Feuille 2 : probabilités élémentaires

Exercice 1 (N'eo ket sec'h)

On suppose qu'il y a deux météos possibles pour un jour donné : soit il pleut, soit il fait beau. On suppose égalemement que la météo de chaque jour est indépendante de celle des autres jours et suit la même loi : avec une probabilité $1/4$ *il pleut et donc une probabilité* $3/4$ *il fait beau. On note* $X_i = 0$ *s'il pleut au ième jour et* $X_i = 1$ *s'il fait beau.*

1. *Quelle est la loi de la variable* X_i *?*
2. *Quelle est la probabilité qu'il pleuve durant les 5 premiers jours ?*
3. *Quelle est la probabilité que durant la première semaine il pleuve durant 2 jours et qu'il fasse beau durant 5 jours ?*
4. *Quelle est la probabilité que durant la première semaine il pleuve durant le premier jour et le dernier jour et qu'il fasse beau durant les autres jours ?*
5. *Supposons qu'il pleuve aujourd'hui. Quelle est la loi du nombre de jours* N *qu'il faut attendre pour avoir du beau temps ?*

Exercice 2 (Pile ou face)

On lance douze fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir six "pile" et six "face" ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux "pile" lors des douze lancers ?

Exercice 3 (Moyenne et variance d'une loi uniforme)

Soit Y *une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle* $[1, 3]$*, c'est-à-dire une variable aléatoire de loi de densité*

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \text{ si } y \in [1, 3], \quad 0 \text{ sinon.}$$

Calculer l'espérance et la variance de Y*.*

Exercice 4 (Densité, moyenne, espérance)

On considère une variable aléatoire continue X *dont la densité est* f_X *est donnée par les formules suivantes :* $f_X(x) = 3x^2/8$ *si* $0 \leq x \leq 2$ *et* $f_X(x) = 0$ *si* $x \notin [0, 2]$*.*

1. *Justifier que* f_X *est bien une densité de probabilité ?*
2. *Calculer l'espérance et la variance de* X*.*

Exercice 5 (Atome)

Dans cet article, de Libération daté du 3 juin 2011, les auteurs affirment que la probabilité d'un accident nucléaire majeur en Europe dans les trente prochaines années serait de plus de 100%. L'article commence par estimer la probabilité d'un accident majeur par réacteur nucléaire et par année de fonctionnement. Selon l'article, le parc mondial actuel de réacteurs cumule 14.10^3 *réacteurs-ans (environ* 450 *réacteurs pendant* 31 *ans). Pendant cette période, il y a eu quatre accidents majeurs, ce qui mène à une probabilité d'accident majeur d'environ* 3.10^{-4} *par an pour chaque réacteur. Les auteurs en « déduisent »que la probabilité d'un accident majeur en France (avec ses 58 réacteurs) pendant les trente prochaines années serait de* $58 \times 30 \times 3.10^{-4}$*, donc d'environ 50%. Quant à la probabilité d'un accident en Europe (143 réacteurs) dans les trente prochaines années, elle « serait »de* $143 \times 30 \times 3.10^{-4}$*, « donc » d'environ 129%. Commenter.*

Exercice 6 (Sondage)
On effectue un sondage auprès de 1000 *personnes prises au hasard parmi* 60 *millions. La question posée admet deux réponses :* 0 *ou* 1*. Pour simplifier, on suppose que toutes les personnes susceptibles d'être interrogées ont un avis stable sur la question posée et qu'elles expriment effectivement leur opinion.*

1. *On choisit une personne uniformément au hasard dans la population, quelle est la probabilité qu'elle réponde* 1*.*
2. *Par quelle loi semble-t-il raisonnable de modéliser le nombre de personnes qui réponde 1 parmi les 1000 sondées.*
3. *Quelles hypothèses cela revient à faire sur les modalités du sondage ?*

Exercice 7 (Bornes gaussiennes)

1. *Soit* X *une v.a. à densité de loi* $\mathcal{N}(0,1)$*. Donner des valeurs approchées de* $\mathbb{P}(X > -1)$ *;* $\mathbb{P}(X < -2)$ *;* $\mathbb{P}(1 < X < 2)$ *et* $\mathbb{P}(|X| < 2)$*.*
2. *Soit* Z *une v.a. à densité de loi* $\mathcal{N}(1.75, 0.01)$*. Donner une valeur approchée de* $\mathbb{P}(Z > 1.9)$*.*

Exercice 8 (Moyenne et variance)
On suppose que la taille mesurée (en mètres) des garçons de 20 ans suit une loi normale de moyenne m *et d'écart-type* σ*. On sait que 84% des garçons de 20 ans mesurent moins de 1 m 86 et que 97% mesurent plus de 1 m 58. Déterminer* m *et* σ*.*

Exercice 9 (Glycémie)
Pour un échantillon de 300 individus sains, on a étudié la glycémie ; on a constaté que 20% des glycémies sont inférieures à 0.82 g/l et que 30% des glycémies sont supérieures à 0.98 g/l. En supposant que la glycémie suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart-type de cette loi.

Exercice 10 (Admission)
500 personnes ont passé un concours et 379 d'entre elles ont été refusées. Dans le rapport du jury, il est stipulé que le total des points aux différentes épreuves obtenu par chaque candidat·e est bien approché par une loi normale de moyenne 171.5 et d'écart-type 5. Estimer le seuil d'admission au concours.