

TD N°5 : ÉQUATION DES ONDES

Pour tout ce TD, on définit l'ensemble

$$\Gamma_+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, |x| \leq t\}.$$

Exercice 1 : propriétés de base de l'équation des ondes

On considère f et g deux fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3)$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3 \\ (u(x), \partial_t u(x))|_{t=0} = (f(x), g(x)) & \text{sur } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

1. Montrer que si $t \geq 1$, on a :

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{4\pi t} \left(\sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} g\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\partial^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \right).$$

2. On suppose que $\text{supp}(f) \subset B(0, R)$ et de même pour $\text{supp}(g)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $\text{supp}(u(t, \cdot)) \subset B(0, R + t)$.

3. On suppose encore que $\text{supp}(f) \subset B(0, R)$ et de même pour $\text{supp}(g)$. Montrer que u est nulle dans l'ensemble $\{(t, x) : t > R, |x| < t - R\}$.

4. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. On définit le cône $C(t_0, x_0)$ par :

$$C(t_0, x_0) = \{(t, x) : |x - x_0| < t_0 - t, t < t_0\}.$$

Montrer que si f et g sont nulles sur l'intersection de l'hyperplan $t = 0$ avec le cône $C(t_0, x_0)$ alors on a $u(t_0, x_0) = 0$.

Exercice 2 : unicité de la solution fondamentale

Montrer que si S et $\tilde{S}$ sont deux solutions fondamentales de l'équation des ondes avec

$$\text{Supp}(S) \subset \Gamma_+ \quad \text{et} \quad \text{Supp}(\tilde{S}) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

alors $S = \tilde{S}$.

Exercice 3 : résolution en dimension 1

Montrer que la seule solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ avec $n = 1$ est

$$S_1(t, x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{t \geq |x|}.$$

Exercice 4 : résolution en dimension 3

Montrer que la seule solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ avec $n = 3$ est

$$S_3(t, x) = \frac{1}{4\pi|x|} \delta_0(t - |x|),$$

au sens où

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4), \quad \langle S_3, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x|} \varphi(|x|, x) dx.$$

On montrera que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4), \quad \forall \lambda > 0, \quad \langle S_3, \varphi \circ M_\lambda \rangle = \lambda^{-2} \langle S_3, \varphi \rangle$$

avec $M_\lambda x := \lambda x$, et que $\square S_3$ est à support en 0.

Exercice 5 : Résolution en dimension 2

1. Soit n un entier et S_{n+1} solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que la distribution $S_{n+1}(t)$ est à support compact. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle S_n(t), \varphi \rangle = \langle S_{n+1}(t), \varphi \otimes 1 \rangle.$$

2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que la seule solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ avec $n = 2$ est

$$S_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} \mathbb{1}_{t \geq |x|}.$$

Exercice 6 : propagation des singularités pour l'équation des ondes

1. Résoudre l'équation des ondes sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (0, f) \end{cases}$$

où $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^n))$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Définitions. On considère $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(i) On dit que f est C^∞ au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage ω de x_0 tel que pour toute $\phi \in C_c^\infty(\omega)$, on a $\phi f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On définit alors le support singulier de f par son complémentaire : $x \notin \text{singsupp}(f)$ s'il existe un voisinage de x sur lequel f est C^∞ .

(ii) On définit également $\Sigma(f)$ par son complémentaire : on dira que $\xi \notin \Sigma(f)$ si $\hat{f}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de u .

(iii) On dit que f est microlocalement C^∞ en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et un cône ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contenant ξ_0 tels que :

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\omega), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists C_N > 0 : \forall \xi \in \Gamma, \quad |\widehat{\phi f}| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}.$$

(iv) L'ensemble des points (x_0, ξ_0) où f n'est pas microlocalement C^∞ est appelé le front d'onde de f et est noté $\text{WF}(f)$.

2. On considère une solution u . Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \geq 1$ et $\chi = 0$ au voisinage de 0. Vérifier que :

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{2i} (u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int (1 - \chi(\xi)) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

où on a noté :

$$u_\pm(t, x) = \int \frac{\chi(\xi)}{|\xi|} e^{i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

3. Montrer que $\text{WF}(u(t)) \subset \text{WF}(u_+(t)) \cup \text{WF}(u_-(t))$.

4. On suppose fixé $t \in \mathbb{R}$ et $x_0 \notin \text{Supp}(f) - t\Sigma_1(f)$, où $\Sigma_1(f) = \Sigma(f) \cap \{|\xi| = 1\}$. Soit U un voisinage de x_0 et Γ un voisinage conique de $\Sigma(f)$ tels que :

$$U \cap (\text{Supp}(f) - t\Gamma_1) = \emptyset$$

où on a noté $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{|\xi| = 1\}$. On introduit ψ homogène de degré 0 telle que $\psi = 1$ sur un voisinage conique de $\Sigma(f)$ et $\psi(\xi) = 0$ pour $\xi \notin \Gamma$. On écrit $u_+ = u_+^1 + u_+^2$ où :

$$\begin{aligned} u_+^1(t, x) &= \int \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|} e^{i(x \cdot \xi + t|\xi|)} \hat{f}(\xi) d\xi, \\ u_+^2(t, x) &= \int \frac{(1 - \psi(\xi))\chi(\xi)}{|\xi|} e^{i(x \cdot \xi + t|\xi|)} \hat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Montrer que $\text{singsupp}(u_+) = \text{singsupp}(u_+^1)$.

5. En utilisant la relation

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j - y_j + t \frac{\xi_j}{|\xi|}}{i \left| x - y + t \frac{\xi}{|\xi|} \right|^2} \partial_j e^{i((x-y) \cdot \xi + t|\xi|)} = e^{i((x-y) \cdot \xi + t|\xi|)},$$

montrer que $u_+^1 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. En déduire $x_0 \notin \text{singsupp}(u_+(t))$.

6. En déduire le « théorème de propagation des singularités » suivant :

$$\text{singsupp}(u(t)) \subset \cup_{(x, \xi) \in \text{WF}(f)} \left(x \pm t \frac{\xi}{|\xi|} \right).$$