Méthode probabiliste en combinatoire

Dans toute la feuille, sauf indication contraire, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 Montrer qu'il est possible de colorier les entiers de 1 à 2013 en quatre couleurs de manière à n'avoir aucune progression arithmétique monochrome de longueur 11.

Exercice 2 Soient n et k dans $\mathbb{N}^*$. Au cours d'un tournoi entre n joueurs, chaque paire s'affronte exactement une fois. On dit que le tournoi est *k-indécis* si pour tout ensemble A de k joueurs, il existe un joueur qui a battu tous ceux de A.
Montrer que pour tout k, il existe un tournoi k-indécis à plus de k joueurs.

Exercice 3 (Shortlist 2006) Soit S un ensemble fini de points dans le plan. Pour tout polynôme convexe P dont les sommets sont des points de S, on note $a(P)$ le nombre de sommets de P et $b(P)$ le nombre de points de S à l'extérieur de P.
On prend comme convention que l'ensemble vide, un point et un segment sont des polygones convexes. Montrer la formule :

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Sperner) Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de sous-ensembles de $[\![1, 2n]\!]$: on suppose que pour tous B et C distincts dans $\mathscr{A}$, B n'est pas inclus dans C. (On dit alors que $\mathscr{A}$ est une antichaîne.

- Montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{B \in \mathscr{A}} \frac{1}{\binom{n}{|B|}} \leq 1$$

- En déduire $|\mathscr{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Exercice 5 Soient $p, q \geq 0$ avec $p + q = 1$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité :

$$(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \leq 1$$

Exercice 6 Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que :

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} = +\infty$$

Exercice 7 On note $p_n(k)$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ admettant exactement k points fixes. Montrer la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

Exercice 8 Au cours d'un tournoi auquel ont participé 2013 joueurs, chaque paire de joueurs s'est affrontée exactement une fois. Montrer qu'il existe deux ensembles A et B de 8 joueurs tels que tous les joueurs de A ont battu tous les joueurs de B.

Exercice 9 Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels non tous nuls de somme nulle. Montrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que :

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} + ... + x_{\sigma(n)}x_{\sigma(1)} < 0$$

Exercice 10 (USAMO 2012) Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ tels que $\sum_i x_i = 0$ et $\sum_i x_i^2 = 1$. Pour tout $A \subset [\![1, n]\!]$ on pose $S_A = \sum_{i \in A} x_i$.
Soit $\lambda > 0$. Montrer que le nombre de A tels que $S_A \geq \lambda$ est inférieur ou égal à $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$.

Exercice 11 Soit G un graphe et, pour tout x sommet de G, $d(x)$ son degré, i.e le nombre de voisins de ce sommet dans le graphe. On dit qu'un ensemble A de sommets de G est *indépendant* si il ne contient pas deux sommets voisins.
Montrer qu'il existe un ensemble indépendant de taille supérieure ou égale à :

$$\sum_x \frac{1}{1 + d(x)}$$

Exercice 12 (IMO 1989) On dit qu'une permutation σ de $[\![1, 2n]\!]$ est *gentille* si il existe i tel que $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Elle est *méchante* sinon.
Montrer qu'il y a plus de permutations gentilles que de permutations méchantes.