# CC1 2024/2025 – Durée 1h

*Les documents et appareils électroniques (calculatrice, téléphone, ordinateur, ...) sont interdits.* ***Toutes les réponses doivent être justifiées.***

## Exercice 1 - Addiction au jeu

Un parieur (et néanmoins supporter d'une équipe A) adopte la stratégie suivante : il ne misera que sur la victoire de l'équipe A, en commençant par miser $5$ euros, puis $10$, puis $20$ (en doublant sa mise à chaque match), **et s'arrêtera de jouer dès que l'équipe A aura gagné**.

On suppose les matchs de l'équipe A indépendants, avec probabilité de succès $1/3$. Par ailleurs, si le parieur gagne et a misé un montant $m$, il récolte $m$ en plus de sa mise de départ (il double sa mise). Son gain net sera alors de $m$ en cas de succès, $-m$ en cas d'échec.

On note $Y_i$ la variable qui vaut $1$ si l'équipe A gagne son $i$-ème match, $0$ sinon. Enfin, on note $Z$ la variable aléatoire correspondant au numéro du premier match où l'équipe A gagne, c'est à dire

$$Z = \min\{i \in [\![1, n]\!] : Y_i = 1\},$$

en prenant pour convention $Z = 0$ si l'équipe A ne gagne jamais.

1. Trouver la loi de $Z$.
2. On note $X_n$ le gain net du joueur après $n$ tirages. Pour $1 \leq k \leq n$, montrer l'égalité suivante
$$X_n \mathbb{1}_{\{Z=k\}} = 5\mathbb{1}_{\{Z=k\}} \ .$$
3. En déduire la loi de $X_n$. Quelle est la probabilité que le joueur ressorte avec un gain positif ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n$ tend vers l'infini ?
4. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 5$.
5. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 5$.

## Solution 1 -

On note $Y_i$ la variable aléatoire qui vaut $1$ si l'équipe A remporte le $i$-ème match, $0$ sinon. D'après l'énoncé $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1/3)$.

1. Comme $Z$ mesure le temps de premier succès dans une expérience de Bernoulli, on a $Z \sim \mathcal{G}(1/3)$ (loi géométrique de paramètre $1/3$).

2. Soit $1 \leq k \leq n$. Sur l'évènement $\{Z = k\}$, le joueur aura perdu jusqu'au coup $k-1$, donc perdu une mise de $\sum_{j=0}^{k-2} 5 \times 2^j$, et aura gagné au coup $k$, et donc empoché $2 \times 5 \times 2^{k-1} - 5 \times 2^{k-1}$ (ses gains moins sa mise au coup $k$). Après ce gain il aura arrêté de jouer. On a alors

$$\begin{aligned} X_n \mathbb{1}_{Z=k} &= \left(5 \times 2^{k-1} - \sum_{j=0}^{k-2} 5 \times 2^j\right) \mathbb{1}_{Z=k} \\ &= 5 \times (2^{k-1} - \times \frac{2^{k-1}-1}{2-1}) \mathbb{1}_{Z=k} \\ &= 5 \mathbb{1}_{Z=k}. \end{aligned}$$

3. Pour $n < k$, $X_n \mathbb{1}_{Z=k} = -\sum_{j=0}^{n-1} 5 \times 2^j = -5 \times (2^n - 1)$ (le joueur aura perdu sa mise à chaque tour). On a alors

$$X_n = 5\mathbb{1}_{Z \leq n} - 5(2^n - 1)\mathbb{1}_{Z>n},$$

$X_n$ prend donc ses valeurs dans $\{-5(2^n-1), 5\}$, avec

$$\mathbb{P}(X_n = -5(2^n - 1)) = \mathbb{P}(Z > n) = (2/3)^n.$$

Le joueur ressortira donc avec un gain positif avec probabilité $1 - (2/3)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(|X_n - 5| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n \neq 5\right) = (2/3)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 5$.

5. Comme, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 5| > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} (2/3)^n = 3 < +\infty$, on a bien que $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} 5$.

**Exercice 2 - Lois log-normales**

Soit $Y$ une variable aléatoire continue, de densité

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{y>0},$$

pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Montrer que $\log(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. On se donne maintenant $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. de loi celle de $Y$, et on note $P_n = (\prod_{i=1}^n Y_i)^{\frac{1}{n}}$. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $P_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} e^{\mu}$.

3. Soit $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, et $t > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(N \geq t\right) \leq \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}t}.$$

4. En déduire une majoration de $\mathbb{P}\left(|Y - e^{\mu}| > \varepsilon\right)$, pour $\varepsilon > 0$ et $Y$ de densité $f$.
5. En n'utilisant pas la loi des grands nombres, montrer que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} e^{\mu}$.

**Solution 2 -**

1. Soit $h$ fonction mesurable positive. On a

$$\mathbb{E}\left(h(\log(Y))\right) = \int_0^{+\infty} h(\log(y)) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Comme $g : y \mapsto \log(y)$ est un $C^1$-difféomorphisme entre $]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}$, avec $g'(y) = 1/y$, un changement de variable donne

$$\mathbb{E}\left(h(\log(Y))\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du.$$

On en déduit que $\log(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. On note $X_i = \log(Y_i)$, et on remarque que les $X_i$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a alors

$$P_n = \exp\left(\bar{X}_n\right),$$

avec $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Comme $\mathbb{E}(|X_1|) \leq \sigma + |\mu| < +\infty$, la loi des grands nombres s'applique à $\bar{X}_n$, et on a $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu$. Comme $h : x \mapsto e^x$ est continue, on en déduit

$$P_n = h(\bar{X}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} h(\mu) = e^{\mu}.$$

3. Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N \geq t\right) &= \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u \geq t} \frac{u}{u} e^{-u^2/2} du \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u \geq t} \frac{u}{t} e^{-u^2/2} du \\
&\leq \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}t}.
\end{aligned}$$

4. Soit $Y$ de densité $f$. On a alors $Y \sim \exp(\mu + \sigma N)$, où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y \geq e^\mu + \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(e^\mu e^{\sigma N} \geq e^\mu(1+\varepsilon/e^\mu)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sigma N \geq \log(1+\varepsilon/e^\mu)\right) \\ &\leq \frac{\sigma e^{-\frac{\log^2(1+\varepsilon/e^\mu)}{2\sigma^2}}}{\log(1+\varepsilon/e^\mu)\sqrt{2\pi}},\end{aligned}$$

d'après la question précédente. Dans l'autre sens, comme $N \sim -N$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y \leq e^\mu - \varepsilon\right) &= \mathbb{P}(\sigma N \leq \log(1-\varepsilon/e^\mu)) \\ &= \mathbb{P}(N \geq \sigma^{-1}\log(1/(1-\varepsilon/e^\mu))) \\ &\leq \frac{\sigma e^{-\frac{\log^2(1/(1-\varepsilon/e^\mu))}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\log(1/(1-\varepsilon/e^\mu))}.\end{aligned}$$

5. On a $P_n = \exp(Z_n)$, où $Z_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$, les calculs précédents (remplacer $\sigma$ par $\sigma/\sqrt{n}$ donnent alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|P_n - e^\mu| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\sigma e^{-n\frac{\log^2(1+\varepsilon/e^\mu)}{2\sigma^2}}}{\sqrt{n}\log(1+\varepsilon/e^\mu)\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma e^{-\frac{n\log^2(1/(1-\varepsilon/e^\mu))}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi n}\log(1/(1-\varepsilon/e^\mu))} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} e^\mu$.