PARIMATHS

Exercices sur les dérivées

Samedi 7 décembre 2013

1 Dérivées

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Calculer $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en 0, telles que $f(2x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Calculer la limite $\lim_{u \to 0} \frac{(\ln(u+1) - 1)(\exp(u) - 1)}{u^2}$.

Exercice 4. (Concours Général 2009, exercice 1) Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $(1 - f(x))/x^2$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a. On rappelle que tout $x \in [-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

1. (a) Vérifier que $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).
   (b) Montrer que, pour θ dans $[0, \pi/2]$, les relations $2\theta/\pi \leq \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leq 1 - \theta^2/\pi$.
2. Soit f une fonction solution du problème. On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel b, $f(x/2^n) = \cos(\theta_n)$ avec θ_n dans $[0, \pi]$.
   (a) Montrer que f est continue en 0 et que $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$.
   (b) Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $\theta_{n+1} = \theta_n/2$.
   (c) Établir que a est positif et que $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0. Trouver les limites $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(k/n)$ et $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(k/n^2)$.

2 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 6. Étudier la convergence des suites récurrentes suivantes

1. $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$,
2. $u_0 = 0, u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ avec $a \geq 0$,
3. $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$,
4. $u_0 = 0, u_{n+1} = e^{-u_n^2}$.

3 Suites récurrentes

Exercice 7. (Concours Général 1995, exercice 2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \geq 0$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

pour $n \geq 0$.

Exercice 8. (Concours Général 1992, exercice 4) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $0 < u_0 < 1$, $0 < u_1 < 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, la suite (u_n) est monotone (on ne demande pas de déterminer n_0 qui dépend des valeurs initiales u_0 et u_1).

4 Optimisation de fonctions

Exercice 9. (Concours Général 2005, exercice 3). On considère dans le plan trois points A_0, B, C non alignés.

1. On désigne par A_1 le centre du cercle inscrit dans le triangle A_0BC. On poursuit le processus en considérant A_2, centre du cercle inscrit dans le triangle A_1BC, etc. Ainsi, pour tout entier $i \geq 0$, A_{i+1} est le centre du cercle inscrit dans le triangle A_iBC. Démontrer qu'il existe un point A, limite de la suite (A_n), c'est-à-dire tel que AA_n tende vers A et préciser sa position.
2. Que devient le résultat précédent si, à chaque étape, pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ on prend pour A_{i+1} l'orthocentre du triangle A_iBC au lieu du centre du cercle inscrit ?

Exercice 10. (Concours Général 1996, exercice 4)

1. Soit la fonction f définie, pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = x^x$. Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs.
2. Soient x et y deux réels strictement positifs, montrer que $x^y + y^x > 1$.

Exercice 11. (Concours Général 1998, exercice 4, question 1). On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces droites. On considère deux points variables, A sur D_1, B sur D_2, tels que le point M appartienne au segment $[AB]$. Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale. Construire les points A et B ainsi déterminés.