Stat Fonda TD 1

Exo 1

1- Soit $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(|Y_n - c| > \varepsilon)$

$$= \mathbb{P}(\{Y_n > c+\varepsilon\} \cup \{Y_n < c - \varepsilon\})$$

$$\leqslant 1 - F_{Y_n}(c+\varepsilon) + F_{Y_n}(c-\varepsilon)$$

Or $F_Y(u) = \mathbb{1}_{c \leq u}$, pour $u \in \mathbb{R}$. Donc $c-\varepsilon, c+\varepsilon$ sont des points de continuité de F_Y.

On en déduit

$$1 - F_{Y_n}(c+\varepsilon) + F_{Y_n}(c-\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \square$$

2- Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

$$\phi_{t_1,t_2}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(e^{it_1 X_n + it_2 Y_n})$$

$$|\phi_{t_1,t_2}(X_n, Y_n) - \phi_{t_1,t_2}(X, c)|$$

$$\leqslant |\mathbb{E}(e^{it_1 X_n} e^{it_2 Y_n}) - \mathbb{E}(e^{it_1 X_n} e^{it_2 c})|$$

$$+ |\mathbb{E}(e^{it_1 X_n} e^{it_2 c}) - \mathbb{E}(e^{it_1 X} e^{it_2 c})|$$

$$\leqslant \mathbb{E}(|e^{it_2 Y_n} - e^{it_2 c}|) + \underbrace{|\mathbb{E}(e^{it_1 X_n}) - \mathbb{E}(e^{it_1 X})|}_{\downarrow n\to+\infty \; 0}$$

Avec

$$\mathbb{E}(|e^{it_2 Y_n} - e^{it_2 c}|) \leqslant \mathbb{E}(|e^{it_2(Y_n - c)} - 1|)$$

$$\leqslant \mathbb{E}(|e^{it_2(Y_n-c)} - 1| \mathbb{1}_{|Y_n - c| \leq \delta}) + \mathbb{P}(|Y_n - c| > \delta)$$

Avec $\delta = \omega_{u \mapsto e^{it_2 u}, 0}(\varepsilon)$

$$\leqslant \varepsilon + \mathbb{P}(|Y_n - c| > \delta)$$

$$\leqslant 2\varepsilon, \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Donc $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{(loi)} (X_n, c)$.

Comme $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto xy \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

On a $\begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{(loi)} X + c \\ X_n Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{(loi)} cX \end{cases}$.

3- On prend $X_n = X$ pour $n \geq 1$, et $Y_n = (-1)^n X \overset{(loi)}{=} X$. (symétrique)

On a $X_n + Y_n = 2X$ si n pair, $= 0$ si n impair, donc ne CV pas en loi (regarder t ; $\phi_X(t) \neq 1$). Donc (X_n, Y_n) ne peut CV en loi.

4- On a $\dfrac{g(\bar{X}_n) - g(\mu)}{\bar{X}_n - \mu} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} g'(\mu)$. En effet,

pour un $\varepsilon > 0$, et δ ; $\forall x \in [\mu - \delta, \mu + \delta]$ $\left| \dfrac{g(x) - g(\mu)}{x - \mu} - g'(\mu) \right| \leq \varepsilon$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{g(\bar{X}_n) - g(\mu)}{\bar{X}_n - \mu} - g'(\mu) \right| > \varepsilon \right) \leq \underbrace{\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \delta)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}.$$

Par ailleurs, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (TCL car $\mathbb{E}\|X_1\|^2 < +\infty$).

Donc, d'après Slutsky

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n \to +\infty]{(loi)} g'(\mu)\mathcal{N}(0, \sigma^2) \overset{(loi)}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2 g'(\mu)^2).$$

Si q est le 97,5%-quantile d'une $\mathcal{N}(0,1)$,

alors $\left[g(\bar{X}_n) - \dfrac{\sigma |g'(\mu)|}{\sqrt{n}} q \, , \, g(\bar{X}_n) + \dfrac{\sigma |g'(\mu)|}{\sqrt{n}} q \right]$

est un ICA(95%) pour $g(\mu)$.

