

# Analyse I : suites, limites et continuité

Maxime LEGRAND

ENS - 7 décembre 2013

<http://matholympia.blogspot.fr/>

## 1 Petits rappels sur les quantificateurs

**Définition 1.** On introduit (ou rappelle) les **quantificateurs** suivants :

- $\exists$  signifiant "il existe"
- $\forall$  signifiant "pour tout"

**Remarque.** Généralement, l'introduction d'un élément  $x$  par  $\exists$  sera suivi de ":" signifiant "tel que", afin de donner des conditions sur cet élément.

Ainsi,  $\exists x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1$  signifie "Il existe un élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $x$  soit strictement compris entre 0 et 1". Cette proposition est évidemment vraie (par exemple pour  $x = \frac{1}{\pi}$ ).

Les *quantificateurs* sont extr mement importants en logique mathématiques, et il est primordial de savoir parfaitement les manipuler.

Une opération importante sur une proposition logique  $Q$  est le passage à la négation  $\neg Q$  de  $Q$ , qu'il faut savoir manipuler. On remarque alors que les quantificateurs  $\exists$  et  $\forall$  sont inter-changés, et les affirmations triviales remplacées par leur contraire.

Ainsi, si l'on pose  $Q : \exists x \in \mathbb{R} : \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, y < x \text{ et } x < z$ , on aura  $\neg Q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists (y, z) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \text{ ou } x \geq z$ .

Bien entendu, seule  $\neg Q$  est vraie.

**Exercice d'application.** Comment formuler à l'aide de quantificateurs que deux éléments de  $\mathbb{R}$  sont soit égaux, soit comparables au sens strict ? Et le contraire ?

## 2 Suites réelles, limite de suites

### 2.1 Suites réelles

**Définition 2.** Une **suite réelle** est une fonction  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . On note généralement  $u_n = u(n)$  l'image d'un élément  $n \in \mathbb{N}$ , et la suite s'écrit alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On dit qu'une suite est

- **constante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$
- **majorée** si  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- **minorée** si  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- **bornée** si elle est minorée et majorée
- **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$
- **monotone** si elle est croissante et décroissante

**Remarque.** Une suite  $u$  est bornée si et seulement si  $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**Remarque.** Une suite peut être définie de façon *exhaustive*, comme  $u_n = 2^n$ , ou par *réurrence*, par exemple :

- $v_0 = 1$
- $v_{n+1} = 2v_n$ .

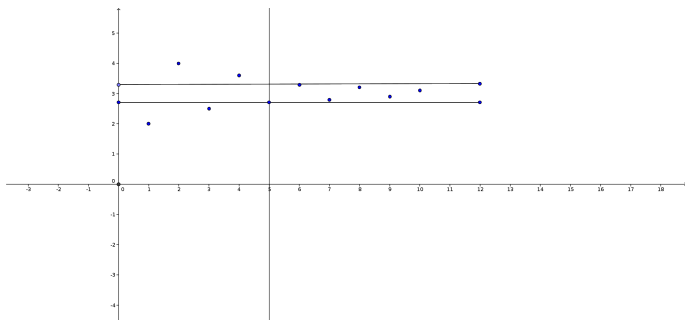
Ici, les deux définitions nous permettent d'obtenir la même suite :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 2.2 Limite de suites

**Définition 3.** On dit qu'une suite **converge vers 0** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \epsilon.$$

On dit qu'une suite **converge vers**  $l \in \mathbb{R}$  si  $u - l = (u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.  $l$  est alors appelée **limite** de la suite  $u$ .



**Définition 4.** On dit qu'une suite :

- **diverge vers**  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A$$

- **diverge vers**  $-\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq A$$

**Remarque.** On dit qu'une suite  $u$  est *convergente* si elle converge vers un certain  $l \in \mathbb{R}$ , et *divergente* si  $|u|$  diverge vers  $+\infty$ .

On montre facilement qu'une suite convergente est bornée.

