II) Processus de Poisson linéaire

1) Définition

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtration (càd, complète)

Déf

Un processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson (de paramètre λ) si :

① (N_t) est $(\mathcal{F}_t)$ adapté

② $t \mapsto N_t$ est $(\nearrow)$, càd et $N_0 = 0$

③ $\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = j \mid \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^j}{j!}$ pour $s,t \geq 0$, $j \geq 0$.

Déf On dit que $(N_t)_{t\geq 0}$ vérifie (P) si : (N_t) est $(\mathcal{F}_t)$ adapté et

① $t \mapsto N_t$ est $\nearrow$, càd

② $N_0 = 0$ et (N_t) n'augmente que par des sauts d'amplitude 1.

③ $\forall t,s \geq 0$ $N_{t+s} - N_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$ et $N_{t+s} - N_t \overset{(d)}{=} N_s$

But : (N_t) $(\mathcal{F}_t)$ proc de Poisson $\Leftrightarrow$ (N_t) vérifie P.

Exemple : si $\lambda > 0$ et $\mathcal{N}$ est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+$ d'intensité λdt, alors $N_t = \mathcal{N}([0,t])$ est un $(\mathcal{F}_t)$ proc. de Poiss. de paramètre λ, où $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s ; 0 \leq s \leq t)$ où $\mathcal{Y}$ est la classe des négligeables de $\sigma(N_s, s \geq 0)$

Preuve de Déf $\Rightarrow$ (P) ① et ③ ok.

On montre ②.

* $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(N_t - N_{t-} > 0) = 0$ car $\mathbb{P}(N_t - N_{t-s} > 0) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$
* Si $t_0 > 0$ est fixé :

$$\sup_{0\leq t\leq t_0}(N_t - N_{t-}) = \lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n}\left(N_{\frac{k t_0}{n}} - N_{\frac{(k-1)t_0}{n}}\right) \text{ p.s}$$

Or $\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(N_{\frac{kt_0}{n}} - N_{\frac{(k-1)t_0}{n}}\right)\le 1\right) = \mathbb{P}\left(N_{\frac{t_0}{n}} \le 1\right)^n$

$$= \left(e^{-\lambda\frac{t_0}{n}}\left(1+\frac{\lambda t_0}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Pour la réciproque, il suffit de montrer que $\exists \lambda$ tq $N_s \overset{(d)}{=} \text{Poisson}(\lambda s)$.

On suppose que (N_t) vérifie (P). Alors

1) Si $a\geq 0$, $\underset{\mathcal{F}_a}{\underset{\perp\!\!\!\perp}{(N^{(a)}_{t_1}, \dots, N^{(a)}_{t_k})}} = (N_{t_1}, \dots, N_{t_k})$

où $N^{(a)}_t = N_{a+t} - N_a$.

2) Soit T un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ tq $T<\infty$ p.s

Alors

$$\underset{\mathcal{F}_T}{\underset{\perp\!\!\!\perp}{(N^{(T)}_{t_1}, \dots, N^{(T)}_{t_k})}} \overset{(d)}{=} (N_{t_1}, \dots, N_{t_k})$$

preuve : Soit $A\in\mathcal{F}_T$. On note $[t]_n$ le plus petit réel $\geq t$ de la forme $i2^{-n}$. Alors

$\mathbb{P}(A\cap\{N^{(T)}_{t_1}=k_1, \dots, N^{(T)}_{t_p}=k_p\})$

$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A\cap\{N^{([T]_n)}_{t_1}=k_1, \dots, N^{([T]_n)}_{t_p}=k_p\})$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underbrace{A\cap\{\frac{i-1}{2^n}\le T\le\frac{i}{2^n}\}}_{\in\mathcal{F}_{i/2^n}}\cap\{N^{(i2^{-n})}_{t_1}, \dots, N^{(i2^{-n})}_{t_p}\})$

$= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(N_{t_1}=k_1, \dots, N_{t_p}=k_p)$. ☒

Notons T_i le i-ième saut de (N_t) qui est un temps d'arrêt.

$T_1 = \exp(\lambda)$. (Markov simple).

Puis on voit que $T_{n+1}-T_n \overset{(d)}{=} T_1$ et $T_{n+1}-T_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{T_n}$.

Ainsi $N_t = \text{Card}\{i\geq 1;\ T_i\le t\}$

Or les sauts de $(N([0,t]))$ vérifient ces m̂ prop

$\Rightarrow N_t \overset{(d)}{=} \text{Poisson}(\lambda s)$.