PSSD, Feuille 3

Exo 1 On note $\theta = \frac{1}{2} \times 10^{-N}$. On modélise chaque erreur X_i par $X_i \sim \mathcal{U}([-\theta, \theta])$, et erreur totale $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$.

On demande $\mathbb{P}(|X| \leq \alpha)$. Comme $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_1 = 0)$, on a

$$\sqrt{n}\left(\frac{X}{n} - 0\right) \underset{n \to +\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right).$$

$\left(\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\theta^2 \times 4}{12} = \frac{\theta^2}{3}\right)$.

On a donc $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{\sqrt{n}}\right| \leq t\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta}{\sqrt{3}}(\Phi(t) - \Phi(-t))$,

pour tout $t \geq 0$ et $\Phi = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq t)$.

On a un peu mieux

$$\|F_{X/\sqrt{n}} - F_{\theta/\sqrt{3}\,\mathcal{N}}\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ et donc}$$

$$\left|\mathbb{P}(|X| \leq \alpha) - \frac{\theta}{\sqrt{3}}(2\Phi(\alpha\sqrt{n}) - 1)\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Une valeur approchée de $\mathbb{P}(|X| \leq \alpha)$ est donc

$$\frac{\theta}{\sqrt{3}}(2\Phi(\alpha\sqrt{n}) - 1)$$

- Cas $\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}}$, $n = 10^{2N}$, $\theta = \frac{1}{2}10^{-N}$:

$$\frac{1}{2}\frac{10^{-N}}{\sqrt{3}}\left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{12}}10^N\right) - 1\right).$$

Avec, pour $\Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{f(x)}{x}$, $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}$,

$$\frac{10^{-N}}{2\sqrt{3}}\left(2\Phi\left(\frac{10^N}{\sqrt{12}}\right) - 1\right) \simeq \frac{10^{-N}}{2\sqrt{3}}\left(2 - \frac{2e^{-\frac{10^{2N}}{24}}\sqrt{12}}{\sqrt{2\pi}(10^N)} - 1\right)$$

$$\simeq \left(\frac{10^{-N}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{12}\,e^{-\frac{10^{2N}}{24}}}{\sqrt{6\pi}\,10^{2N}}\right) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{10^{-N}}{2\sqrt{3}}.$$

Exo 2

1- On note $X_i = f(U_i)$. Comme $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, f est bornée. Donc $\mathbb{E}(|X_1|^2) < +\infty$.

En notant $S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. On a (TCL)

$$\sqrt{n}(S_n - \mathbb{E}(X_1)) \underset{n \to +\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1)).$$

En particulier, $S_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_1)$, (Slutsky).

2-) On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = 1.$$

Soit $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right)\right),$$

où $X \sim \mathcal{P}(n)$.

Or $X \overset{(loi)}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i iid $\mathcal{P}(1)$, avec $\mathbb{E}(X_1) = 1$, $Var(X_1) = 1$.

Donc

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{X}{n} - 1\right)}{\sqrt{1}} \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

On en déduit $e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(N))$,

où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$,

et $\mathbb{E}(f(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$.

Exo 3

On note $Y_j = \log(U_j)$ (bien définie p.s.), et

on a $\log(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Montrons que $Y_1 \in L^1(\mathbb{P})$.

$$\mathbb{E}(|Y_1|) = \mathbb{E}(-\log(U_1)) = \int_0^1 -\log(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -v e^{v} dv$$

$$= \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx < +\infty.$$

$$= 1.$$

On déduit que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}(Y_1)$ (loi forte des grds nombres),

et $u \mapsto \log(u)$ étant continue sur $]0,1[$,
exp

$$X_n = \exp(\overline{Y}_n) \xrightarrow[p.s.]{n\to+\infty} \exp(\mathbb{E}(Y_1)) = e.$$

Exo 4

On note

$$S_{0,n} = \sum_{j \in N_0(n)} X_j X_{j+1}, \quad S_{1,n} = \sum_{j \in N_1(n)} X_j X_{j+1},$$

avec $N_0(n) = \{ j \leq n \mid j \equiv 0 \ (2) \}$

$N_1(n) = \{ j \leq n \mid j \equiv 1 \ (2) \}$.

On a $|N_0(n)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $|N_1(n)| \in \{ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \}$ (suivant la parité de n).

En notant $Y_j = X_j X_{j+1}$, on a $\mathbb{E}(|Y_j|) = \mathbb{E}(|X_1|)^2 < +\infty$, et $\mathbb{E}(Y_j) = \mathbb{E}(X_1)^2$.

De plus, si $|i-j| \geq 2$, $Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j$. La loi des grands nombres donne alors

$$\begin{cases} \dfrac{S_{0,n}}{|N_{0,n}|} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)^2 \\ \dfrac{S_{1,n}}{|N_{1,n}|} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)^2. \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_{0,n} + S_{1,n}}{n}$$

$$= \frac{S_{0,n}}{|N_{0,n}|} \times \frac{|N_{0,n}|}{n} + \frac{S_{1,n}}{|N_{1,n}|} \times \frac{|N_{1,n}|}{n}$$

$$\xrightarrow[p.s.]{} \frac{1}{2} \mathbb{E}(X_1)^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}(X_1)^2 \quad (\text{car}$$

$$\frac{|N_{j,n}|}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}).$$

Exo 5

1- Soit X v.a.R ≥ 0. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{k}) > 0$.

Alors $\mathbb{E}(X) \geq \frac{1}{k} \mathbb{P}(X \geq \frac{1}{k}) > 0$.

On en déduit que si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{k}) = 0$.

Alors, $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{X \geq \frac{1}{k}\}) = \lim_{k \to +\infty} \uparrow \mathbb{P}(\{X \geq \frac{1}{k}\}) = 0$, et donc $X = 0$ p.s.

III

2-] On note $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X=x) > 0\}$. Comme $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$, on en déduit

$$1 \geq \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X=x).$$

Si A non dénombrable, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $A_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X=x) \geq \frac{1}{k}\}$ soit de cardinal $+\infty$ $\left(A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right)$.

On en déduit alors $\displaystyle\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X=x) \geq \sum_{x \in A_k} \frac{1}{k} = +\infty$, contradiction.

3-] Regardons une loi de Pareto, donnée par sa densité

$$(m+1)\, x^{-(m+2)} \mathbb{1}_{x \geq 1}.$$ Elle admet un moment d'ordre m, mais pas $m+1$.

Exo 6]

1-] On prend $X_n \equiv N \sim \mathcal{N}(0,1)$, et $X = -N \sim N$.

On a bien $X_n \sim X$, pour tout $n \geq 1$.

Or, $X_n - X = 2N \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\not\to}} 0$,

car $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq 1) = \mathbb{P}(|N| \geq \frac{1}{2}) \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ (et la cv en loi vers une cte est équivalente à la cv en proba).

2-] On pose $X_n = \frac{1}{n} \delta_{\{n\}} + (1 - \frac{1}{n}) \delta_{\{0\}}$.

On a $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0$, mais $\mathbb{E}(X_n) = 1$, donc $X_n \underset{L_1}{\overset{n \to +\infty}{\not\to}} 0$.

Si on prend $\Omega =]0,1[$, $\mathbb{P}$ uniforme sur Ω, et

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$ on a $X_n \underset{p.s.}{\longrightarrow} 0$, mais

$X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{L_1}{\not\to}} 0$ (même exple).

De manière plus cultivée : $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ implique $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$.

Or, si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$, le théorème de représentation de Skorokhod donne $Y_n \sim X_n$, $Y \sim X$ tq $Y_n \underset{p.s.}{\longrightarrow} Y$.

Si la cvps impliquait la cv L_1, on aurait alors $\underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{E}(X_n)}}{\mathbb{E}(Y_n)} \to \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{E}(X)}}{\mathbb{E}(Y)}$,

et donc la cv proba impliquerait la cv des $\mathbb{E}$.

Ex 7

1.

a) Supposons $X_n := \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Alors $\mathbb{P}(|X_n| \geq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Réciproquement, si $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ (car
$\mathbb{P}(|X_n|>0) = \mathbb{P}(A_n)$).

b) On a, pour $p \geq 1$, $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \mathbb{P}(A_n)$, donc
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} 0 \iff \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

c)

$$\{\omega \mid \mathbb{1}_{A_n}(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} \{\mathbb{1}_{A_k}(\omega)=0\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k^c.$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \iff \mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_n^c) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 1$

$$\iff \mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k) = 0.$$

2.

cf. le 6. $X_n = \frac{1}{n}\delta_n + (1-\frac{1}{n})\delta_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} 0$ (ou δ_0), et
$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \mathbb{E}(X).$$

3.

$X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n) \sim \lambda_n e^{-\lambda_n x} 1_{x>0}\, dx$.

Si $X_n \rightsquigarrow X$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi_X(t)$.

Mieux : soit D l'ensemble des points de continuité de F_X (dense dans $\mathbb{R}$).

$\forall t \in]0,+\infty[\cap D$, on a
$$\mathbb{P}(X_n > t) = e^{-\lambda_n t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X>t).$$

S'il existe t_0 tq $\mathbb{P}(X>t_0)>0$, on a déduit que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-\log(\mathbb{P}(X>t_0))}{t_0}$.

Sinon, on a $\forall t \in]0,+\infty[\cap D$ $\mathbb{P}(X>t)=0$, ce qui donne $\lambda_n \to +\infty$,
et $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_{\lambda_0}(t)$.

V

Ex 8

1-| ~~Soit $t \in D_X$ (points de continuité de F_X), et $\varepsilon > 0$~~

~~On a $\mathbb{P}(|X_n + Y_n - X| \geq t + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon)$~~

~~$+ \mathbb{P}(|X_n + Y_n - X| \geq t + \varepsilon \cap |Y_n| \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n + Y_n - X| >$~~

a)| Mq $X_n + Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$.

Soit D_X ensemble des points de continuité de F_X,

et $t \in D_X$, $\varepsilon > 0$.

$$|\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq t) - \mathbb{P}(X_n \leq t)|$$

$$\leq |\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq t \cap |Y_n| \leq \varepsilon) - \mathbb{P}(X_n \leq t)| + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$$

$$\leq \max(|F_{X_n}(t+\varepsilon) - F_X(t)| ; |F_{X_n}(t-\varepsilon) - F_X(t)|) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon).$$

$$\leq |F_{X_n}(t+\varepsilon) - F_X(t+\varepsilon)| + |F_{X_n}(t-\varepsilon) - F_X(t-\varepsilon)|$$
$$+ |F_X(t+\varepsilon) - F_X(t)| + |F_X(t-\varepsilon) - F_X(t)| + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon).$$

Soit $\delta > 0$. Il existe alors ε tq $\begin{cases} |F_X(t+\varepsilon) - F_X(t)| \leq \frac{\delta}{5} \\ |F_X(t-\varepsilon) - F_X(t)| \leq \frac{\delta}{5}, \end{cases}$

$t \pm \varepsilon \in D_X$ (D_X^c dénombrable).

On a alors

$$|F_{X_n+Y_n}(t) - F_X(t)| \leq \frac{2\delta}{5} + |F_{X_n}(t+\varepsilon) - F_X(t+\varepsilon)| + |F_{X_n}(t-\varepsilon) - F_X(t-\varepsilon)| + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2\delta}{5}.$$

Donc $\forall \delta > 0$ $\mathbb{P}(\overline{\lim} \, |F_{X_n+Y_n}(t) - F_X(t)| \leq \frac{2\delta}{5}$.

On en déduit $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Puis On utilise $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}}$

VI

Exo 8

1-) C'est évidemment $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$.

D'après Slutsky $(X_n, Y_n) \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} (X, 0)$.

Et $(x,y) \mapsto x+y$ est continue.

Donc $X_n + Y_n \rightsquigarrow X$.

2-) $(x,y) \mapsto xy$ est continue, donc

$X_n Y_n \rightsquigarrow X \times 0 = 0$.

Or $Z_n \rightsquigarrow c \Rightarrow Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} c$, donc

$X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Pour preuve de Slutsky, cf poly.

Exo 9

1-) Avec fonctions de répartition. $X := \tan(U) \in \mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(U \le \arctan(t)) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\arctan(t)}{\pi}.$$

F_X étant dérivable, X est à densité, donnée par

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$ Donc $X \sim \mathcal{E}(1)$.

2-) Comme $\mathbb{E}(|X|) = +\infty$, $\tan(U)$ n'admet pas d'espérance.

3-) On rappelle que $\phi_X(t) = e^{-|t|}$. On a alors, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\phi_{X+X'}(t) = \phi_X(t)\phi_{X'}(t) = e^{-2|t|}.$$ Donc

$X + X' \sim \mathcal{E}(2) \sim 2X$, de densité

$$f_{X+X'}(t) = \frac{1}{\pi(1+(\frac{t}{2})^2)} = \frac{4}{\pi(4+t^2)}. \quad \left(\frac{a^2}{\pi(a^2+t^2)}\right).$$

4-) On a ~~$Y \sim Z + Z'$, où $Z \sim$~~ $Y \sim \sigma E$, où

$\sigma \sim R(\frac{1}{2})$ $(\mathbb{P}(\sigma=1) = \mathbb{P}(\sigma=-1) = \frac{1}{2})$, et $E \sim \mathcal{E}(1)$, $\sigma \perp\!\!\!\perp E$.

