^t L L^t t}{2}} = e^{i\langle m,t\rangle} e^{-\frac{t^t V t}{2}} \quad \square$$

Exo 4

1. $Y_1^2 + Y_2^2 \overset{(loi)}{=} -2\ln(U_1)$. Si $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$

mesurable,

$$\mathbb{E}(F(Y_1^2 + Y_2^2)) = \int_0^1 F(-2\ln(u))\,du$$

$V = -2\ln(u)$ ($u \mapsto -2\ln(u)$ difféo de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$)

$dv = -\frac{2}{u}\,du = -2e^{V/2}\,du$

$$\mathbb{E}(f(Y_1^2+Y_2^2)) = \cancel{\int_0^1} \int_0^{+\infty} f(v) \times \frac{e^{-v/2}}{2}\,dv.$$

Donc $Y_1^2+Y_2^2 = \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2\times\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \chi^2(2)$.

⊕ $\frac{Y_2}{Y_1}$ est bien définie p.s. par $\tan(2\pi U_2)$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mesurable,

$$\mathbb{E}(f(\tan(2\pi V))) = \int_0^1 f(\tan(2\pi v))\,dv$$

$$= \int_0^{1/4} f(\tan(2\pi v))\,dv + \int_{1/4}^{3/4} f(\tan(2\pi v))\,dv + \int_{3/4}^{1} f(\tan(2\pi v))\,dv$$

$$= 2 \times \int_{-1/4}^{1/4} f(\tan(2\pi v))\,dv$$

$v \mapsto \tan(2\pi v)$ C^1-diff de $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ ds $\mathbb{R}$.

$u = \tan(2\pi v)$

$du = 2\pi(1+\tan^2(2\pi v))\,dv = 2\pi(1+u^2)\,dv$

Donc $\mathbb{E}(f(\frac{Y_2}{Y_1})) = 2 \times \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{2\pi(1+u^2)}\,du$.

Donc $\frac{Y_2}{Y_1} \overset{(loi)}{=} \mathcal{C}(1)$.

Rq : On a $Y_1^2+Y_2^2 \perp\!\!\!\perp \frac{Y_2}{Y_1}$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ mesurable,

$$\mathbb{E}(f(Y_1,Y_2)) = \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2), \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)\right)\right)$$

$$\varphi : \begin{cases}]0,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \\ (u,v) \longmapsto \left(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)\right) \end{cases}$$

C_1-difféo. $|J\varphi|_{(u,v)} = \begin{vmatrix} (-2\ln(u))^{-1/2} \times -\frac{1}{u}\cos(2\pi v) & -2\pi\sin(2\pi v)\sqrt{-2\ln(u)} \\ (-2\ln(u))^{-1/2} \times -\frac{1}{u}\sin(2\pi v) & +2\pi\cos(2\pi v)\sqrt{-2\ln u} \end{vmatrix}$

T

$$= \left| \cos^2(2\pi v) \times 2\pi \times -\frac{1}{u} + \sin^2(2\pi v) \times 2\pi \times -\frac{1}{u} \right|$$

$$= \frac{2\pi}{u}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}(F(Y_1, Y_2))$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 F(\varphi(u,v)) \left| J_{\varphi(u,v)} \right| \times \frac{u}{2\pi} \, du \, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{F(\varphi(u,v)) \left| J_{\varphi(u,v)} \right|}{2\pi} \cancel{g(u,v)} \, g(\varphi(u,v)) \, du \, dv$$

Avec $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$.

Donc $\mathbb{E}(F(Y_1, Y_2))$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} F(x,y) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \, dx \, dy$$

Donc $(Y_1, Y_2) \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(0_2, I_2)$.

Exo 5 $AY \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(A \times 0, \underbrace{AA^t}_{\sigma^2 I_n})$

$$= \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n).$$

Exo 6 Soient $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}^{e_1}, \dots, \mathbb{R}^{e_k}$.

On a $\mathbb{E}\left(e^{i \sum_{j=1}^{k} \langle t_j, Z_j \rangle}\right)$

$$= \mathbb{E}(e^{i \langle t, Z \rangle})$$

$$= e^{-\frac{t^t V t}{2}}$$

Avec $t^t V t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & V_k \end{pmatrix} \cancel{(t_1, \dots, t_k)} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$

$$= \sum_{j=1}^{k} t_j^t V_j t_j.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^{q}\langle t_j, Z_j\rangle}\right) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} t_j^t V_j t_j}$$
$$= \prod_{j=1}^{q} \mathbb{E}\left(e^{i\langle t_j, Z_j\rangle}\right).$$

Dans le cas non centré, on a $(Z_1 - m_1, \dots, Z_q - m_q)$ $\perp\!\!\!\perp$, donc $(Z_1, \dots, Z_q)$ $\perp\!\!\!\perp$.

Exo 7

1.) On a

$$\mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} T_1 X \\ T_2 X \end{pmatrix} \left((T_1 X)^t, (T_2 X)^t\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 K T_1^t & T_1 K T_2^t \\ T_2 K T_1^t & T_2 K T_2^t \end{pmatrix}.$$

2. Si X est Gaussien, alors $\begin{pmatrix} T_1 X \\ T_2 X \end{pmatrix}$ Gaussien. D'après l'exo 6, $T_1 X \perp\!\!\!\perp T_2 X \Leftrightarrow$ … $^t = 0$.

Exo 8

1.) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y_a \le t) = \mathbb{P}\left(X 1_{|X| \le a} + (-X) 1_{|X| \ge a} \le t\right)$$

Si $t \ge a$, $\mathbb{P}(Y_a \le t) = \mathbb{P}(|X| \le a) + \mathbb{P}(-X \in [a,t] \cup]-\infty, -a])$
$$= F_X(t) \quad (\text{car } X \overset{(loi)}{=} -X).$$

Si $t < a$, $\mathbb{P}(Y_a \le t)$
$$= \mathbb{P}(X \in [-a, t]) + \mathbb{P}(-X \in]-\infty, -a])$$
$$= F_X(t).$$

Donc $Y_a \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(0,1)$.

Si $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ b \longmapsto \int_0^b x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$. $g \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $g \nearrow$, $g(0) = 0$ et $g(+\infty) = \frac{1}{2}$.

Donc $\exists b > 0$; $g(b) = \frac{1}{4}$.

On a $\mathrm{Cov}(X Y^b) = \mathbb{E}(X Y^b)$
$$= \mathbb{E}(X^2 1_{|X| \le b}) - \mathbb{E}(X^2 1_{|X| > b})$$

III

$$= \int_{-b}^{b} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx - 2\int_{b}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= 2\times[g(b) - (\tfrac{1}{2} - g(b))] = 4[g(b) - \tfrac{1}{4}] = 0.$$

On a $\mathbb{P}(X \leq -b \cap Y_b \leq -b)$

$$= \mathbb{P}(X \leq -b \cap (-X) \leq -b) = 0, \text{ et donc}$$

$\neq$ de $\mathbb{P}(X \leq -b)\,\mathbb{P}(Y^b \leq -b)$.

Donc $X \not\perp\!\!\!\perp Y^b$, donc (X, Y^b) pas $\vec{vg}$.

Exo 9 Soit $t \in \mathbb{R}$

1- $\mathbb{E}(e^{itZ}) = \mathbb{E}(e^{itYX}) = p\,\mathbb{E}(e^{itX}) + (1-p)\mathbb{E}(e^{-itX})$
$= \varphi\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Donc $Z \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(0,1)$.

On a $\mathbb{P}(\{X+Z=0\}) \geq 1-p > 0$, donc

2- Si $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \leq a \cap |Z| > a) = 0$,

donc $\neq$ de $\mathbb{P}(|X| \leq a)\,\mathbb{P}(|Z| > a)$, donc X, Z pas $\perp\!\!\!\perp$.

