TD, Feuille 7 - Intervalles de confiance et tests

EXERCICE 1. — Pile ou Face

On joue n fois à pile ou face, avec une probabilité de succès (pile) $p \in]0, 1[$ inconnu, et on observe le nombre de pile obtenus.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Proposer un estimateur de p basé sur la méthode des moments ou du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{p}_n$.
3. Montrer que $\hat{p}$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{p}$ est asymptotiquement normal.
5. En déduire un intervalle de confiance asymptotique bilatère sur p (au niveau de confiance 98%).
6. Montrer que $E_p((\hat{p} - p)^2) \leq 1/(4n)$.
7. En déduire un intervalle de confiance non-asymptotique bilatère sur p (au niveau de confiance 98%).
8. Application numérique: combien de lancers faut-il prévoir pour obtenir une précision de 1% dans les intervalles construits précédemment? On admettra que le quantile d'ordre 99% d'une loi normale standard vaut à peu près 2,33. Les comparer sur cette base.
9. On cherche à prouver que la pièce est truquée, et tombe sur pile avec probabilité strictement plus grande que $1/2$. Donner les hypothèses de test associées.
10. Construire un test d'erreur de première espèce 5%, basé sur $\hat{p}_n$, pour en avoir le coeur net.
11. **Application:** On observe une proportion de piles de $3/4$ sur $n = 50$ lancers. Que pouvez-vous en conclure? Un tableau standard indique que $\mathbb{P}(\mathcal{B}(50, 1/2) \leq 30) \approx 0.9405$ et $\mathbb{P}(\mathcal{B}(50, 1/2) \leq 31) \approx 0.9675$.

EXERCICE 2. — Pile ou Face - Bis

On joue une infinité de fois à pile ou face, avec une probabilité de succès (pile) $p \in]0, 1[$, et on observe le nombre d'essais nécessaires à l'obtention d'un pile. On répète cette expérience n fois.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Proposer un estimateur de p basé sur la méthode des moments ou du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{p}_n$.
3. Montrer que $\hat{p}$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{p}$ est asymptotiquement normal.
5. En déduire un intervalle unilatère de niveau de confiance asymptotique 97% de la forme $[0, \hat{p}_+]$ sur p .
6. On cherche encore à prouver que la pièce est truquée et tombe sur pile avec probabilité strictement plus petite que $1/2$. Donner les hypothèses de ce test.
7. Construire un test de niveau asymptotique 3%, basé sur $\hat{p}_n$, pour ces hypothèses.

8. **Application numérique:** On répète l'expérience $n = 200$ fois, et on observe un nombre moyen d'essais pour avoir un pile de 2, 5. Que peut-on en conclure (on pourra utiliser la table de quantiles donnée en annexe)?

EXERCICE 3. — Capture

On pêche n poissons (sans remise) dans un étang comprenant N_0 carpes et N_1 brochets (ces deux quantités étant inconnues, toutes deux supposées plus grandes que n). On observe le nombre de carpes pêchées, et on suppose le nombre total de poissons N connu.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Proposer un estimateur de N_0 basé sur la méthode des moments.

EXERCICE 4. — Capture - Recapture

On a déjà marqué n_0 poissons toutes espèces confondues au cours d'une pêche précédente, que l'on a ensuite relâchés. On pêche successivement n poissons avec remise dans l'étang qui est censé contenir N poissons (inconnu), et on observe le nombre de poissons déjà vus au cours de la première pêche.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Proposer un estimateur de N basé sur la méthode des moments, on le notera $\hat{N}_n$.
3. Montrer que $\hat{N}_n$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{N}_n$ est asymptotiquement normal.
5. En déduire un intervalle de confiance de niveau asymptotique 95% sur N , du type $[\hat{N}_-; +\infty[$.
6. On cherche à prouver qu'il y a strictement plus de 1000 poissons dans l'étang. Donner les hypothèses du test associé.
7. Construire un test de niveau 5% pour ces hypothèses, basé sur $\hat{N}_n$.
8. **Application numérique:** On suppose qu'on a marqué 100 poissons ($n_0 = 100$), et qu'on repêche 50 fois. On observe 4 poissons marqués repêchés. Que peut-on en conclure? On pourra utiliser la table donnée en annexe.

