TD, Feuille 2 - Lois classiques et dépendance

Indépendance

Exercice 1. — On lance 2 dés standards indépendamment à la suite, et note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier dé est pair (sinon 0), Y si le second dé est pair, et Z si la somme est paire.

1. Montrer que $X \perp\!\!\!\perp Y$.
2. Montrer que $Z \perp\!\!\!\perp X$ et $Z \perp\!\!\!\perp Y$.
3. A-t-on $Z \perp\!\!\!\perp (X, Y)$?

Exercice 2. — Soient X, Y et Z trois variables aléatoires (continues ou discrètes, au choix). Montrer que

$$(Z \perp\!\!\!\perp X \quad \text{et} \quad Y \perp\!\!\!\perp (X, Z)) \quad \Rightarrow \quad Z \perp\!\!\!\perp (X, Y).$$

Commenter l'exercice précédent.

Exercice 3. — Soient X et Y deux variables indépendantes, de loi $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$ (géométriques).

1. On note $T = \min(X, Y)$, $Z = X - Y$. Trouver la loi de (T, Z).
2. En déduire que $T \perp\!\!\!\perp Z$.

Exercice 4. — Soit (U, V) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(u, v) = \frac{\log(1/v)}{\pi(1 + u^2 \log^2(v))} \mathbb{1}_{]0,1[}(v).$$

On note $Y = \log(1/V)$, et $X = YU$.

1. Trouver la loi de (X, Y).
2. En déduire que $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exercice 5. — On tire un chiffre au hasard X dans $]0; +\infty[$, suivant la loi $\mathcal{E}(1)$. On note P sa partie entière, et F sa partie fractionnaire.

1. Trouver la loi de P et de F.
2. Montrer que $P \perp\!\!\!\perp F$.

Manipulation de lois classiques

Exercice 6. — Le nombre d'automobilistes touchés par un chasseur pendant une saison de chasse est modélisé par une loi de Poisson de paramètre p, avec $p = 10^{-3}$. On suppose qu'il y a $n = 10000$ chasseurs en France, et qu'ils effectuent leurs tirs de manière indépendante, et qu'un automobiliste ne peut pas être touché par plusieurs chasseurs.

1. On note X le nombre total d'automobilites touchés au cours de la saison. Trouver la loi de X.

2. Trouver l'espérance et la variance de X.

3. En déduire une majoration de la probabilité que ce nombre total excède 20.

Exercice 7. — Selon les lois de la physique quantique, vous avez une probabilité q (petite mais positive) de traverser un mur. Pour être optimiste disons $q = 10^{-20}$.

1. Vous voulez en avoir le coeur net et envisagez de foncer sur le mur le plus proche de manière répétée et indépendante jusqu'à traverser, puis de noter X le nombre d'essais nécessaire. Quelle est la loi de X?

2. En déduire le nombre d'essais minimal garantissant 90% de chances de traverser (et commenter).

Exercice 8. — Un institut de sondage décide d'appeler 1000 personnes au hasard dans la population pour leur demander s'ils sont satisfaits d'avoir un téléphone (0 pour Oui, 1 pour Non). La population est supposées de taille N, et les appels indépendants. On note X le nombre total de Non obtenus.

1. L'institut de sondage s'autorise à appeler la même personne plusieurs fois. Trouver la loi de X (on la notera P_1).

2. L'institut de sondage ne s'autorise pas à appeler la même personne plusieurs fois. Quelle est alors la loi de X (on la notera P_2)?

3. Montrer que si N est grand par rapport à 1000, s'autoriser ou non à rappeler la même personne n'a pas grande importance (c'est à dire, montrer que, pour tout $k \in [\![0; 1000]\!]$, $P_2(k) \to_{N\to+\infty} P_1(k)$).

Exercice 9. — A chaque opération élémentaire, un calculateur fait une erreur d'arrondi supposée suivre une loi uniforme $\mathcal{U}(]-\varepsilon;\varepsilon[)$, où $\varepsilon = 10^{-17}$. Votre calcul nécessite $n = 1000$ opérations indépendantes, on suppose que les erreurs se cumulent, et on note X l'erreur totale.

