TD, Feuille 1 - Probas élémentaires

Espaces probabilisés - Variables aléatoires

Exercice 1. — Dans chacune des situations suivantes, trouver l'espace probabilisé sous-jacent, expliciter les variables aléatoires sous-entendues par l'énoncé et donner leur loi.

1. 120 étudiants sont divisés en trois groupes, A, B et C, d'effectifs 36, 40 et 44. On choisit un groupe au hasard et s'intéresse au nombre d'étudiants dans ce groupe.
2. Comme au dessus, mais on tire un étudiant au hasard et s'intéresse au nombre d'étudiants dans le groupe de l'étudiant choisi.
3. On bat un jeu de 52 cartes, puis les retourne successivement, et on s'intéresse à la 3 ème retournée, puis à la paire formée par la 3 ème et la 5 ème carte.
4. On tire au hasard un nombre ω entre 0 et 1, et on associe à ce ω le plus grand $Y \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y\omega \leq 1$.
5. On tire au hasard successivement 2 boules dans l'urne A comprenant 5 boules noires et 5 boules blanches (sans remise), et 1 boule dans l'urne B comprenant 2 boules noires et 1 boule blanche (sans remise). On s'intéresse au nombre total de boules noires tirées.
6. On tire deux nombres réels au hasard entre 0 et 2, et on s'intéresse à leur somme.
7. Même expérience qu'au dessus, mais cette fois on note 1 si la somme dépasse 1 et 0 sinon.

Exercice 2. — On suppose qu'il y a deux météos possibles pour un jour donné (beau ou pluie, qu'on encodera en 1 et 0), que la météo du jour est indépendante de celle des jours d'avant, et qu'il pleut avec probabilité 1/4.

1. Pour un jour donné, quelle est la loi de sa météo?
2. Quelle est la probabilité qu'il pleuve pendant les 5 premiers jours?
3. Quelle est la probabilité que cette semaine il pleuve 2 jours et fasse beau 5 jours?
4. Quelle est la probabilité qu'il pleuve les 5 premiers jours et fasse beau les 2 derniers?
5. Il pleut aujourd'hui. Quelle est la loi du nombre de jours à attendre avant qu'il fasse beau?

Exercice 3. — En été, pour un jour donné, la concentration d'algues vertes au centimètre carré sur la plage du Guildo est modélisée par une loi exponentielle de paramètre 1/3, de densité

$$f(x) = (1/3)e^{-x/3}\mathbb{1}_{x>0}.$$

Au début de la journée, on mesure cette concentration, et on ferme la plage pour la journée si elle dépasse 5. On suppose que la concentration d'algues un jour donné ne dépendent pas de celles des jours d'avant.

1. Pour un jour donné, quelle est la probabilité que la plage ferme?
2. Quelle est la loi du nombre de jours durant lesquels la plage devra fermer pendant une semaine?

3. Suite à un amendement législatif, les règles ont changé: si la concentration maximale mesurée durant une semaine dépasse 5, la plage devra fermer la semaine d'après. Nous sommes au début de la semaine. Quelle est la probabilité que la plage doive fermer la semaine suivante?

Exercice 4 (*). — Un robot tire au hasard un nombre positif suivant la loi de densité

$$f(x) = x^{-2}\mathbb{1}_{x>1}.$$

Quelle est la probabilité que la partie entière de ce nombre soit paire?

Manipulations de variables aléatoires

Exercice 5. — On modélise le nombre de réponses correctes données par un étudiant aléatoire à un QCM à 10 questions ayant 3 modalités par variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(10, 1/3)$. Pour établir la note finale de l'étudiant aléatoire, l'enseignant compte 2 points par réponse juste et -1 points par réponse fausse.

1. On note N la note finale de l'étudiant. Donner la loi de N.
2. Calculer la probablité que N soit négative.

Exercice 6. — Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, 7]\!]$.

1. On note P la variable qui vaut 1 si U est paire. Trouver la loi de Z.
2. On note A la variable aléatoire qui mesure l'aire du triangle formé par les points de $\mathbb{R}^2$ suivants: $(-1, 0); (0, 1); (\cos(2\pi U/7), \sin(2\pi U/7))$. Trouver la loi de A.

Exercice 7. — Soit X une variable aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}$. Trouver la densité de $Y = aX + b$, pour $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. **Application**: donner la densité (et éventuellement reconnaître une loi connue) pour les cas suivants:

1. $X \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$,
2. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
3. $X \sim \mathcal{E}(1)$,
4. X a pour densité $(r-1)x^{-r}\mathbb{1}_{x\geq 1}$, pour $r \geq 2$ entier.

Exercice 8. — Soit U une variable aléatoire uniforme sur $]0; 1[$.

1. On note $X = \log(1/U)$. Trouver la loi de X.
2. En notant $Y = \lfloor X \rfloor$ la partie entière de X, trouver la loi de Y et $X - Y$.
3. On note $Z = X^k$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Trouver la loi de Z.

Exercice 9. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}.$$

1. Montrer que f est une densité.
2. On note X une variable aléatoire de densité f, et $Y = 1/2 + \frac{1}{\pi}\arctan(X)$. Trouver la loi de Y.

Calculs d'espérance, variance, et applications

N.B.: Avant de calculer il faut s'assurer que ces quantités existent.

Exercice 10. — Soit Y la variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$, de loi donnée par $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{6}{k^2\pi^2}$.

1. Montrer que l'expression du dessus définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Peut-on calculer $\mathrm{Var}(Y)$?

Exercice 11. — Soit p la probabilité de gagner au loto. On note N le nombre d'essais que réalise un joueur avant de gagner.

1. Trouver la loi de N.
2. Calculer l'espérance de N.
3. Calculer la variance de N. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(N \leq 50000)$ dans le cas où $p = 10^{-6}$.

Exercice 12. — On lance deux dés standards au hasard et on note X le résultat de la somme. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 13. — En reprenant l'énoncé de l'exercice 5, calculer l'espérance et la variance de N (note de l'étudiant aléatoire). En déduire une majoration de la probabilité que N dépasse 10.

Exercice 14. — Soit f_a la fonction définie par

$$f_a(u) = (a-1)u^{-a}\mathbb{1}_{|u|\geq 1},$$

pour $u \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Pour quelles valeurs de a f_a définit-elle bien une densité?
2. En notant X une variable aléatoire de densité f_a, pour quelles valeurs de a X admet-elle une espérance? La calculer.
3. Pour quelles valeurs de a X admet-elle une variance? La calculer.

Exercice 15. — L'erreur de mesure de votre balance de cuisine est modélisée par une variable aléatoire E de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

où σ est donné par le constructeur (et vaut disons 10 mg). L'assiette de graines que vous préparez pour Coco, votre perroquet favori, a pour poids réel p_0, et vous notez X la valeur que vous retourne votre balance.

1. Calculer l'espérance et la variance de E.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(X \leq p_0 - \varepsilon)$.
4. Coco étant diabétique, lui donner une dose de graine excédant les 100 mg pourrait lui être fatal. Quelle valeur maximale de mesure X vous autorisez-vous si vous voulez être sûr à 99% de garder Coco en vie?