EXERCICE 5. — Tanks allemands

Au cours de la seconde guerre mondiale (du moins au début), les allemands numérotaient leurs tanks produit pendant un mois de 1 à N (inconnu). Un espion se place sur une route près de l'usine, et observe les numéros des n tanks qui passent devant lui (un même tank peut passer plusieurs fois).

1. Proposer un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur $\hat{N}_{n,1}$ par la méthode des moments.
3. Montrer que $\hat{N}_{n,1}$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{N}_{n,1}$ est asymptotiquement normal.
5. En utilisant la méthode Delta, donner un intervalle de niveau de confiance asymptotique 98% sur $\log(N)$ de la forme $[0; \hat{L}_+]$.
6. En déduire un intervalle de niveau de confiance asymptotique 98% sur N de la forme $[1; \hat{N}_+]$.

7. Donner un estimateur $\hat{N}_{n,2}$ par la méthode du maximum de vraisemblance.
8. Montrer que $\hat{N}_{n,2}$ est consistant.
9. Montrer que, pour toute suite positive $r_n \rightarrow +\infty$, $r_n(N - \hat{N}_{n,2}) \rightsquigarrow 0$.
10. Construire un intervalle de niveau de confiance 98% sur N , de la forme $[[\hat{N}_{n,2}, \hat{N}_+[,$ basé sur $\hat{N}_{n,2}$.
11. Pour relancer la production de contre-mesures, on cherche à prouver que $N > 5000$. Donner les hypothèses du test associé.
12. Construire un test de niveau 99% pour ces hypothèses, basé sur $\hat{N}_{n,2}$.
13. En notant T_n ce test, montrer que $T_n - \mathbb{1}_{\hat{N}_{n,2} > 5000} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.

EXERCICE 6. — Stylogométrie de discours

Un chercheur en sciences sociales s'intéresse aux occurrences du mot 'sécurité' dans les discours de J. Chirac. Ce nombre d'occurrences dans un discours de 5000 mots est assez bien représenté par une loi de Poisson de paramètre λ . Le chercheur compte le nombre de fois où 'sécurité' apparaît dans une succession de n discours composés chacun de 5000 mots.

1. Proposer un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur $\hat{\lambda}_n$ de λ basé sur la méthode des moments ou du maximum de vraisemblance.
3. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal.
5. En déduire que $\sqrt{n}(\sqrt{\hat{\lambda}_n} - \sqrt{\lambda}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/4)$.
6. Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique, de niveau 96%, bilatère, sur $\sqrt{\lambda}$.
7. En déduire un intervalle de confiance bilatère et asymptotique sur λ , au niveau 96%. On le notera I_1 .
8. Montrer que $E_\lambda((\hat{\lambda}_n - \lambda)^2) = \lambda/n$.
9. En déduire un intervalle de confiance, bilatère, de niveau 96% sur λ . On le notera I_2 .
10. Un adversaire politique cherche à montrer que J. Chirac est obnubilé par la sécurité, c'est à dire que $\lambda > 50$. Quelles sont les hypothèses de test associées?
11. Construire un test de niveau **asymptotique** 6% pour ces hypothèses, basé sur $\hat{\lambda}_n$.
12. **Application:** Sur 200 discours, J. Chirac a employé le mot sécurité 10200 fois. Que peut-on en conclure? On pourra utiliser les tables de quantiles données en annexe.

EXERCICE 7. — Temps d'attente devant les ascenseurs

Pour un usager, le temps que met un ascenseur à arriver est bien modélisé par une loi exponentielle de paramètre λ . Un usager se trouve devant trois ascenseurs, supposés indépendants, et observe le temps que met le plus rapide à arriver. Il répète l'expérience n fois.

1. Proposer un modèle pour cette expérience.

2. Donner un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance ou des moments, on le notera $\hat{\lambda}_n$.
3. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal.
5. Construire un intervalle asymptotique de niveau de confiance 90% unilatère (de type $[0, \hat{\lambda}_+]$).
6. L'utilisateur cherche à prouver que la qualité de service s'est dégradée. Auparavant il avait un temps d'attente moyen de 5. Donner les hypothèses du test correspondant.
7. Construire un test de niveau asymptotique 4% basé sur $\hat{\lambda}_n$ pour ces deux hypothèses.
8. **Application numérique:** L'utilisateur répète l'expérience 25 fois, et observe un temps d'attente moyen de 6. Que peut-il en conclure (on pourra utiliser les tables de la loi normale données en annexe)?