**Lemme 1** (Inégalité triangulaire). Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}$ , alors  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

**Théorème 2** (Unicité de la limite). Soit  $u$  une suite convergente ou divergeant vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Alors  $u$  admet une **unique** limite  $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , notée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , ou plus simplement  $\lim u$ .

**Théorème 3** (Opérations sur les suites). Soit  $u$  et  $v$  deux suites convergeant respectivement vers  $l_u$  et  $l_v$ . Alors

-  $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l_u + l_v$

-  $u - v = (u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l_u - l_v$

-  $u \cdot v = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l_u l_v$

- si  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$  et  $l_v \neq 0$ ,  $\frac{1}{v} = (\frac{1}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et converge vers  $\frac{1}{l_v}$

- si  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$  et  $l_v \neq 0$ ,  $\frac{u}{v} = (\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et converge vers  $\frac{l_u}{l_v}$

**Proposition 4** (Stabilité des inégalités larges par passage à la limite). Soit  $u$  et  $v$  deux suites convergeant respectivement vers  $l_u$  et  $l_v$ , et telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ . Alors  $l_u \leq l_v$ .

**Remarque.** Attention, si on remplace les  $\leq$  par des  $<$ , la proposition devient FAUSSE. On pourra par exemple prendre  $u_n = -2^{-n}$  et  $v_n = 2^{-n}$ .

**Proposition 5.** Soit  $u$  une suite convergeant vers  $l > 0$ . Alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

**Corollaire 6.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $u$  une suite convergeant vers  $l > a$ . Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n > a.$$

**Remarque.** La propriété ci-dessus est équivalente au m<sup>me</sup> énoncé en remplaçant  $u_n > a$  par  $u_n \geq a$ . (Penser à remplacer  $a$  par  $\frac{a+l}{2}$ )

**Exercice d'application.** Soit  $u$  une suite réelle telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$ .

Si  $u$  converge vers une limite  $l$ , que peut-on dire sur  $l$ ?

Montrer que  $u$  converge si et seulement si elle stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

## 2.3 Suites extraites

**Définition 5.** On appelle **extraction** une fonction strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

**Remarque.** Quelques extractions simples : les fonctions qui, à  $n \in \mathbb{N}$  associent  $n, 2n, 2n + 1, n^2, 2^n, \dots$

**Définition 6.** Soit  $u$  une suite réelle. La suite  $v$  est dite **extraite** de  $u$  si il existe une extraction  $\phi$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}.$$

**Définition 7.** Soit  $u$  une suite réelle et  $l \in \mathbb{R}$ . On dit que  $l$  est une **valeur d'adhérence** de  $u$  s'il existe une suite  $v$  extraite de  $u$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

**Définition 8.** Deux suites réelles  $u$  et  $v$  sont dites **adjacentes** si :

- $u$  est croissante et  $v$  est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n - u_n| = 0$ .

**Définition 9.** Soit  $A$  un ensemble non vide et borné de  $\mathbb{R}$ . Alors on admet que  $A$  admet un plus petit majorant  $\sup A$  appelé **borne supérieure** de  $A$ , ainsi qu'un plus grand minorant  $\inf A$  appelé **borne inférieure** de  $A$ .

**Lemme 7.** Une suite croissante et majorée est convergente, de même qu'une suite décroissante et minorée.

**Remarque.** Une suite monotone admet donc toujours une limite, qui est éventuellement infinie (dans le cas où elle n'est pas bornée).

**Théorème 8** (Suites adjacentes). Soit  $u$  et  $v$  deux suites adjacentes (telles que  $u$  soit la suite croissante). Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $u$  et  $v$  convergent vers une même limite  $l$ .

**Remarque.** La paire de suites  $u_n = -2^{-n}$  et  $v_n = 2^{-n}$  est un exemple-type de suites adjacentes. Leur limite commune étant évidemment 0.

**Exercice d'application.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < b$ . On pose :

- $u$  telle que  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$
- $v$  telle que  $v_0 = b$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  sont monotones. Dans quel sens ?

