TD, Feuille 3 - Convergences de variables et fluctuations autour de la limite

Convergence en proba

Exercice 1. — Reprendre l'exercice 13 du TD2 (joueur de casino), en notant X_n le gain après n lancers. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 2. — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. On note $Z_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. Montrer que $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 3. — Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de loi $\mathcal{E}(a_i)$, où $(a_i)_{i\geq 1}$ est une suite de réels positifs telle que $a_n = O(\log(\log(n))$. Montrer que $\max_{i=1,\ldots,n} E_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} +\infty$.

Exercice 4. — Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, où $\mathbb{P}(X_n = n^2) = 1/n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.
2. On suppose de plus que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, et on note S_n la moyenne de Césaro
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Montrer que S_n ne converge pas en probabilité vers 0.

On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante. On se donne une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables indépendantes de lois $\mathcal{B}(n/(n+1))$, et on pose

$$\begin{cases} Y_1 & \equiv & 0 \\ Y_{n+1} & = & \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 Y_n U_n. \end{cases}$$

3. Quelle est la loi de Y_n? En déduire que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.
4. En notant Z_n la moyenne de Cesaro $(\sum_{i=1}^n Y_i/n)$, montrer que $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Exercice 5. — Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{P}(n)$. Montrer que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 6. — Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $Z_n = (\max_{i=1,\ldots,n} X_i)/\log(n)$. Montrer que $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 7. — (*) Un collectionneur achète des cartes Pokemon non-visibles sur Internet (il ne sait pas laquelle il achète). On suppose qu'il y a n Pokemon en tout, et on note T_n le nombre d'achats effectués jusqu'à obtenir la collection complète.

1. Montrer que T_n est la somme de n variables indépendantes, de loi Géométrique.

2. En déduire l'espérance et la variance de T_n.

3. En déduire que $\frac{T_n}{n\log(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 8. — Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. On note $Z_n = \left(\sum_{i=1}^n f(U_i)\right)/n$. Z_n converge t'elle en probabilité? Si oui quelle est sa limite?

2. On note $X_n = \left(\prod_{i=1}^n U_i\right)^{\frac{1}{n}}$. X_n converge t'elle en probabilité? Si oui quelle est sa limite?

Exercice 9. — Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telle que $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k X_{k+1}$. Montrer que S_n/n converge en proba.

Exercice 10. — Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ suite de variables i.i.d. de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que $n/(\sum_{j=1}^n G_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} p$.

Convergence presque sûre

Exercice 11. — Soit U une variable uniforme sur $]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut décomposer en base 10

$$n = \sum_{j=0}^{k(n)} a_j(n) 10^j,$$

où $a_j(n) \in [\![0;9]\!]$ et $k(n) = \lfloor \log_{10} n \rfloor$. On définit la variable X_n par:

$$\begin{cases} X_n = 1 & \text{si les } k(n)+1 \text{ premières décimales de } U \text{ sont } (a_0(n),\dots,a_{k(n)}(n)), \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$, mais que X_n ne converge pas presque sûrement.

Exercice 12. — Montrer que les convergences des exercices 4, 7, 8 et 9 ont lieu presque sûrement.

Exercice 13. — Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de variables aléatoires telle que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$, et vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$.

Exercice 14. — Montrer que les convergences des exercices 1, 5 et 6 ont lieu presque sûrement.

Convergence en loi

Exercice 15. — Dans les cas suivants, trouver $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ tels que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, où $X_1,\dots,X_n$ sont i.i.d. de loi P.

1. $P \sim \mathcal{B}(1/4)$.

2. $P \sim \mathcal{G}(1/2)$.
3. $P \sim \mathcal{P}(1)$.
4. $P \sim \mathcal{U}(\llbracket 4; 10 \rrbracket)$.
5. $P \sim \mathcal{U}(]-1;1[)$.
6. $P \sim \mathcal{E}(5)$.
7. $P \sim \mathcal{N}(-3, 24)$.

Exercice 16. — Soit $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Montrer que

$$e^{-\sqrt{n}} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) \rightsquigarrow Y,$$

pour une variable Y dont on précisera la loi.

Exercice 17. — Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Exercice 18 (Casino clandestin). — Vous décidez d'ouvrir un casino clandestin dans votre cave, avec uniquement une roulette aux règles suivantes: il y a 37 cases, chaque joueur choisit une case, et récolte 36 fois sa mise de départ en cas de succès.

Vous espérez pour le mois qui vient une fréquentation d'environ 5000 joueurs, jouant chacun 1 euro. Donner une valeur approchée de la probabilité d'être bénéficiaire à l'issue de ce mois.

Exercice 19. — La loi de Cauchy (de paramètre 1), notée $\mathcal{C}(1)$, est déterminée par sa densité

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}.$$

Par ailleurs, sa fonction caractéristique est donnée par $\varphi_{\mathcal{C}(1)}(t) = e^{-|t|}$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{C}(1)$.

1. $\bar{X}_n$ converge t'elle en loi? Si oui expliciter la loi limite.
2. Montrer que $\bar{X}_n$ ne peut converger en probabilité vers une constante.