EXERCICE 8. — Notes

La note d'un étudiant à un examen dans une matière est modélisée par une loi normale de moyenne μ et variance $v = \sigma^2$, les 2 sont supposées inconnues. On suppose que les différentes matières sont indépendantes, qu'il y a n matières, et que l'étudiant observe ses notes.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Proposer un estimateur de μ et de v par la méthode des moments ou la méthode du maximum de vraisemblance (attention il faut aussi optimiser en v). On les notera $\hat{\mu}$ et $\hat{v}$.
3. Montrer que $\hat{\mu}$ est consistant.
4. Écrire $\hat{v}$ en fonction de $(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2)/n$ et $(\hat{\mu} - \mu)^2$.
5. En déduire que $\hat{v}$ est consistant.
6. Montrer que $\hat{\mu}$ est **non-asymptotiquement** normal.
7. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$ (on pourra utiliser l'inégalité de Markov).
8. Montrer que $\hat{v}$ asymptotiquement normal. On admettra que si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\text{Var}(X^2) = 2$.
9. On suppose que v est connue. Donner un intervalle bilatère de niveau de confiance 96% sur μ .
10. On suppose que v est inconnue. Donner un intervalle de niveau de confiance asymptotique 96% sur μ .
11. L'étudiant veut prouver que son niveau moyen est supérieur à la note seuil (10). Quelles sont les hypothèses du test correspondant?
12. Dans le cas où v est connue, construire un test de niveau 5% pour ces hypothèses, basé sur $\hat{\mu}_n$.
13. Dans le cas où v est inconnue, construire un test de niveau asymptotique 5% pour ces hypothèses, basé sur $\hat{\mu}_n$.
14. **Application numérique:** L'étudiant a observé une moyenne de 11 sur les 16 épreuves du premier semestre, avec une variance empirique de 4. Que peut-il en conclure? On pourra utiliser la table des quantiles de la loi normale fournie en annexe.
15. On suppose que μ et v sont inconnus. Donner un intervalle de niveau de confiance asymptotique 80% pour v de type $[\hat{v}_-, +\infty[$.

EXERCICE 9. — Age de l'univers

Des astrologues observent l'âge de n corps célestes arrivés sur Terre, l'âge d'un corps céleste étant modélisé par une loi uniforme entre 0 et A , où A est l'âge de l'univers (inconnu).

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur de A par la méthode des moments. On le notera $\hat{A}_{n,1}$.
3. Montrer que $\hat{A}_{n,1}$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{A}_{n,1}$ est asymptotiquement normal.
5. Montrer que $E_A((\hat{A}_{n,1} - A)^2) = A^2/(3n)$.
6. On veut montrer que l'âge de l'univers est plus petit que 10^{10} . Donner les hypothèses du test associé.
7. Construire un test de niveau 3% basé sur $\hat{A}_{n,1}$ pour ces hypothèses.
8. Donner un estimateur de A par la méthode du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{A}_{n,2}$.
9. Montrer que $\hat{A}_{n,2}$ est consistant.
10. Montrer que $n(A - \hat{A}_{n,2}) \rightsquigarrow \mathcal{E}(a)$, où a est un paramètre à déterminer.
11. Construire un test de niveau asymptotique 3% basé sur $\hat{A}_{n,2}$ pour les hypothèses de la question 6.
12. **Application numérique:** En admettant que $\log(1/0.03) \approx 3.506$, on observe sur 40 corps célestes un âge maximal de 9×10^9 . Que peut-on en conclure?
13. Montrer que $E_A((\hat{A}_{n,2} - A)^2) = 2A^2/((n+1)(n+2))$. Comparer avec le risque quadratique de $\hat{A}_{n,1}$.
14. Donner un intervalle de niveau de confiance 95% sur A basé sur $\hat{A}_{n,1}$. On le notera I_1 .
15. Donner un intervalle de niveau de confiance 95% sur A basé sur $\hat{A}_{n,2}$. On le notera I_2 .
16. Comparer I_1 et I_2 sur la base de leurs longueurs lorsque $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 10. — Centre d'appel (*) - Loi Gamma

Le temps mis par un opérateur d'un centre d'appel à traiter une demande est modélisé par une loi exponentielle de paramètre λ (inconnu). Durant n jours, un superviseur observe le temps mis par un employé à répondre à 10 appels quotidiens.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance ou des moments. On le notera $\hat{\lambda}_n$.
3. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal.