Montrer que  $u$  et  $v$  convergent.

Montrer qu'elles ont la même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de  $u$  et  $v$ .

**Lemme 9.** Soit  $E = A \cup B$  une réunion d'ensembles tel que  $\text{card}(E) = +\infty$ . Alors  $\text{card}(A) = +\infty$  ou  $\text{card}(B) = +\infty$ .

**Théorème 10** (Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

**Remarque.** Mais il peut y en avoir bien plus qu'une ! Par exemple, on peut montrer que tout élément de  $[-1; 1]$  est valeur d'adhérence de la suite  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice d'application.** Si une suite bornée n'a qu'une valeur d'adhérence  $l \in \mathbb{R}$ , elle converge vers  $l$ .

## Complément : suites de Cauchy

**Définition 10.** Une suite est dite **de Cauchy** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \implies |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

**Théorème 11** (Complétude de  $\mathbb{R}$ ). *Tout suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy : on dit que  $\mathbb{R}$  est **complet**.*

**Démonstration. Exercice.**

Indications :

- Une suite convergente est évidemment de Cauchy, si pour un certain  $\epsilon > 0$ , on applique la définition de la convergence pour  $\frac{\epsilon}{2}$  et l'inégalité triangulaire.
- Pour montrer qu'une suite de Cauchy est convergente, on pourra commencer par montrer qu'elle admet une valeur d'adhérence (Bolzano-Weierstrass), puis que celle-ci est unique (définition et inégalité triangulaire) avant de conclure.

## 3 Fonctions réelles, continuité de fonctions

### 3.1 Limite de fonctions réelles

**Définition 11.** Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle ( $D_f \subset \mathbb{R}$ ) et  $a \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **définie au voisinage** de  $a$  si  $\exists h > 0$  :

$$\begin{aligned} D_f \cap [a - h; a + h] \setminus \{a\} &= [a - h; a[ \text{ ("définie à gauche de a")} \\ &\text{ou } ]a; a + h] \text{ ("définie à droite de a")} \\ &\text{ou } [a - h; a + h] \setminus \{a\} \text{ ("définie autour de a").} \end{aligned}$$

On dit que  $f$  est **définie au voisinage** de  $+\infty$  si :

$$\exists A \in \mathbb{R} : [A; +\infty[ \subset D_f.$$

On dit que  $f$  est **définie au voisinage** de  $-\infty$  si :

$$\exists A \in \mathbb{R} : ]-\infty; A] \subset D_f.$$

**Définition 12.** Soit  $f$  une fonction réelle, et  $a \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  **tend vers 0 en a** si  $f$  est définie au voisinage de  $a$  et que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \epsilon$$

On dit que  $f$  **tend vers**  $l \in \mathbb{R}$  **en a** si  $f - l : x \mapsto f(x) - l$  tend vers 0 en  $a$ .

**Théorème 12** (Caractérisation séquentielle de la limite). *Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  un fonction réelle définie au voisinage de  $a$ .*

*Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- $f$  tend vers  $l$  en  $a$
- $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l.$

**Définition 13.** On dit que  $f$  est **continue en**  $a \in D_f$  si  $f$  tend vers  $f(a)$  en  $a$ .

Si  $D_f = I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est **continue** si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

On note  $\mathcal{C}(I)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .

On ne s'intéressera dans la suite qu'à des fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 13** (Quelques propriétés sur l'ensemble  $\mathcal{C}(I)$ ). *Soit  $f, g$  deux fonctions de  $\mathcal{C}(I)$ . Alors :*

- $\forall a \in \mathbb{R}, a.f : x \mapsto a.f(x)$  est une fonction de  $\mathcal{C}(I)$
- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  est une fonction de  $\mathcal{C}(I)$
- $f.g \in \mathcal{C}(I)$
- si  $\forall x \in I, g(x) \neq 0, \frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I)$
- $|f| \in \mathcal{C}(I)$

**Exercice d'application.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ . Montrer que  $\inf(f, g) : x \mapsto \inf(f(x), g(x))$  et  $\sup(f, g) : x \mapsto \sup(f(x), g(x))$  sont continues sur  $I$ .

