IV | Le théorème d'Itô

1) Structure des zéros du MB

Ici $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB issu de 0, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la tribu canonique de B ($\mathcal{F}_t = \sigma(B_u ; 0 \leq u \leq t)$) complétée par les négligeables de la grande tribu.

On note $L_t^a(B)$ le tps local de B au niveau a au temps t.

Si T est un temps d'arrêt, on note $B_t^T = B_{T+t} - B_T$, MB.

On a $L_t^a(B^T) = L_{T+t}^{B_T+a}(B) - L_T^{B_T+a}(B)$.

Pour simplifier, on notera $L_t = L_t^0(B)$.

Pour $\lambda > 0$, $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}$ est un MB, et $L_t^a(B^{(\lambda)}) = \lambda^{-1} L_{\lambda^2 t}^{\lambda a}(B)$.

Lemme 1) $L_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{ps}} +\infty$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $L_\varepsilon > 0$.

Preuve : $(L_t) \stackrel{(d)}{=} (S_t)$ par le thm de Lévy.

Le résultat en découle d'après la loi du tout ou rien :

Pour 2) : Si $\varepsilon_p \downarrow 0$, $A = \bigcap_p \{\sup_{0\leq s\leq \varepsilon_p} B_s > 0\} \in \mathcal{F}_{0+}$.

Donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

Or $\mathbb{P}(A) = \lim_{p\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq \varepsilon_p} B_s > 0) \geq \frac{1}{2}$.

Pour 1) on utilise l'invariance du MB :

$$1 = \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > 0) = \lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > \delta)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq \frac{1}{\delta^2}} \frac{1}{\delta} B_{\delta^2 s} > 1)$$

$$= \mathbb{P}(\sup_{s\geq 0} B_s > 1).$$

Puis, par chgt d'échelle, $\mathbb{P}(\sup_{s\geq 0} B_s > A) = 1$. $\forall A$.

Thm p.s, $B_t = 0 \iff t$ est un point de croissance de L.
(càd soit $(\forall \varepsilon > 0,\ L_{t+\varepsilon} > L_t)$ soit $(\forall \varepsilon > 0,\ L_t > L_{t-\varepsilon})$)

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$ Déjà vu.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pour 0, ok.

Pour $q \in \mathbb{Q}^+$, on pose $\sigma_q = \inf\{t \geq q\ ;\ B_t = 0\} < \infty$ p.s.

D'après ce qui précède, $L_{\sigma_q + t} > L_{\sigma_q}$ $\forall t > 0$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, p.s.

Ainsi : • si $\exists q$ tq $t = \sigma_q$, on a bien $\forall \varepsilon > 0$, $L_{t+\varepsilon} > L_t$.

• si $\nexists q$ tq $t = \sigma_q$, ~~on choisit~~ pour $\varepsilon > 0$, on choisit $q \in]t-\varepsilon, t[$. Ainsi $\sigma_q < t$ et σ_q est un point de croissance de L, et donc $L_{t-\varepsilon} < L_t$. $\blacksquare$

Pour $s \geq 0$, on note $\boxed{\tau_s = \inf\{t \geq 0\ ;\ L_t > s\}}$ $< \infty$ ps

$s \longmapsto \tau_s$ est $\nearrow$, càd.

De plus $\boxed{\tau_{s-} = \inf\{t \geq 0\ ;\ L_t = s\}}$

Corollaire Soit D l'ensemble des discontinuités de τ.

1) On a $\{t \geq 0\ ;\ B_t = 0\} = \{\tau_s,\ s \geq 0\} \cup \{\tau_{s-},\ s \in D\}$

2) les composantes connexes de $\mathbb{R}_+ \setminus \{t \geq 0\ ;\ B_t = 0\}$ sont les intervalles $]\tau_{s-}, \tau_s[$ pour $s \in D$.

Preuve 1) $\boxed{\supset}$ ok.

$\boxed{\subset}$ • Si $L_{t+\varepsilon} > L_t$ $\forall \varepsilon > 0$, alors $t = \tau_{L_t}$

• Sinon, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tq $L_{t+\varepsilon_0} = L_t$ et $L_{t-\varepsilon} < L_t$ $\forall \varepsilon > 0$.

Alors $t = \tau_{L_t -}$. De plus, $\tau_{L_t} \geq t + \varepsilon_0$, donc $L_t \in D$.

2) Un intervalle de la forme $]\tau_{s-}, \tau_s[$ ne contient pas d'instant t tq $B_t = 0$.

Réciproquement, si $]a,b[$ est une composante connexe de $\mathbb{R}_+ \setminus \{t \geq 0 ; B_t = 0\}$, on a $L_a = L_b = s$, $B_a = B_b = 0$.
On vérifie que $a = \tau_{s-}$, $b = \tau_s$. ∎

2) Le théorème d'Itô

On pose $E = \{e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} ; e \text{ continue}, e(0) = 0 \text{ et } \zeta(e) := \sup\{s > 0 ; e(s) = 0\} \in]0, \infty[\}$

$$d(e, e') = \sup_{t \geq 0} |e(t) - e'(t)| + |\zeta(e) - \zeta(e')|$$

Pour $u \in D$ et $t \geq 0$, on pose $e_u(t) = B_{(\tau_{u-} + t) \wedge \tau_u}$.