Pb : σ et $g'(\mu)$ inconnus. Remplacer par $\hat{\sigma}_n$ et $g'(\bar{X}_n)$ si g C^1 puis Slutsky.

Exo 2

1- On a $\mathbb{E}_\theta(\bar{X}_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \theta$. Donc $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

Risque quadratique :

$$R_\theta(T) = \mathbb{E}_\theta((\bar{X}_n - \theta)^2) = Var(\bar{X}_n) = \frac{Var(X_1)}{n} = \frac{\theta}{n}.$$

2- $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \theta$, car X_1 est intégrable. Comme $u \mapsto \sqrt{u}$

est continue en θ, $\sqrt{\bar{X}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \sqrt{\theta}$. D'après le TCL

$(X_1 \in L^2)$, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$

D'après Slutsky, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$. Si $\underline{q}$

est le quantile d'ordre 1% de $\mathcal{N}(0,1)$, $[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\, q,$

$\bar{X}_n + \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\, q]$ est un ICA(98%)

3- D'après Delta-méthode,

$$\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\theta}) \xrightarrow[(loi)]{n\to+\infty} \sqrt{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \mathcal{N}(0,1).$$

Donc $[\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{n}}, \sqrt{\bar{X}_n} + \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{n}}]$ est un ICA(98%).

Par ailleurs

$[\sqrt{(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\, q) \vee 0}, \sqrt{\bar{X}_n + \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\, q}]$ en est

un autre

Exo 3

1- On a $X_i = \theta + \varepsilon_i$, avec $\varepsilon_i \sim \mathcal{E}(1)$, ε_i iid.

Donc $E_\theta(X_1) = 1 + \theta$. $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n - 1$ est alors

un estimateur sans biais de θ.

2- On a

$$\mathbb{E}_\theta^n[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathbb{E}[(\bar{\varepsilon}_n - 1)^2]$$
$$= Var(\bar{\varepsilon}_n) = \frac{Var(\varepsilon_1)}{n} = \frac{1}{n}.$$

BT donne

$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Donc $[\hat{\theta}_n - \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}, \hat{\theta}_n + \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}]$

est un $I_1(\alpha)$.

3- Comme $\varepsilon_1 \in L_1$, on a, d'après le TCL,

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$. Si $q_{\frac{\alpha}{2}}$ est tel que

$\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geqslant q_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$, alors

$I_2(\alpha) = [\hat{\theta}_n - \frac{q_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{q_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}]$ est un ICA(α).

II

4- Pour $x > 1$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{1} dt \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt$

$$\leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\, x} \leq e^{-x^2/2}.$$

On a $\begin{cases} e^{-x^2/2} = \beta \Leftrightarrow x = \sqrt{2\ln(1/\beta)} \\ x > 0 \end{cases}$, pour

$\beta < 1$. Donc, pour β assez petit $q_{1-\beta} \leq \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}$.

5- On a $L(I_1(\alpha)) = \frac{2}{\sqrt{n\alpha}}$, et $L(I_2(\alpha)) \leq \frac{2q_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$

$\leq \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{2\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$, pour α assez petit.

On a alors $L(I_2(\alpha)) \underset{\alpha \to 0}{=} o(L(I_1(\alpha)))$.

6- On a $\theta_n^* \overset{(loi)}{=} \theta + \min_{i=1..n} \varepsilon_i = \theta + \varepsilon'$, où

$\varepsilon' \sim \mathcal{E}(n)$.

Donc $\mathbb{E}_\theta^n[(\theta_n^* - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\varepsilon') \overset{n^{-1} + \mathbb{E}(\varepsilon')^2}{=} \frac{2}{n^2} < \mathbb{E}_\theta^n[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$,

pou

7- $I_3(\alpha) = \left[\theta_n^*, \theta_n^* - \frac{\ln(1/\alpha)}{n}\right]$ est un $IC(\alpha)$.