Par ailleurs $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}(YX^2)$
$= \mathbb{E}(Y) = 2p - 1 = 0$ si $p = \frac{1}{2}$.

Exo 10 On note $U = X - Y$, $V = X + Y$. ~~U et V sont Gaussiennes (car~~ $(U,V)^t$ Gaussien (car $(X,Y)^t$ $\vec{vg}$ et $(U,V)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (X,Y)^t$).

$\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 1$.

Donc $U \perp\!\!\!\perp V$.

Exo 11 On note $U = (X_1 + X_2)$, $V = (X_1 - X_2)$.

(U,V) $\vec{vg}$ comme ds 10.

On a $\mathbb{E}(U^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \mathbb{E}(V^2)$

On a $\text{cor}(U^2, V^2)$

$$= \mathbb{E}(U^2V^2) - \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2)$$

$$= \mathbb{E}\left((X_1^2 - X_2^2)^2\right) - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2$$

$$= \mathbb{E}(X_1^4) + \mathbb{E}(X_2^4) - 2\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2$$

$$= 3\sigma_1^4 + 3\sigma_2^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^4 - \sigma_2^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$= 2(\sigma_1^4 + \sigma_2^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2) = 2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2.$$

Donc $\text{Cor}(U^2, V^2) = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

Dans ce cas, d'après 10, U et V sont $\perp\!\!\!\perp$, donc U^2 et V^2 aussi.

$U^2 \perp\!\!\!\perp V^2 \Rightarrow \text{cor}(U^2, V^2) = 0$ est trivial

$\boxed{\text{Exo 12}}$ On note $(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1 - 1, X_2 - 1, X_3)$

$= \mathcal{N}(0_3, V)$.

- $(0,1,-1) \in \ker V$. Plus finement, $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ équivaut à

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ \cancel{x + 2y + } \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}.$$ Donc $\ker V = \underbrace{(0,1,-1)}_{v_0} \times \mathbb{R}$.

On en déduit

$$\mathbb{E}\left((\langle v_0, Y \rangle^2\right) = v_0^t V v_0 = 0, \text{ donc}$$

$\langle v_0, Y \rangle \underset{p.s.}{=} 0$ et donc $Y_2 - Y_3 = 0$ p.s, ce qui équivaut à $X_2 - X_3 = 1$ p.s.

2.1 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V'}\Big)$, avec $\text{rg}(V') = 2$, donc

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ admet pour densité sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{e^{-\frac{y^t V'^{-1} y}{2}}}{2\pi\sqrt{\det V'}}.$$

On a $\det V' = 2$, et $(V')^{-1} = \frac{1}{2}(\text{Com}(V'))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

IV

Donc $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ a pour densité

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \times \exp\left(-\frac{1}{4}\left((x_1-1, x_2-1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(2(x_1-1)^2 + 2(x_2-1)^2 - 2(x_1-1)(x_2-1)\right]\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left[(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_1-x_2)^2\right]\right].$$

3- Diagonalisons V.

$$-\chi_V(x) = x^3 - 6x^2 + [0+2+2]x - 0$$
$$= x(x^2 - 6x + 4).$$

→ pas une bonne idée

Notons O_2 une BON de $\mathrm{Vect}(v_0)^\perp$;

$$O = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & O_2 \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$$

On a $V = O\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{D} O^t$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\perp\!\!\!\perp$. On a

$$\underbrace{O_2 \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \overset{(loi)}{=} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ a pour support $\mathbb{R}^2$, $A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ a pour support $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(v_0)^\perp$.

Donc X a pour support $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(v_0)^\perp$. □

$\boxed{\text{Ex 13}}$ ~~X étant~~

1- $Z = \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (avec fct° caractéristique).

