

TD, Feuille 4 - Modèles

EXERCICE 1. — Pile ou Face

On joue n fois à pile ou face, avec une probabilité de succès (pile) $p \in]0, 1[$. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 2. — Pile ou Face - Bis

On joue n fois à pile ou face, avec une probabilité de succès (pile) $p \in]0, 1[$, et on observe le nombre de pile obtenus. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 3. — Pile ou Face - Ter

On joue une infinité de fois à pile ou face, avec une probabilité de succès (pile) $p \in]0, 1[$, et on observe le nombre d'essais nécessaires à l'obtention d'un pile. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 4. — Capture

On pêche n poissons (sans remise) dans un étang comprenant N_0 carpes et N_1 brochets (ces deux quantités étant inconnues, toutes deux supposées plus grandes que n). On observe le nombre de carpes pêchées. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 5. — Capture - Bis

On a déjà marqué n_0 poissons toutes espèces confondues au cours d'une pêche précédente, que l'on a ensuite relâchés. On pêche successivement n poissons dans l'étang qui est censé contenir N poissons (inconnu), et on observe le nombre de poissons déjà vus au cours de la première pêche. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 6. — Tanks allemands

Au cours de la seconde guerre mondiale (du moins au début), les allemands numérotaient leurs tanks produit pendant un moins de 1 à N (inconnu). Un observateur se place à la sortie de l'usine, et observe les numéros des n tanks qui passent devant lui (un même tank peut passer plusieurs fois). Proposer un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 7. — Stylométrie de discours

Un chercheur en sciences sociales s'intéresse aux occurrences du mot 'sécurité' dans les discours de J. Chirac. Ce nombre d'occurrences dans un discours de 5000 mots est assez bien représenté par une loi de Poisson de paramètre λ . Le chercheur compte le nombre de fois où 'sécurité' apparaît dans une succession de 10 discours composés chacun de 5000 mots. Proposer un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 8. — Stylométrie de discours - Bis

Même question qu'auparavant, mais cette fois-ci le chercheur observe seulement le nombre total de fois où 'sécurité' a été employé dans les 10 discours.

EXERCICE 9. — Temps d'attente devant les ascenseurs

Pour un usager, le temps que met un ascenseur à arriver est bien modélisé par une loi exponentielle de paramètre λ . Un usager se trouve devant trois ascenseurs, supposés indépendants, et observe leurs temps d'arrivée. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 10. — Temps d'attente devant les ascenseurs - Bis

Même question qu'auparavant, mais cette fois-ci l'usager monte dans le premier qui arrive (et observe donc le temps d'arrivée correspondant).

EXERCICE 11. — Notes

La note d'un étudiant à un examen dans une matière est modélisée par une loi normale de moyenne μ et variance σ^2 . On suppose que les différentes matières sont indépendantes, qu'il y a 10 matières, et que l'étudiant observe ses notes. Donner un modèle pour cette expérience (on séparera les cas σ^2 connu et σ^2 inconnu).

EXERCICE 12. — Notes - Bis

Même question qu'auparavant, mais l'étudiant n'observe cette fois-ci que sa moyenne.

EXERCICE 13. — Age de l'univers

Des astrologues observent l'âge de n corps célestes arrivés sur Terre, l'âge d'un corps céleste étant modélisé par une loi uniforme entre 0 et A , où A est l'âge de l'univers (inconnu). Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 14. — Centre d'appel

Le temps mis par un opérateur d'un centre d'appel à traiter une demande est modélisé par une loi exponentielle de paramètre λ (inconnu). Un superviseur observe le temps mis par un employé à répondre à 10 appels. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 15. — Centre d'appel - Bis

Pour des raisons "d'efficacité" les appels sont coupés au bout de 10 minutes. Même question qu'auparavant.

EXERCICE 16. — Centre d'appel - Ter

On suppose toujours que le temps mis par un opérateur suit une loi exponentielle de paramètre λ , et que les appels sont non coupés. Une journée de travail comporte $10h$, cette fois-ci le superviseur comptabilise le nombre d'appels traités complètement. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 17. — Fourmis et fourmilières

On suppose que dans une clairière vivent trois espèces de fourmis, chacune ayant sa fourmilière, et que, sachant le type de fourmi, la position de la fourmi suit une loi normale centrée en μ_j , de variance σ^2 (où j est le numéro de l'espèce). Un entomologue collecte n fourmis (avec remise) dans la clairière, et observe leurs espèces et positions. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 18. — Filtre à Poisson

Un probabiliste commence par tirer un entier N suivant une loi de Poisson de paramètre λ (inconnu), puis réaliser une expérience de N piles ou face avec probabilité de succès $p \in]0, 1[$ connu. Le statisticien n'observe que le nombre de succès obtenu. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 19. — Logs d'uniformes

Un probabiliste commence par tirer un n -échantillon de loi uniforme sur $[0, 1]$, calcule leur maximum, en prend le log, additionne un θ inconnu et envoie le résultat à son collègue statisticien. Donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 20. — Répartition du patrimoine

Une modélisation historique de la répartition des richesses consiste à supposer que le patrimoine d'un individu tiré au hasard suit une loi de Pareto, de densité donnée par

$$f(x) = (r - 1)x^{-r} \mathbb{1}_{x \geq 1},$$

pour un $r > 1$ inconnu. Un chercheur en sciences sociales observe le patrimoine de n individus tirés au hasard (avec remise), donner un modèle pour cette expérience.

EXERCICE 21. — Pile ou face - Fin

Un statisticien tire une infinité de fois à pile ou face, avec proba p de tomber sur pile, et observe le nombre de face qu'il a fallu tirer jusqu'à obtenir n piles (où $n \geq 1$ est connu). Donner un modèle pour cette expérience.