EXERCICE 11. — Fourmis et fourmilières (*) - Mélange Gaussien

On suppose que dans une clairière vivent trois espèces de fourmis, chacune ayant sa fourmilière, et que, sachant le type de fourmi, la position de la fourmi suit une loi normale centrée en μ_j , de variance σ^2 (où j est le numéro de l'espèce). Les proportions de chaque espèce π_j sont supposées connues. Un entomologue collecte n fourmis (avec remise) dans la clairière, et observe leurs espèces et positions.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Pour chaque j , donner un estimateur de μ_j et σ_j^2 (par la méthode des moments ou du max de vraisemblance). On les notera $\hat{\mu}_j$ et $\hat{\sigma}_j^2$.
3. Pour chaque j , montrer que $\hat{\mu}_j$ et $\hat{\sigma}_j^2$ sont consistants.
4. Pour chaque j , montrer que $\hat{\mu}_j$ est **non-asymptotiquement** normal, et $\hat{\sigma}_j^2$ est asymptotiquement normal.

On suppose maintenant les proportions du mélange π_j inconnues.

5. Donner le nouveau modèle.
6. Donner des estimateurs des π_j par la méthode de votre choix (moments ou max de vraisemblance). On les notera $\hat{\pi}_{j,n}$.
7. Montrer que les $\hat{\pi}_{j,n}$ sont consistants.
8. Montrer que les $\hat{\pi}_{j,n}$ sont asymptotiquement normaux.
9. Donner de nouveaux estimateurs pour les μ_j (notés $\hat{\mu}_{j,2}$).
10. Montrer que les $\hat{\mu}_{j,2}$ sont consistants.
11. Montrer que les $\hat{\mu}_{j,2}$ sont asymptotiquement normaux.

EXERCICE 12. — Filtre à Poisson (*)

Un probabiliste commence par tirer un entier N suivant une loi de Poisson de paramètre λ (inconnu), puis réalise une expérience de N piles ou face avec probabilité de succès $p \in]0, 1[$ connu. Le statisticien n'observe que le nombre de succès obtenu, et cette expérience se répète n fois.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur de λ par la méthode des moments ou du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{\lambda}_n$.
3. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal.
5. Montrer que $E_\lambda((\hat{\lambda}_n - \lambda)^2) = \lambda/(np)$.

EXERCICE 13. — Logs d'uniformes (*)

Un probabiliste commence par tirer un n -échantillon de loi uniforme sur $]0, 1[$, calcule leur maximum, en prend le log, additionne un θ inconnu et envoie le résultat à son collègue statisticien.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{\theta}_n$.
3. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est consistant.
4. Donner la loi de $\theta - \hat{\theta}_n$.

EXERCICE 14. — Répartition du patrimoine (*)

Une modélisation historique de la répartition des richesses consiste à supposer que le patrimoine d'un individu tiré au hasard suit une loi de Pareto, de densité donnée par

$$f(x) = (r - 1)x^{-r} \mathbb{1}_{x \geq 1},$$

pour un $r > 2$ inconnu. Un chercheur en sciences sociales observe le patrimoine de n individus tirés au hasard (avec remise).

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur de r par la méthode du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{r}_n$.
3. Montrer que $\hat{r}_n$.
4. Donner une condition sur r pour que $\hat{r}_n$ soit asymptotiquement normal.

EXERCICE 15. — Pile ou face - Fin (*)

Un statisticien tire une infinité de fois à pile ou face, avec proba p de tomber sur pile, et observe le nombre de face qu'il a fallu tirer jusqu'à obtenir n piles (où $n \geq 1$ est connu).

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Donner un estimateur pour p , par la méthode des moments ou du maximum de vraisemblance. On le notera $\hat{p}_n$.
3. Montrer que $\hat{p}_n$ est consistant.
4. Montrer que $\hat{p}_n$ est asymptotiquement normal.

Annexe: tables de quantiles

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE STANDARD

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

z	0.841	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
Φ(z)	0.8000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990	0.9995

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

		n = 50									
		p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
	8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
	9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
	10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
	11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
	12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
	13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
	14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
	15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
	16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
	17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
	18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
	19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
	20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
	21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
	26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
	27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
	28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
	29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
	31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
	32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
	33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
	34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
	35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
	36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000