**Lemme 14.** Soit  $f \in \mathcal{C}(I)$  et  $a, b \in I : a \leq b$ .  
Alors si  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ ,  $\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$ .

**Théorème 15** (Théorème des valeurs intermédiaires). Soit  $f \in \mathcal{C}(I)$  et  $a, b \in I : a \leq b$ .  
Alors toute valeur  $d \in [f(a); f(b)]$  est atteinte par la fonction  $f$  sur  $[a; b]$ .

**Exercice d'application.** On dit que  $f$  est **injective** si  $\forall x, y, f(x) = f(y) \implies x = y$ .  
Soit  $f \in \mathcal{C}(I)$  injective. Montrer que  $f$  est monotone.

## Complément : fonctions uniformément continues

**Définition 14.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ .  
On dit que  $f$  est **uniformément continue** sur  $I$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

**Remarque.** Une fonction uniformément continue est en particulier continue.

**Théorème 16** (Heine). Toute fonction continue sur un segment  $I = [a; b]$  est uniformément continue sur  $I$ .

**Exercice d'application.** Montrer qu'une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$  admettant une limite finie  $l$  en  $+\infty$  est uniformément continue.

## Exercices

### Exercice 1 : Moyenne de Cesàro

Soit  $u$  une suite réelle, et  $v$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n+1}$ .

a) On suppose dans un premier temps que  $u$  tend vers 0. Soit  $\epsilon > 0$ , montrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

b) Montrer que :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

c) Montrer que  $v$  tend vers 0.

d) Montrer que, si  $u$  tend vers  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $v$  est convergente, et tend vers le même réel  $l$ .

e) Qu'en est-il de la réciproque ?

### Exercice 2 : Fonction continue sur un segment

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

a) Montrer que l'image  $J = f(I)$  de  $f$  est un intervalle.

b) Si  $I$  est un segment  $[a; b]$ , montrer que  $f$  admet un minimum  $m$  et un maximum  $M$  sur  $I$ .  
Autrement dit,  $\exists (c, d) \in [a; b]^2 : \forall x \in [a; b], m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$ .

c) En déduire que, dans ce cas,  $f([a; b]) = [m; M]$ .

### Exercice 3 : Une démonstration alternative du théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée. On note  $\limsup(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{u_k | k \geq n\}$  et  $\liminf(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k | k \geq n\}$ .

- a) Soit  $v_n = \sup\{u_k | k \geq n\}$ . Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
De même,  $(v'_n = \inf\{u_k | k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. En déduire la cohérence des définitions de  $\limsup$  et de  $\liminf$
- b) Soit  $A$  un ensemble non vide et borné de  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que  $\sup A = -\inf(-A)$  où  $(-A) = \{-x | x \in A\}$ .  
En déduire que  $\limsup(-u) = -\liminf(u)$ .
- c) Montrer que  $\limsup(u)$  est une valeur d'adhérence de  $u$ .  
En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- d) De même qu'en c),  $\liminf(u)$  est une valeur d'adhérence de  $u$ .  
Montrer que si  $l$  est une valeur d'adhérence de  $u$ ,  $\liminf(u) \leq l \leq \limsup(u)$ .

### Exercice 4 : Définition pas à pas d'une fonction continue

- 1) Montrer que  $\mathbb{Q}$  est **dense** dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  et que tout élément de  $\mathbb{R}$  est limite d'une suite d'éléments de  $\mathbb{R}$ .
- 2) Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  telle que :  
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$
  - a) En vous aidant d'un raisonnement par récurrence, déterminer  $f$  sur  $\mathbb{Z}$  en fonction de  $f(1)$ .
  - b) Après avoir exprimé  $f(\frac{1}{q})$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $f$  sur  $\mathbb{Q}$ .
  - c) Déterminer  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .