Logique & théorie des ensembles — II

Parimaths

Samedi 14 décembre 2013

Joon Kwon

Exercice 1

Soit A, B, C, D quatre ensembles donnés par $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{1,3,5,7\}$ et $D = \{2,3,4,5,6\}$. Décrire les ensembles $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ et $(A \cup C) \cap (B \cup D)$.

Exercice 2

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont-elles toujours vraies ?

1) $a \in E$
2) $a \subset E$
3) $\{a\} \subset E$
4) $\varnothing \in E$
5) $\varnothing \subset E$
6) $\{\varnothing\} \subset E$?

Exercice 3

Décrire en compréhension :

1) l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
2) l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \dots\}$.
3) l'ensemble $]0, 1]$.
4) l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
5) l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit A, B, C trois ensembles. Montrer les égalités suivantes.

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 5

Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E. Montrer que :

1) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
2) $A = B \Longleftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3) $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 6

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1) Montrer que $(A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C) \Longrightarrow (B \subset C)$.
2) Montrer que $(A \cup B = A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cap C) \Longrightarrow (B = C)$.

3) Montrer que $(A \cup B = A \cap B) \Longleftrightarrow (A = B)$.

Exercice 7
Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 8
Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer que $\complement_E A \setminus \complement_E B = B \setminus A$.

Exercice 9
Montrer que $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$

Exercice 10 ⋆
Soit E un ensemble. Déterminer toutes les applications $f : E \longrightarrow E$ telles que $f \circ g = g \circ f$ pour toute application $g : E \longrightarrow E$.

Exercice 11
On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

1) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
2) Déterminer $f^{\langle -1 \rangle}([1, +\infty[)$.

Exercice 12
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$. Soient A et B deux parties de F.

1) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow f^{\langle -1 \rangle}(A) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B)$.
2) Montrer que $f^{\langle -1 \rangle}(A \cap B) = f^{\langle -1 \rangle}(A) \cap f^{\langle -1 \rangle}(B)$.
3) Montrer que $f^{\langle -1 \rangle}(A \cup B) = f^{\langle -1 \rangle}(A) \cup f^{\langle -1 \rangle}(B)$.

Exercice 13
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$. Soient A et B deux parties de E.

1) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.
2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 14 ⋆
Soient $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que $f(A \cap f^{\langle -1 \rangle}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 15
On définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}.$$

1) Montrer que f est injective.
2) Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 16
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 17
Soit E, F deux ensembles (E est supposé non vide), et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

(i) f est injective ;

(ii) Il existe une application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

2) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

(i) f est surjective ;

(ii) Il existe une application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{G}}$.

Exercice 18

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et G un ensemble. On suppose que G contient au moins deux élements.

1) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) f est injective ;

(ii) Pour tout couple d'applications g, h qui vont de G dans E,

$$(f \circ g = f \circ h) \Longrightarrow g = h.$$

2) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) f est surjective ;

(ii) Pour tout couple d'applications g, h qui vont de F dans G,

$$(g \circ f = h \circ f) \Longrightarrow g = h.$$