8- On a $L(I_2(\alpha)) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2q_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} = \Omega\left(\frac{1}{n}\right)$, avec

$I_3(\alpha) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exo 4

1- $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)^2$ est un estimateur non biaisé de σ^2.

2- On a $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n(\overline{Y}_n)^2\right)$

$= n(\mu^2 + \sigma^2) - n\left[\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right] = (n-1)\sigma^2$.

Donc $S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

Exo5

1- $(X_1,\dots,X_n)$ est le résultat d'un tirage sans remise de n éléments parmi $[\![1,N]\!]$. $\{X_1,\dots,X_n\}$ est alors une loi uniforme sur l'ensemble des parties à n éléments de $[\![1,N]\!]$.

2- Comme, pour tout $\sigma\in S_n$, $(X_1,\dots,X_n)\overset{(loi)}{=}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})$, on a $\mathbb{E}(\overline{X}_n)=\mathbb{E}(X_1)=\frac{N+1}{2}$. Donc $2\overline{X}_n-1$ est un estimateur non biaisé de N.

3- Pour $k<n$, $\mathbb{P}(X_{(n)}=k)=0$.

Pour $k\geq n$, $\mathbb{P}(X_{(n)}\leq k)=\dfrac{|\{\{x_1,\dots,x_n\}\mid \forall i\ x_i\leq k\}|}{\binom{N}{n}}$

$$=\frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}.$$

Donc, pour $k=n$, $\mathbb{P}(X_{(n)}=k)=\frac{1}{\binom{N}{n}}$, et, pour $k>n$,

$$\mathbb{P}(X_{(n)}=k)=\frac{\binom{k}{n}-\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}.$$

Or $\binom{k}{n}-\binom{k-1}{n}=\binom{k-1}{n-1}$. Donc, pour $k\geq n$,

$$\mathbb{P}(X_{(n)}=k)=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

On en déduit $\mathbb{E}(X_{(n)})=\sum_{k=n}^{N}\dfrac{n\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$. Or,

On sait que $\sum_{k=n-1}^{N}\binom{k-1}{n-1}=\binom{N}{n}$. Donc $\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\binom{N+1}{n+1}$,

et donc $\mathbb{E}(X_{(n)})=\dfrac{n\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}}=n\times\dfrac{N+1}{n+1}$.

Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)X_{(n)}-1$ est un estimateur sans biais de N.

III

4- À partir de $\bar{X}_n$. En utilisant Hoeffding, on a $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq t) \leq 2e^{-\frac{nt^2}{N^2}}$.

De plus $2e^{-n\frac{t^2}{N^2}} \leq \alpha \iff \frac{nt^2}{N^2} \geq \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)$

$\iff t \geq N\sqrt{\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)/n}$.

Donc $\left[2\bar{X}_n - 1 - 2N\sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{n}},\ 2\bar{X}_n - 1 + 2N\sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{n}}\right]$

est un $IC(\alpha)$ pour N. Pb : Dépend de N.
Sol : $N \leq 2\bar{X}_n - 1 + 2N s_\alpha$
$\iff N \leq \frac{2\bar{X}_n - 1}{1 - 2s_\alpha}$

À partir de $X_{(n)}$: Pour $p \in [\![0, N-n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \leq N-p) = \frac{\sum_{k=n}^{N-p} \binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-p}{n}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{(N-p)!}{N!} \times \frac{(N-n)!}{(N-n-p)!} = \frac{N-p}{N} \times \frac{N-p-1}{N-1} \times \dots \times \frac{N-p-n+1}{N-n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{p}{N}\right) \times \left(1 - \frac{p}{N-1}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{p}{N-n+1}\right).$$

Or $\left(1 - \frac{p}{N-n+1}\right) \leq \left(1 - \frac{p}{N}\right)$.

Donc $\mathbb{P}(X_{(n)} \leq N-p) \leq \left(1 - \frac{p}{N}\right)^n$.

On a $\left(1 - \frac{p}{N}\right)^n \leq \alpha \iff$ ~~nln(1~~ $1 - \frac{p}{N} \leq \alpha^{\frac{1}{n}}$

$\iff p \geq N(1 - \alpha^{\frac{1}{n}})$.

