Logique & théorie des ensembles — I

Parimaths

Samedi 7 décembre 2013

Joon Kwon

Exercice 1 (*Lois de Morgan*)
Soient A et B deux assertions. Montrer les équivalences suivantes :

1) non(A et B) $\Longleftrightarrow$ (non A) ou (non B)
2) non(A ou B) $\Longleftrightarrow$ (non A) et (non B).

Exercice 2
Montrer que l'assertion (A $\Longrightarrow$ B) est équivalente à (non A ou B).

Exercice 3 (*Proposition contraposée*)
Soient A et B deux assertions. Montrer l'équivalence suivante : (A $\Longrightarrow$ B) $\Longleftrightarrow$ (non B $\Longrightarrow$ non A).

Exercice 4 ⋆
Soient a, b deux entiers naturels.

1) Donner un équivalent de $(a < b) \Longrightarrow (a = b)$.
2) Donner la négation de $(a \leqslant b) \Longrightarrow (a > b)$.

Exercice 5 (*Distributivité*)
Soient A,B,C trois assertions. Montrer les équivalences suivantes.

1) A et (B ou C) $\Longleftrightarrow$ (A et B) ou (A et C)
2) A ou (B et C) $\Longleftrightarrow$ (A ou B) et (A ou C).

Exercice 6
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1) la fonction f s'annule
2) la fonction f est la fonction nulle
3) f est constante
4) f n'est pas une fonction constante
5) f ne prend jamais deux fois la même valeur
6) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 7
Soit f une fonction à valeurs réelles et I sont domaine de définition. Exprimer les négations des assertions suivantes :

1) $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \neq 0$
2) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathrm{I},\ f(x) = y$
3) $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ |f(x)| \leqslant \mathrm{M}$
4) $\forall x, y \in \mathrm{I},\ (x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y))$
5) $\forall x, y \in \mathrm{I},\ (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$
6) $\forall x \in \mathrm{I},\ (f(x) > 0 \Longrightarrow x \leqslant 0)$

Exercice 8
Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1$
2) $\exists x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2 \Longrightarrow n \geqslant 3$
4) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \geqslant 3$
5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \leqslant x < n+1$
6) $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \leqslant x < n+1$.

Exercice 9 ⋆
Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie : $\forall y \in [0,1],\ x \geqslant y \Longrightarrow x \leqslant 2y$.

Exercice 10
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $(\forall \varepsilon \geqslant 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow a = 0$
2) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow a = 0$.

Exercice 11
Soient E un ensemble et $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{Q}(x)$ des assertions dépendant de l'élément $x \in \mathrm{E}$. Les équivalences suivantes sont-elles vraies ?

1) $[\forall x \in \mathrm{E},\ (\mathrm{P}(x) \text{ et } \mathrm{Q}(x))] \Longleftrightarrow [(\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x))]$.
2) $[\exists x \in \mathrm{E},\ (\mathrm{P}(x) \text{ et } \mathrm{Q}(x))] \Longleftrightarrow [(\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x))]$.
3) $[\forall x \in \mathrm{E},\ (\mathrm{P}(x) \text{ ou } \mathrm{Q}(x))] \Longleftrightarrow [(\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x))]$.
4) $[\exists x \in \mathrm{E},\ (\mathrm{P}(x) \text{ ou } \mathrm{Q}(x))] \Longleftrightarrow [(\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x))]$.

Exercice 12 ⋆
Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1) $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$
2) $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$
3) $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$
4) $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$
5) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par contraposée l'implication suivante : n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair.

Exercice 14 (*Principe des tiroirs de Dirichlet*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts. Montrer qu'alors qu'il existe un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 15 ⋆
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ tels que $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : "Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$".

1) Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2) Écrire la négation de cette formule logique.
3) Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété. *(On pourra montrer que $x_n - x_0 > 0$)*.
4) En donner une preuve en utilisant le principe de Dirichlet.