On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{it\sigma E})$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{itE}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}(e^{it(-E)})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-it}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it}\right)$$

$$= \frac{1}{2(1+t^2)}[2] = \frac{1}{1+t^2}.$$

VI

5) On a $\phi_{\lambda X+\nu X'}(t) = \phi_{\lambda X}(t)\,\phi_{\nu X'}(t)$

$$= \phi_X(\lambda t)\,\phi_{X'}(\nu t)$$

$$= e^{-(|\lambda|+|\nu|)|t|}.$$

Donc $\lambda X+\nu X' \sim \mathcal{E}(|\lambda|+|\nu|)$, densité

$$\frac{(|\lambda|+|\nu|)^2}{\pi((|\lambda|+|\nu|)^2+t^2)}.$$

$$\phi_{XX'}(t) = \mathbb{E}(e^{itXX'}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{itXX'}|X))$$

$$= \mathbb{E}(e^{-|t||X|})$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-|t|u}}{\pi(1+u^2)}\,du,$$

pas vraiment exploitable.

On passe 'en force'. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}(XX'\leq t) = \mathbb{P}(X\leq \tfrac{t}{X'} \cap \{X'>0\})$$

$$+\mathbb{P}(X\geq \tfrac{t}{X'} \cap \{X'<0\})$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{X'}\right)\right)\mathbb{1}_{X'>0}\right)$$

$$+\mathbb{E}\left(\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\arctan}{\pi}\left(\frac{t}{X'}\right)\right)\right)\mathbb{1}_{X'<0}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{|\arctan(\frac{t}{X'})|}{\pi}\mathbb{1}_{X'>0}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{|\arctan(\frac{t}{u})|}{1+u^2}\,du,$$

avec $|\arctan(\frac{t}{u})| \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{|t|}{u}$, $|\arctan(\frac{t}{u})| = \arctan(\frac{|t|}{u}) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$,

donc l'intégrale est bien définie.

On a

$\mathbb{P}(XX'\leq t)$

$$= 1 + \mathbb{E}\left(\frac{\arctan}{\pi}\left(\frac{t}{X'}\right)\mathbb{1}_{X'>0} + \frac{\arctan}{\pi}\left(\frac{t}{-X'}\right)\mathbb{1}_{X'<0}\right)$$

$$= 1 + 2\,\mathbb{E}\left(\frac{\arctan}{\pi}\left(\frac{t}{X'}\right)\mathbb{1}_{X'>0}\right) \quad (\text{car } -X'\sim X').$$

Avec $\mathbb{E}\left(\frac{\arctan}{\pi}\left(\frac{t}{X'}\right)\mathbb{1}_{X'>0}\right) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t/u)}{1+u^2}\,du$

$$:= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty} g(t,u)\,du.$$

On a : ① $\forall t$ $g(t,\cdot)\in L_1$

② $\forall u>0$ $g(\cdot,u)$ dérivable, de dérivée

$$\frac{1/u}{(1+u^2)(1+(\frac{t}{u})^2)} = \frac{u}{(1+u^2)(u^2+t^2)}.$$

VII

③ $\forall a>0\ \forall |t|\geq a$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,u)\right| \leq \frac{u}{(1+u^2)(u^2+a^2)} \in L^1.$$

Donc $t \mapsto \mathbb{E}(\arctan(\frac{t}{X'})\mathbb{1}_{X'>0})$ est dérivable,

de dérivée $$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{u}{(1+u^2)(u^2+t^2)}du.$$

On en déduit que XX' a pour densité

$$f(t) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{u}{(1+u^2)(u^2+t^2)}du$$

Pour aller un cran plus loin : si $t\neq 1$

$$\frac{1}{\pi(1+u^2)(u^2+t^2)} = \frac{1}{\pi(t^2-1)}\left(\frac{1}{(1+u^2)} - \frac{1}{(u^2+t^2)}\right)$$

Donc

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2}\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{1}{(t^2-1)}\left(\int_0^h \frac{2u}{1+u^2}du - \int_0^h\frac{2u}{u^2+t^2}du\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2(t^2-1)}\lim_{h\to+\infty}\left(\log(1+h^2) - \log(t^2+h^2) + 2\log(|t|)\right)$$

$$= \frac{2\log(|t|)}{\pi^2(t^2-1)} + \frac{1}{\pi^2(t^2-1)}\lim_{h\to+\infty}\log\left(\frac{1+\frac{1}{h^2}}{1+t^2/h^2}\right)$$

$$= \frac{2\log(|t|)}{\pi^2(t^2-1)} := g(t)$$

On remarque que g admet une limite en

1 : $\frac{2}{\pi^2(1+1)}\log'(1) = \frac{1}{\pi^2}$.

On peut donc prendre pour densité $f(t) = \frac{2\log(|t|)}{\pi^2(t^2-1)}$ $\mathbb{1}_{t\neq 1}$.

VIII