1. En notant Y l'amplitude de la plus grande erreur d'arrondi effectuée, calculer $\mathbb{P}(Y > t)$, pour un t quelconque (à préciser).

2. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(|X| > 10^{-10})$.

3. Calculer $\mathrm{Var}(X)$. En déduire une autre majoration de $\mathbb{P}(|X| > 10^{-10})$.

Exercice 10. — Vous vous trouvez à l'arrêt de bus un jour de grève, et avez le choix entre 2 lignes différentes pour vous rendre à destination. Pour chaque ligne, le temps d'arrivée du bus suivant est modélisé par une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Ces temps d'arrivées sont supposés indépendants. On note X_1 la durée d'attente pour qu'un bus arrive.

1. Trouver la loi de X_1. En déduire l'expression de la probabilité d'attendre plus de 30 minutes.

Le premier bus arrivant étant bondé, vous hésitez à attendre le suivant (forcément de l'autre ligne pour simplifier), en vous disant que vu ce que vous avez attendu il ne devrait pas trop tarder. On note alors X_2 le temps d'arrivée du suivant.

2. Trouver la loi de $X_2 - X_1$ (ce qu'il vous resterait à attendre).

3. Montrer que $X_2 - X_1 \perp\!\!\!\perp X_1$. Cela vaut-il la peine de forcer le passage?

Exercice 11. — On suppose que la taille (en m) des garçons de 20 ans suit une loi normale de paramètres μ et σ^2. On sait que 84% de ces garçons font moins d'1 m 86, et que 97% mesurent plus d'1 m 57. Trouver μ et σ^2.

Exercice 12. — 500 personnes ont passé un concours, et 379 d'entre elles ont été refusées. Dans le rapport de jury, il est indiqué que la note obtenue par chaque candidat est bien approchée par une loi normale de moyenne 171.5 et écart-type 5. Quel est le seuil d'admission du concours?

Un peu de conditionnement

Exercice 13. — Une roulette de casino comporte 18 cases rouges, 18 cases noires, et 1 case verte. A un tour donné, le joueur choisit une couleur et y mise un montant m. Le croupier tire une case au hasard: si la case est de la couleur choisie par le joueur, le joueur reçoit m en plus de sa mise (il double sa mise), sinon le joueur perd sa mise. Les différents tirages du croupier sont supposés indépendants et la roulette équilibrée.

Le joueur adopte la stratégie suivante : il ne misera que sur la couleur rouge, en commençant par miser 1 euro, puis 2, puis 4 (en doublant sa mise à chaque tirage), et s'arrêtera de jouer dès qu'il gagnera (c'est-à-dire dès que le rouge sortira).

Notre joueur a toute la soirée (ce qui correspond à n tirages pour un certain entier $n \geq 2$). On note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème tirage est rouge, 0 sinon. Enfin, on note Z la variable aléatoire correspondant au numéro du premier tirage où la couleur rouge apparaît, c'est à dire

$$Z = \min\{i \in [\![1, n]\!] : Y_i = 1\},$$

en prenant pour convention $Z = 0$ si le rouge n'apparaît jamais.

1. Trouver la loi de Z.

2. On note X_n le gain net du joueur après n tirages. Pour $1 \leq k \leq n$, montrer l'égalité suivante

$$X_n \mathbf{1}_{\{Z=k\}} = \mathbf{1}_{\{Z=k\}} \ .$$

3. En déduire la loi de X_n. Quelle est la probabilité que le joueur ressorte avec un gain positif? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini?

4. Que pensez-vous de cette stratégie de mise?

Exercice 14. — Soient $(X_j)_{j\geq 1}$ suite de v.a.r. i.i.d. de lois $\mathcal{E}(1)$, et N une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$. On suppose $N \perp\!\!\!\perp (X_j)_{j\geq 1}$, et on note $Z = \min_{j=1,\ldots,N} X_j$. Trouver la loi de Z.