Exercice 20. — Soient $U_1, \ldots, U_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}(]0;2[)$. Montrer que $n(2 - \max_{i=1,\ldots,n} U_i)$ converge en loi vers une loi que l'on précisera.

Exercice 21. — Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(5)$. Montrer que $n \min_{j=1,\ldots,n} X_j$ converge en loi vers une distribution que l'on précisera.

Exercice 22. —

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$, où $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$. Montrer que $X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
2. **Application**: pour $n = 1000$ et $p_n = 10^{-3}$, donner une approximation de $\mathbb{E}((X_n+1)^{-1})$.

Exercice 23. — Pour $n \leq n_1 \leq N$, la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, n_1, N)$ est définie par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(\mathcal{H}(n, n_1, N) = k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{N-n_1}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

et correspond à la loi du nombre de succès dans une expérience de tirage sans remise de n éléments dans un ensemble de N éléments dont n_1 sont considérés comme intéressants.

1. Soit X_r variable aléatoire de loi $\mathcal{H}(n, n_1(r), N(r))$, avec $n_1(r) \to +\infty$ et $n_1(r)/N(r) \to p \in [0,1]$. Vers quelle loi converge $(X_r)_{r\geq 1}$?

2. **Application:** Un institut de sondage s'enquiert de la popularité du gouvernement en place. Il demande donc à 1000 personnes tirées au hasard si elles sont satisfaites dudit gouvernement. Donner la loi du nombre de réponses positives collectées, ainsi qu'une ou deux approximations de cette loi. En quoi ces approximations sont-elles plus facilement manipulables que la loi originelle?

Un peu de concentration

Exercice 24 (Autour de Byenaymé Tchebychev). — Soit X une variable réelle satisfaisant $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$.

1. Rappeler l'inégalité de Markov (pour une variable positive Y).

2. Montrer l'inégalité de Byenaymé Tchebychev: $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$.

3. Montrer l'inégalité de Cantelli: $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X) + t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)+t^2}$.

4. Comparer ces deux inégalités.

5. Montrer l'inégalité de Paley-Zygmund: en supposant de plus $X \geq 0$,

$$\forall t \in [0,1] \quad \mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}(X)) \geq (1-t)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 25 (Treize à la douzaine). — La probabilité qu'une huître prise au hasard soit non consommable est estimée à 10^{-2}. Quand vous commandez une douzaine d'huître, le poissonnier vous en sert un nombre n tel que, avec probabilité plus grande que 99%, au moins douze sont saines.

1. Trouver une inéquation satisfaite par n, et en déduire un n minimal.

2. La probabilité qu'une huître contienne une perle est de 10^{-3}. Combien vous faudra-t'il en acheter pour être sûr avec probabilité plus grande que 80% de pouvoir confectionner un collier de 10 perles?

Fluctuations non asymptotiques

Exercice 26 (Erreur d'arrondi). — À chaque opération élémentaire, un ordinateur commet une erreur d'arrondi, supposée de loi uniforme entre -10^{-17} et 10^{-17}. Le calcul que vous soumettez à l'ordinateur est composé de n opérations indépendantes, et on suppose que les erreurs d'arrondi s'additionnent pour former une erreur totale S_n. On note aussi $E_n = |S_n|$, erreur totale commise en valeur absolue.

1. Montrer que $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et que $\mathbb{E}(E_n) \leq \frac{2\times 10^{-17}\sqrt{n}}{\sqrt{12}}$.

2. Pour $n = 10000$, donner un intervalle de type $[-a; a]$ dans lequel l'erreur totale se trouvera avec probabilité plus grande que 80%.

Exercice 27 (Pokemon bis). — On considère $(X_k)_{k\geq 1}$ suite i.i.d. de lois uniformes sur $[\![1, N]\!]$, qui correspondent aux pokemon successivement attrapés par un joueur (il y a donc en tout N pokemon). On note T_N le nombre d'essais effectués avant de tous les avoir capturés.

On fixe $k \in \mathbb{N}$, et cherche à encadrer $\mathbb{P}(T_N > k)$ (probabilité que l'on doive effectuer strictement plus de k essais pour tous les attraper). On note Y_k le nombre de pokemon non encore découverts après k essais, et, pour i dans $[\![1, N]\!]$, on note A_i l'évènement "le pokemon i n'a pas été capturé au bout de k essais".

1. Montrer que $Y_k = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i}$, et que $\{T_N > k\} = \{Y_k \geq 1\}$.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y_k)$. En utilisant l'inégalité de Markov, en déduire que
$$\mathbb{P}(T_N > k) \leq N e^{-k/N}.$$
3. Montrer que, pour $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) \leq 0$. En déduire que $\mathrm{Var}(Y_k) \leq \mathbb{E}(Y_k)$.
4. En utilisant l'inégalité de BienAymé-Cebicev, montrer que
$$\mathbb{P}(T_n \leq k) \leq \frac{1}{N(1-1/N)^k}.$$
5. Redémontrer que $\frac{T_N}{N \log(N)} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.