2- Notons $T = (Z, X_1 - Z, \dots, X_n - Z)^t$.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

n+1

Donc $T \underset{vg}{\rightarrow}$

$$\mathcal{N}\left(A\begin{pmatrix}\mu\\ \vdots\\ \mu\end{pmatrix}, \sigma^2 AA^t\right), \text{ avec}$$

$$A\begin{pmatrix}\mu\\ \vdots\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} . \quad AA^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & (1-\frac{1}{n}) & & & \cancel{0}\ -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cancel{0}\ -\frac{1}{n} & & \ddots & (1-\frac{1}{n}) \end{pmatrix}.$$

3-| D'après 2- on a $Z \perp\!\!\!\perp ((X_1-Z),\dots,(X_n-Z))$,
donc $Z \perp\!\!\!\perp g((X_1-Z),\dots,(X_n-Z))$, si g mes ≥ 0.

Donc $Z \perp\!\!\!\perp V$.

4-| $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 = (Z-\mu)^2 + \frac{n-1}{n}V$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 = n(Z-\mu)^2 + (n-1)V.$$

5-| On en déduit $n\sigma^2 = n\frac{\sigma^2}{n} + (n-1)\mathbb{E}(V)$,
donc $\mathbb{E}(V) = \sigma^2$.

De plus, pour $t \in \mathbb{R}$

~~$\Phi(t)$~~

$$\mathbb{E}\left(e^{it\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{itn(Z-\mu)^2 + it(n-1)V}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{itn(Z-\mu)^2}\right)\mathbb{E}\left(e^{it(n-1)V}\right).$$

Avec $\begin{cases} \mathbb{E}\left(e^{it\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right)}\right) = \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-it\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} & \left(\text{pour une } \Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)\right). \\ \mathbb{E}\left(e^{itn(Z-\mu)^2}\right) = \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-it\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}. & \end{cases}$

Donc

$$\Phi_{(n-1)V}(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-it\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$ Donc $(n-1)V \overset{(loi)}{=} \sigma^2\chi^2(n-1)$.

Exo 14

On note $M_k = (1_{Y_k=1}, \dots, 1_{Y_k=d})^t$.

$$\begin{cases} \mathbb{E}(M_k) = (p_1, \dots, p_k)^t \\ Cov(M_k) = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots & -p_1p_n \\ -p_1p_2 & \ddots & & -p_2p_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -p_1p_n & & & p_d(1-p_d) \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a bien $\mathbb{E}(\|M_k\|^2) = 1 < +\infty$, donc le TCL donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (M_k - p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \underbrace{\mathcal{N}(0_d, cov(M_1))}_{Z}.$$

Comme $u \mapsto \|u\|^2 \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$,

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (M_k - p) \right\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \|Z\|^2$$

$$\| \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{d} (N_j^n - np_j)^2$$

Exo 15

1- Si $d=1$, $\mathbb{E}(e^{\frac{sX^2}{2}}) = \overset{\text{Laplace}}{\overbrace{\phi}}_{X^2}(s/2)$. Or

$X^2 \underset{(loi)}{=} \Gamma' \chi^2(1) = \Gamma \cancel{x} \cancel{\Gamma} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Donc $\phi_{X^2}(\frac{s}{2}) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\Gamma s}{2}} \right)$ si $\overset{\Gamma s < 1}{\cancel{\Gamma s < +\infty}}$

$= +\infty$ sinon (cf Laplace de $\Gamma(\frac{1}{2},$

2- $S = diag(s)$, $\Gamma = I_d$

$\mathbb{E}(e^{\frac{X^t S X}{2}}) = \mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} s_j X_j^2})$

$= \prod_{j=1}^{d} \mathbb{E}(e^{\frac{s_j}{2} X_j^2}) = +\infty$ si $\exists j, s_j \geq 1$, et

sinon ~~vaut~~ (cas où $I - S \succ 0$) vaut

$$\prod_{j=1}^{d} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{s_j}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1-s_j} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{det(I_d - \Gamma}}$$

3- Pour $\Gamma = I_d$, $S = U \Delta U^t$, U OG, Δ diag.

