CC2 2024/2025 – Durée 1h

Les documents et appareils électroniques (calculatrice, téléphone, ordinateur, ...) sont interdits. Il est sous-entendu que les estimateurs, intervalles de confiance et tests demandés doivent être non triviaux. ***Toutes les réponses doivent être justifiées.***

Exercice 1 - Nombre de personnes infestées

L'agence régionale de santé (ARS) de la Réunion veut estimer le nombre de personnes atteintes du virus Chikungunya, noté n_0. Pour ce faire, elle tire n fois avec remise et de manière indépendante dans la population Réunionnaise (de taille N connue), et observe le nombre de personnes infectées.

1. Donner le modèle de cette expérience.
2. Donner un estimateur $\hat{n}_0$ de n_0 par la méthode des moments.
3. Montrer la consistance de $\hat{n}_0$.
4. Trouver le comportement asymptotique de $\hat{n}_0$.

Solution 1 -

1. Notons X_i la variable qui vaut 1 si la i-ème personne choisie est infectée. Chaque tirage étant indépendant et avec remise, les X_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p = n_0/N$, n_0 étant la seule inconnue. On observe $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$. Le modèle est donc
$$\left([\![0; n]\!], (\mathcal{B}(n, n_0/N))_{n_0 \in [\![0,N]\!]} \right).$$
2. Comme $E_{n_0}|S| = nn_0/N < +\infty$, un estimateur par méthode des moments peut être défini via $E_{n_0}S$, et vérifie l'équation
$$S = n\hat{n}_0/N.$$
On a alors
$$\hat{n}_0 = \frac{NS}{n}.$$
3. Comme $E_{n_0}|X_1| = p < +\infty$, la loi des grands nombres donne
$$\frac{S}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{n_0}{N}.$$
On en déduit $\hat{n}_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} n_0$.

4. Comme $E_{n_0} X_1^2 = p < +\infty$, le Théorème central limite donne

$$\sqrt{n}\left(\frac{S}{n} - \frac{n_0}{N}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{n_0}{N}\left(1 - \frac{n_0}{N}\right)\right).$$

On en déduit

$$\sqrt{n}\left(\hat{n}_0 - n_0\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(n_0(N - N_0)\right)$$

Exercice 2 - Niveau de crue annuelle maximal

Pour une année donnée, le niveau de crue maximal de la Villaine est modélisé par la loi $\mathcal{L}(\lambda)$, de densité

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu_0|},$$

où μ_0 est un paramètre **connu** (niveau de référence), et $\lambda > 0$ est **inconnu**. Le service hydrologie de la mairie de Rennes collecte les niveaux de crue maximaux de ces n dernières années, supposés indépendants d'année en année.

1. Donner un modèle pour cette expérience.
2. Montrer que si $X_1 \sim \mathcal{L}(\lambda)$, $|X_1 - \mu_0| \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (loi exponentielle de paramètre λ).
3. En déduire $E_\lambda(X_1)$ et $\mathrm{Var}_\lambda(X_1)$, s'ils existent, pour $X_1 \sim \mathcal{L}(\lambda)$.
4. Trouver un estimateur de λ par la méthode des moments. On le notera $\hat{\lambda}$.
5. Montrer que $\hat{\lambda}$ est consistant.
6. Trouver le comportement asymptotique de $\hat{\lambda}$.

Solution 2 -

1. On note X_i le niveau de crue maximal de la i-ème dernière année. Les X_i's sont i.i.d. de loi $\mathcal{L}(\lambda)$. Le modèle est alors

$$\left(\mathbb{R}^n, \left(\mathcal{L}(\lambda)^{\otimes n}\right)_{\lambda > 0}\right).$$

2. Soit $t > 0$ et $X_1 \sim \mathcal{L}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P_\lambda\left(|X_1 - \mu_0| > t\right) &= \int_{-\infty}^{-t-\mu_0} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda(\mu_0 - u)} du + \int_{t+\mu_0}^{+\infty} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda(u-\mu_0)} du \\ &= \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda u} du + \int_{t}^{+\infty} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda u} du \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

On en déduit que $|X_1 - \mu_0| \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3. Comme $\mathbb{E}_\lambda|X_1 - \mu_0| = 1/\lambda < +\infty$, et $\mathrm{Var}_\lambda|X_1 - \mu_0| = 1/\lambda^2 < +\infty$, on déduit que $E_\mu(X_1)$et $\mathrm{Var}_\mu(X_1)$ existent. f_λ étant symétrique autour de μ_0, on en déduit

$$E_\lambda(X_1) = \mu_0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\lambda(X_1) &= \mathrm{Var}_\lambda(\mu_0 + (X_1 - \mu_0)) \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \mathbb{E}(\mathcal{E}(\lambda)^2) \\ &= \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

4. Comme $E_\lambda|X_1 - \mu_0| = 1/\lambda$, un estimateur par méthode des moments vérifie l'équation

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0| := \overline{|X - \mu_0|}_n.$$

On en déduit

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{|X - \mu_0|}_n}.$$

5. Comme $E_\lambda|X_1 - \mu_0| = 1/\lambda < +\infty$, la loi des grands nombres donne

$$\overline{|X - \mu_0|}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1/\lambda.$$

Comme $h : u \mapsto 1/u$ est continue en $1/\lambda$, on en déduit

$$\hat{\lambda} = h\left(\overline{|X - \mu_0|}_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} h(1/\lambda) = \lambda.$$

$\hat{\lambda}$ est donc consistant.

6. Comme $\mathrm{Var}_\lambda|X_1 - \mu_0| = 1/\lambda^2 < +\infty$, le théorème central limite donne

$$\sqrt{n}\left(\overline{|X - \mu_0|}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2).$$

Comme h est dérivable en $1/\lambda$, de dérivée $h'(1/\lambda) = -\lambda^2$, la méthode Δ permet alors

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\hat{\lambda} - \lambda\right) &= \sqrt{n}\left(h(\overline{|X - \mu_0|}_n) - h(1/\lambda)\right) \\ &\rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \lambda^2).\end{aligned}$$