On pose $\mathcal{N} = \sum_{u \in D} \delta_{(u, e_u)}$

Thm $\mathcal{N}$ est un $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tau_t})$-processus de Poisson ponctuel.

Preuve 1) On pose $E_p = \{e \in E ; \zeta(e) > \frac{1}{p}\}$.
Alors $N([0,1] \times E_p) = \text{Card}\{u \in [0,1] \cap D ; \tau_u - \tau_{u-} > \frac{1}{p}\}$
$\leq p \tau_1$

2) On a bien $N(\{0\} \times E) = 0$ car $0 \notin D$.
On a $N(\{t\} \times E) = 0$ ou 1 suivant si $t \in D$.

3) On a bien $N_t(A)$ $\mathcal{F}_{\tau_t}$ mesurable car $N_t(A)$ ne fait intervenir que les excursions en dehors de 0 de $(B_{s \wedge \tau_t}, s \geq 0)$, qui est $\mathcal{F}_{\tau_t}$ mesurable.

On fixe $0 \leq s \leq t$ et $A_1, \dots, A_k$ $\forall j$ $N_1(A_j) < \infty$ p.s.

On pose $B'_u = B_{\tau_s + u}$, MB $\perp \mathcal{F}_{\tau_s}$.

Alors
$$\begin{cases} L_u(B') = L_{\tau_s + u}(B) - s \\ \tau'_u = \tau_{s+u} - \tau_s \\ D' = \{u - s, u \in D, u > s\} \\ e'_u = e_{s+u} \quad u \in D' \end{cases}$$

Ainsi

$$(N_t(A_1)-N_s(A_1), \dots, N_t(A_k)-N_s(A_k))$$
$$\overset{?}{=} (N'_{t-s}(A_1), \dots, N'_{t-s}(A_k))$$
$$\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{\tau_s}$$
$$\overset{\text{"(u)"}}{=} (N_{t-s}(A_1), \dots, N_{t-s}(A_k)). \qquad \boxed{\xi}$$

On note n la mesure d'intensité

Conséquences :

Pour $u \notin D$, on pose $e_u = \partial$

(Formule additive dans l'échelle du temps local).

Soit $H : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times E_\partial \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable par rapport à $(\mathrm{Pr\acute{e}v}(\mathcal{F}_{\tau_t}) \otimes \mathcal{E})_{t\geq 0}$. Alors $+ H(\cdot, \cdot, \partial) = 0$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_s H(s, w; e_s)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_E n(de)\, H(s, w; e)\Big].$$

(Formule additive dans l'échelle du temps normal).

Soit $H : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times E \to \mathbb{R}^+$ prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{E})_{t\geq 0}$. Alors

$$\mathbb{E}\Big[\sum_s H(\tau_{s-}, w; e_s)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_E n(de)\, H(\tau_{s-}, w, e)\Big].$$

En effet si H est $\mathcal{P}_{\mathrm{pr\acute{e}v}}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{E}_\partial$ mesurable, alors $(s, w, u) \mapsto H(\tau_{s-}(w), w; e)$ est $\mathcal{P}_{\mathrm{pr\acute{e}v}}(\mathcal{F}_{\tau_t}) \otimes \mathcal{E}_\partial$ mesurable.

Comme $\{s,\ \tau_{s-} \neq \tau_s\}$ est dénombrable :

$$\mathbb{E}\Big[\sum_s H(\tau_{s-}, w; e_s)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_E n(de)\, H(\tau_s, w, e)\Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_E n(de)\, H(s, w, e)\Big].$$

Formule multiplicative

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times E_\partial \to \mathbb{R}_+$ mesurable tq $f(\cdot, \partial) = 0$.

Alors $$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{s\geq 0} f(s, e_s)\right)\right] = \exp\left(-\int_0^\infty ds \int_E n(de)\left(1 - e^{-f(s,e)}\right)\right).$$

3) Quelques propriétés de la mesure d'Itô

Lemme 1) $(\tau_t)_{t\geq 0}$ est un subordinateur

2) p.s, $\forall t \geq 0$, $\tau_t = \sum_{0\leq s\leq T} (\tau_s - \tau_{s-})$

Preuve : 1) On vérifie que

$$\tau_{s'} - \tau_s = \inf\{t \geq 0 \,;\, L_t(B^{\tau_s}) > s' - s\} \overset{(d)}{=} \tau_{s'-s}$$

et $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{\tau_s}$.

2) On calcule $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_t}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda T_t}]$

où $T_t = \inf\{s \geq 0 \,;\, B_s > t\}$.

Or $M_s = \exp(+\lambda B_s - \frac{s}{2}\lambda^2)$ est une martingale.