Donc $[\![X_{(n)}, X_{(n)} + N(1 - \alpha^{\frac{1}{n}})]\!]$ est un $IC(\alpha)$ pour N. (Rq : $N \leq X_{(n)} + N(1 - \alpha^{\frac{1}{n}})$
$\iff N\alpha^{\frac{1}{n}} \leq X_{(n)} \iff N \leq \alpha^{-\frac{1}{n}} X_{(n)}$)

Autre manière : Sur cet évènement,

$$(2\bar{X}_n - 1 - N)^2 \leq \frac{4N^2 \ln(\frac{2}{\alpha})}{n}$$

$$N^2\left(1 - \frac{4}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right) - 2(2\bar{X}_n - 1)N + (2\bar{X}_n - 1)^2 \leq 0.$$

- Pour $\frac{4}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) < 1$,

$$N \in \left[\frac{2(2\bar{X}_n - 1)}{1 - \frac{4}{n}\ln(\frac{2}{\alpha})} \pm \sqrt{\frac{(2\bar{X}_n - 1)^2 \cdot (1 - \frac{4}{n}\ln(\frac{2}{\alpha}))}{1 - \frac{4}{n}\ln(\frac{2}{\alpha})}}\right].$$

- Si $\frac{4}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) \geq 1$: ~~crétin~~
IC ~~dans~~ en $]0, -[\cup]\cdot, +\infty[$

Exo 6

On remarque que $X_i = \theta + Y_i$, où les Y_i sont iid $\mathcal{U}(]0,1[)$.

1-a) On a $R_n = X_{(n)} - X_{(1)} = Y_{(n)} - Y_{(1)}$.

Soit $0 < x_1 \leq x_2 < 1$.

$$\mathbb{P}\left(\{Y_{(1)} \geq x_1\} \cap \{Y_{(n)} \leq x_2\}\right) = (x_2 - x_1)^n = g(x_1, x_2).$$

On remarque que $-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} g \,|_{(x_1,x_2)} = n(n-1)(x_2-x_1)^{n-2}$.

Notons $f(x_1,x_2) = n(n-1)(x_2-x_1)^{n-2} \mathbb{1}_{x_2 > x_1}$.

On a alors $\mathbb{P}_{(Y_{(1)}, Y_{(n)})}\left(]a,1[\times]0,b]\right) = \iint_{]a,1[\times]0,b]} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$, pour tous $a, b \in]0,1[$.

Comme les $\{]a,1[\times]0,b] \mid a,b \in]0,1[\}$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on a que $(Y_{(1)}, Y_{(n)})$ est de densité f.

Maintenant, si $h :]0,1[\to \mathbb{R}^+$ est mesurable,

$$\mathbb{E}(h(R_n)) = \mathbb{E}(h(Y_{(n)} - Y_{(1)}))$$

$$= \int_0^1 dy_1 \int_{y_1}^1 dy_2\, h(y_2 - y_1)\, n(n-1)(y_2-y_1)^{n-2}$$

$$= \int_0^1 dy_1 \int_0^{1-y_1} du\, h(u)\, n(n-1) u^{n-2}$$

$$= \int_0^1 du\, h(u)\, n(n-1) u^{n-2} \int_0^{1-u} dy_1$$

$$= \int_0^1 n(n-1)\, h(u)\, u^{n-2}(1-u)\,du.$$

Donc R_n a pour densité $n(n-1)u^{n-2}(1-u)\mathbb{1}_{u\in]0,1[} = f_n$.

$\left(R_n \overset{(loi)}{=} \beta(n-1, 2)\right)$.

1-b) On a $\mathbb{E}(R_n) = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$.

$$\mathrm{Var}(R_n) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} \leq \frac{2}{(n+1)^2} \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \right)$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(R_n \leq 1 - \frac{2}{n+1} - \varepsilon \right) \leq \frac{2}{(n+1)^2 \varepsilon^2}.$$

Donc $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} \left\{ R_n \leq 1 - \frac{2}{n+1} - \varepsilon \right\} \right) = 0$ (B.C.)