Exercice 15. — Chaque année, l'admnistration fiscale effectue N contrôles. Á N fixé, le recouvrement annuel (noté X) suit une loi exponentielle de paramètre $1000 \times 1/N$. On suppose que le nombre de contrôles annuels suit une loi uniforme entre 200 et 400.

1. Quelle est la loi de N? de $X \mid N$?

2. Montrer que la loi de X peut s'exprimer comme celle de $U \times E$, où $U \sim \mathcal{U}([\![200; 400]\!])$, $E \sim \mathcal{E}(1)$, et $U \perp\!\!\!\perp E$.

3. En déduire l'espérance et la variance de X.

4. Quelle est la plus grosse somme que le trésor public peut être sûr de récupérer avec probabilité plus grande que 90%?

Exercice 16. — Un fromage sarde doit sa célébrité à la présence d'asticots dans la pâte. Il y a deux types d'asticots, blancs et jaunes, et, pour des apports initiaux respectifs λ_1 et λ_2, le nombre d'asticots blancs à la fin de la maturation est noté X_1 (X_2 pour les asticots jaunes). On suppose que $X_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$, pour $j \in \{1, 2\}$, et $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

1. Quelle est la loi de $S = X_1 + X_2$, nombre d'asticots total?

2. Trouver la loi de $X_1 \mid S$ et $X_2 \mid S$.

3. Le fromage est considéré comme impropre à la consommation si la proportion d'asticots blancs dépasse 1/2 (supérieur ou égal). À λ_1 et λ_2 fixés, calculer la probabilité qu'un fromage soit déclaré impropre à la consommation.

4. Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{N}^*$, montrer que cette probabilité est strictement inférieure à 1/2 et tend vers 1/2 lorsque $\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5. Pour avoir le label AOP, l'apport initial en asticots jaunes doit dépasser celui en asticots blancs. L'apport initial total en asticots est fixé à A, et on suppose que le fromager peut adopter deux recettes: traditionnelle ($\lambda_2 = 3 * \lambda_1$) et fraude ($\lambda_1 = 3 * \lambda_2$). Il choisit entre ces deux stratégies de manière équiprobable, et on note U la variable qui vaut 1 s'il décide de frauder. Calculer la probabilité que le fromager ait fraudé sachant que son fromage est impropre à la consommation.

Exercice 17. — Un hamster n'a que trois activités possibles: dormir (état noté S), manger (état noté M), faire du bruit (état noté T). Il choisit sa prochaine activité de manière probabiliste, suivant les règles suivantes:

- s'il dort, il a une probabilité 1/4 de rester dormir, 1/4 de manger et 1/2 de faire du bruit après.
- s'il mange, il a une probabilité 1/2 de dormir, 1/2 de continuer à manger, et 0 de faire du bruit.
- s'il fait du bruit, il a une probabilité 0 de dormir, 1/4 de manger et 3/4 de continuer à faire du bruit.

Une journée de hamster est une succession de n activités successives, et on notera X_i la i-ème activité du hamster. On suppose que le hamster choisit la première activité de la journée suivant la loi μ_1. Par ailleurs, on définit la matrice suivante:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la loi de $X_2 \mid X_1$? Exprimer la loi de X_2 en fonction de A et μ_1.

2. En déduire une expression pour la loi de X_n.

3. Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et 1/4.

4. On admet que le premier vecteur propre de A (associé à la valeur 1) est $v_1 = (2/9, 3/9, 4/9)^T$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = S) \\ \mathbb{P}(X_n = M) \\ \mathbb{P}(X_n = T) \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_1.$$

5. On suppose que le nombre d'activités de votre hamster est très grand. Quelle est la probabilité qu'il vous réveille à $4h$ du matin (temps de sa dernière activité)? Pouvez-vous diminuer cette probabilité en choisissant sa première activité de la journée?