$\Rightarrow \mathbb{E}[M_{s\wedge T_t}] = 1$. On fait $s \to \infty$ et CVDOM :

$$1 = \mathbb{E}\left[e^{+\lambda t - T_t \frac{\lambda^2}{2}}\right] \Rightarrow \mathbb{E}[e^{-\lambda T_t}] = e^{-\sqrt{2\lambda}\, t}$$

Ainsi $$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_t}] = \exp\left(-t \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}}\right)$$

Ainsi $\tau_t = \mathcal{N}([0,t])$ où $\mathcal{N}$ est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\Pi(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}}$.

D'où le résultat.

Corollaire

- $\tau_t = \sum_{s \le t} \zeta(e_s)$
- $\tau_{t-} = \sum_{s < t} \zeta(e_s)$
- $B_t = \sum_{s \le L_t} e_s(t - \tau_{s-}) = e_s(t - \tau_{s-})$ si $\tau_{s-} \le t \le \tau_s$

Prop $n(\zeta > x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$

Preuve : On a $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_t}] = \mathbb{E}[e^{-\sum_{s \le t} \lambda \zeta(e_s)}]$

$$= \exp\left(-\int_0^t \int n(de)\,(1 - e^{-\lambda \zeta(e)})\right)$$

Donc $\int n(de)\,(1 - e^{-\lambda\zeta(e)}) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}} \left(1 - e^{-\lambda x}\right).$

$$\int n(de) \int_0^\infty dx\, \mathbb{1}_{x \le \zeta(e)}\, e^{-\lambda x} \qquad\qquad 1 - e^{-\lambda x} = \int_0^\infty du\, \mathbb{1}_{u \le x} \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda}$$

$$= \int_0^\infty dx\, \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\, n(\zeta > x) \qquad = \int_0^\infty dx\, \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \int_x^\infty du\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, u^{3/2}}$$

$$= \int_0^\infty dx\, \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

NB notons $e^{(x)}$ la première excursion de longueur $> x$
Alors la loi de $e^{(x)}$ est $n(\cdot \mid \zeta > x)$.

On peut écrire $n = n_+ + n_-$ où n_+ est portée par les excursions ≥ 0 et n_- par les excursion ≤ 0.

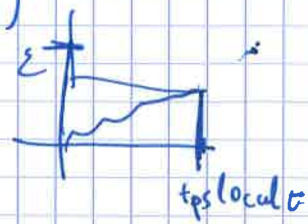
Prop Soit $E_\varepsilon = \{ e \in E_+ \, ; \, \sup e > \varepsilon \}$. Alors

$$n_+(E_\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}$$

Preuve On sait que $N_t(E_\varepsilon)$ suit une loi de Poisson de paramètre $t\, n(E_\varepsilon)$.

Or $\mathbb{P}(N_t(E_\varepsilon) = 0) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq \tau_t} B_s \leq \varepsilon \right)$

$$= \mathbb{P}(L_{T_\varepsilon} > t).$$



Or L_{T_ε} suit une loi $\exp(2\varepsilon)$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(L_{T_\varepsilon} > t) = e^{-\frac{t}{2\varepsilon}}$. D'où le résultat. $\boxtimes$

Exemple Soit $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $b \geq 0$. Estimer.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq \tau_\ell} \left(|B_s| - k(L_s) \right) \leq b \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\prod_{s \leq \ell} \mathbb{1}_{\{\sup |e_s| - k(s) \leq b\}} \right)$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(- \sum_{s \leq \ell} g(s, e_s) \right) \right]$$

$$= \exp\left(- \int_0^\ell ds \int n(de)\, \mathbb{1}_{\{\sup|e| - k(s) > b\}} \right)$$

où $g(s, e_s) = \infty$ si $\sup |e_s| - k(s) > b$
$= 0$ sinon.

Or $n(\sup|e| > b + k(s)) = \dfrac{1}{b + k(s)}$

$$= \exp\left(- \int_0^\ell \frac{ds}{b + k(s)} \right)$$

Ou encore on introduit

$\tilde{E} = \{ (s, e) \in [0, \ell] \times E \, ; \, \sup|e| > b + k(s) \}$.

$\Rightarrow \sup_{s \leq \tau_\ell} (|B_s| - k(L_s)) \leq b \iff \mathcal{N}(\tilde{E}) = 0$.

En particulier,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\geq 0}\left(|B_s|-k(L_s)\right)\leq b\right)=\exp\left(-\int_0^\infty \frac{d\lambda}{2(b+k(\lambda))}\right)$$

le mettre avant

Exemple Soit $f\geq 0$ mesurable et

$$A_t=\int_0^{\tau_t} ds\, f(B_s).$$

On a : $$A_t=\sum_{s\leq t}\int_{\tau_{t-}}^{\tau_t} ds\, f(B_s)$$

$$=\sum_{s\leq t}\int_0^{\zeta(e_s)} du\, f(e_u).$$

Ainsi $$\mathbb{E}[\exp(-\lambda A_t)]=\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{s\leq t}\lambda\int_0^{\zeta(e_s)} du\, f(e_u)\right)\right]$$

$$=\exp\left(-t\int n(de)\left(1-e^{-\lambda\int_0^{\zeta} du\, f(e_u)}\right)\right)$$