$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{X^t S X}{2}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{2} X^t U \Delta U^t X}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{2}(U^t X)^t \Delta (U^t X)}\right)$$

Avec $U^t X = \mathcal{N}(0, I_d)$, donc

$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{X^t S X}{2}}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\det(I - \Gamma \Delta)}} & \text{si } I - \Gamma \Delta > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $I - \Gamma\Delta > 0 \overset{\Gamma = I_d}{\iff} U(I - \Gamma\Delta)U^t > 0$
$\iff I - \Gamma S > 0$

et $\mathrm{Det}(I - \Gamma\Delta) = \mathrm{Det}(I - \Gamma S)$.

Donc $\mathbb{E}\left(e^{X^t S X/2}\right) = \begin{cases} 1/\sqrt{\mathrm{Det}(I - \Gamma S)} & \text{si } I > \Gamma S, \\ +\infty & \end{cases}$

4- Cas Γ quelconque. On pose $\Gamma = U^t \Delta U$, $X = U^t \sqrt{\Delta}\, \mathcal{E}$, où $\mathcal{E} = \mathcal{N}(O_d, I_d)$.

Alors $\mathbb{E}\left(e^{\frac{X^t S X}{2}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{2}\left(\mathcal{E}^t \overbrace{\sqrt{\Delta} U S U^t \sqrt{\Delta}}^{\text{sym}} \mathcal{E}\right)}\right)$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}(I - \sqrt{\Delta} U S U^t \sqrt{\Delta})}} & \text{si } I - \sqrt{\Delta} U S U^t \sqrt{\Delta} > 0 \\ = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Lemme}}$: Si D diagonale, $\mathrm{Det}(I - AD) = \mathrm{Det}(I - DA)$, et
$I - AD > 0 \iff I - DA > 0$

$\boxed{\text{Preuve}}$: Si $\forall i\ d_i \neq 0$, $\mathrm{Det}(I - AD) = \mathrm{Det}(D(I - AD)D^{-1})$
$= \mathrm{Det}(I - DA)$.

De plus, si $I - DA > 0$, alors $D^{-1}(I - DA)D > 0$, donc $I - AD > 0$ et réciproquement.

Comme $\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathrm{Det}(A) \end{cases}$ et $\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \lambda_{min}(A) \end{cases}$ sont continues, on peut raisonner par densité des matrices diagonales à coeff $\neq 0$.

VI

Si $D_n \to D$, D_n à coeff $\neq 0$,

On a

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Det}(I - AD_n) \arrow[d, "n"] & = \mathrm{Det}(I - D_n A) \arrow[d, "n"] \\ \mathrm{Det}(I - AD) & \mathrm{Det}(I - DA) \end{tikzcd}$$

Pour la positivité. Si $\lambda_{min}(I - AD) = c_0 > 0$. Pour

n assez grand $\lambda_{min}(I - AD_n) > c_0/2 \Leftrightarrow \lambda_{min}(I - D_n A) > \frac{c_0}{2}$

Avec $\lambda_{min}(I - D_n A) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_{min}(I - DA)$. Donc

$\lambda_{min}(I - DA) \geq \frac{c_0}{2}$, et réciproquement. Donc

$I - \sqrt{\Delta} U S U^t \sqrt{\Delta} > 0 \Leftrightarrow$

$$I - \Delta U S U^t > 0 \Leftrightarrow I - U^t \Delta U S > 0$$
$$\Leftrightarrow I - \Gamma^t S > 0$$

Et $\mathrm{Det}(I - \sqrt{\Delta} U S U^t \sqrt{\Delta}) = \mathrm{Det}(I - U^t \Delta U S) = \mathrm{Det}(I - \Gamma^t S)$