Donc, p.s., à pcr $R_n \geq 1 - \varepsilon$. On en déduit

$R_n \xrightarrow[p.s.]{} 1$.

<u>1-c)</u> Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mesurable positive.

On a $\mathbb{E}(h(n(1-R_n))$

$$= \int_0^1 h(n(1-u))\, n(n-1)\, u^{n-2} (1-u)\, du$$

$$= \int_0^n h(v)\, n(n-1) \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-2} \times \frac{v}{n} \times \frac{dv}{n}.$$

On a $\left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-v}$. Donc

$$n(n-1)\left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-2} \times \frac{v}{n^2} 1_{v \leq n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} v e^{-v}, \text{ pour } v \in \mathbb{R}^+.$$

Soit X de densité $v e^{-v} 1_{v > 0}$ (c'en est une).

D'après Scheffé, on a $n(1 - R_n) \xrightarrow[(\text{loi})]{n \to +\infty} X$.

<u>2-a)</u> On a $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \theta/2$. Donc $2\bar{X}_n$ est un estimateur de θ.

<u>2-b)</u> On a $F_{X_{(n)}}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$, pour $t \in [0, \theta]$.

Donc $X_{(n)}$ a pour densité $\frac{n t^{n-1}}{\theta^n} 1_{]0,\theta[}(t)$ (ou

$\frac{X_{(n)}}{\theta} \overset{(\text{loi})}{=} \beta(n, 1)$.

(Comme $X_1 \in L^2$, le TCL donne

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{(\text{loi})} \mathcal{N}(0, \theta^2/12).)$$

On a $2\bar{X}_n \xrightarrow[p.s.]{n \to +\infty} \theta$, donc $2\bar{X}_n \xrightarrow{(\text{loi})} \theta$.

On a $\mathbb{E}\left(\frac{X_{(n)}}{\theta}\right) = \frac{n}{n+1}$, $\mathrm{Var}\left(\frac{X_{(n)}}{\theta}\right) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

Donc $\frac{X_{(n)}}{\theta} \xrightarrow[p.s.]{n\to\infty} 1$, et donc $X_{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L(\text{ou})} \theta$.

$2\bar{X}_n$ est non biaisé, de variance $\frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$.

$X_{(n)}$ est biaisé, mais de variance $\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \le \frac{\theta^2}{(n+1)^2}$

plus petite si $n \geq 2$.

2-c) On a $E_\theta((2\bar{X}_n - \theta)^2) = Var_\theta(2\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{3n}$,

et $E_\theta[(X_{(n)} - \theta)]^2 = \theta^2 \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

$$\cancel{\le \frac{2\theta^2}{(n+1)^2}}.$$

$$= \theta^2 \left[\frac{2(n+1)}{(n+1)^2(n+2)} \right] = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour $n \geq 4$, $X_{(n)}$ est meilleur. Plus précisément,

$(n+1)(n+2) - 6n = n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) \geq 0$ si $n \geq 2$.

Comme on a égalité des risques pour $n = 1$, $X_{(n)}$ est toujours meilleur que $2\bar{X}_n$.

2-d) Intervalle basé sur $\bar{X}_n$:

$$\left[2\bar{X}_n - \frac{2\theta}{\sqrt{12}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}, 2\bar{X}_n + \frac{2\theta}{\sqrt{12}} q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \quad (IC_A(\alpha)).$$

Intervalle basé sur $X_{(n)}$: Si $t < \theta$,

$$P(X_{(n)} < t) = \int_0^t \frac{n u^{n-1}}{\theta^n} du = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$$

Or $\left(\frac{t}{\theta}\right)^n \le \alpha$ ssi $t \le \alpha^{\frac{1}{n}}\theta = \theta - (1-\alpha^{\frac{1}{n}})\theta$.

Donc $[X_{(n)}, X_{(n)} + (1-\alpha^{\frac{1}{n}})\theta]$ est un $IC(\alpha)$.