Exercice 28. — Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi commune ayant pour densité
$$f(x) = \frac{2}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{]0;1[}(x).$$
On note $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

1. Montrer que f est bien une densité.
2. Calculer la densité de M_n.
3. Soit $u > 0$. Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(M_n \leq u\right) < +\infty.$$
4. En déduire que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$.
5. Soit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(M_n \leq 1 - u_n\right) = \left(1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)\right)^n.$$
6. Montrer que $\mathbb{E}(M_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 29. — Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(N, p_0)$. On note $\hat{N}_1 = \frac{\bar{X}_n}{p_0}$ et $\hat{N}_2 = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

1. Que valent $\mathbb{E}(\hat{N}_1)$ et $\mathrm{Var}(\hat{N}_1)$?
2. En déduire que
$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_1 - N\right| \geq 1\right) \leq \frac{N(1-p_0)}{np_0}.$$
3. Calculer $\mathbb{P}(\hat{N}_2 \neq N)$.
4. En déduire que
$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_2 - N\right| \geq 1\right) \leq (1 - p_0^N)^n.$$

5. Au vu des deux inégalités précédentes, quelle variable ($\hat{N}_1$ et $\hat{N}_2$) semble avoir les fluctuations les plus petites autour de la cible N?

6. Montrer que $\hat{N}_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} N$, et $\mathbb{E}(\hat{N}_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} N$.

Fluctuations asymptotiques

Exercice 30. — On se donne $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi P, où P est une des lois classiques du cours. Pour chacune de ces lois, si pertinent:

1. Calculer $\mathbb{E}(\bar{X}_n)$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$.

2. Étudier le comportement asymptotique de $a_n(\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n))$, où a_n est une suite croissante que l'on précisera.

Exercice 31 (Accidents et hospitalisations). — Pour un Français i, le nombre d'accidents annuels nécessitant hospitalisation est modélisé par une loi de Poisson de paramètre 0.01. On suppose qu'il y a $n = 60 \times 10^6$ français.

1. Quel est le nombre moyen d'hospitalisations auquel on peut s'attendre cette année?

2. Donner un intervalle autour de cette valeur moyenne dans lequel on est sûrs à 99% que le nombre total d'hospitalisations tombera.

Exercice 32 (Erreur d'arrondi - bis). — Reprendre l'exercice 26, et donner un intervalle de type $[-b; b]$ dans lequel l'erreur totale se trouvera avec probabilité **approximative** 80%. Comparer avec l'intervalle obtenu en exercice 26. Quelle méthode donne l'intervalle le plus précis?

Exercice 33. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Exercice 34. — Soient $U_1, \ldots, U_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}(]0;1[)$. On note

$$R_n = \left(\prod_{i=1}^n U_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Montrer que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} -1$.

2. Trouver a_n et b_n (suites positives) telles que

$$\mathbb{P}\left(a_n e^{-1} \le R_n \le b_n e^{-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 90\%.$$

Exercice 35 (Min et max d'exponentielles). — Soient $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $m_n = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$ et $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(m_n) = 1/n$.

2. Montrer que $n(m_n - 1/n)$ converge en loi (vers une loi que l'on précisera).

3. Montrer que $f : x \mapsto e^{-(x+e^{-x})}$ est une densité. Quelle est la fonction de répartition F associée?

4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(M_n - \log(n) \leq t\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(t).$$

5. En déduire que $M_n - \log(n)$ converge en loi (vers une loi que l'on précisera).

6. En déduire que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} +\infty$, et $\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 36 (Tireur myope). — Un tireur à la vue déclinante se rend chaque mois au stand de tir. Le i-ème mois, il tire i fois sur la même cible, mais sa vue baissant chaque tir a une probabilité $\min(4/i; 1)$ d'atteindre la cible. On note X_i le nombre de coups au but le i-ème mois.

1. Donner la loi de X_i. Que vaut $\mathbb{E}(X_i)$?

2. Montrer que X_i converge en loi vers une variable Z dont on précisera la loi.

3. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{P}(4)$. Donner une valeur approchée pour $\mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)|\right) \leq 2$.

t	0	2	4	6	8
$F(t)$	0.02	0.24	0.63	0.89	0.98

Exercice 37. — Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ (cf exo 19). On se donne une longueur d'intervalle de 2. Trouver l'intervalle maximisant $\mathbb{P}(\bar{X}_n \in I)$, parmi tous les intervalles de longueur 2.

Exercice 38. — Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. de loi ayant pour densité

$$g(y) = y^{-2}\mathbb{1}_{y\geq 1}.$$

On note $m_n = \min_{i=1,\ldots,n} Y_i$.

1. Montrer que g est bien une densité.

2. Pour quelles valeurs de n m_n admet-elle une espérance? une variance? Le cas échéant les calculer.

3. En déduire que $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$, et une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\mathbb{P}\left(m_n \leq a_n\right) \geq t,$$

pour un t fixé.

4. Montrer que $n(m_n - 1)$ converge en loi, vers une distribution que l'on explicitera.

5. En déduire une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\mathbb{P}\left(m_n \leq b_n\right) \geq t,$$

pour un t fixé.

6. Comparer a_n et b_n. Quelle méthode est la plus précise pour caractériser les fluctuations asymptotiques de m_n autour de sa valeur limite 1?