

# PARIMATHS

## Exercices sur les dérivées

Samedi 7 décembre 2013

### 1 Dérivées

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $a$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ .

**Exercice 2.** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivables en 0, telles que  $f(2x) = 2f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Calculer la limite  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\ln(u+1) - 1)(\exp(u) - 1)}{u^2}$ .

**Exercice 4.** (Concours Général 2009, exercice 1) Le but de l'exercice est la recherche des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , vérifiant pour tout réel  $x$  la relation  $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ , telles que  $f(0) = 1$  et que  $(1 - f(x))/x^2$  admette une limite lorsque  $x$  tend vers 0, que l'on notera  $a$ . On rappelle que tout  $x \in [-1, 1]$  s'écrit de façon unique  $x = \cos(\theta)$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ .

- (a) Vérifier que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ . (On pourra utiliser une formule donnant  $\cos(2\alpha)$ ).
- (b) Montrer que, pour  $\theta$  dans  $[0, \pi/2]$ , les relations  $2\theta/\pi \leq \sin(\theta)$  et  $\cos(\theta) \leq 1 - \theta^2/\pi$ .
- Soit  $f$  une fonction solution du problème. On se donne un réel  $x$  et l'on pose, pour tout entier naturel  $b$ ,  $f(x/2^n) = \cos(\theta_n)$  avec  $\theta_n$  dans  $[0, \pi]$ .
  - Montrer que  $f$  est continue en 0 et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ .
  - Vérifier l'existence d'un entier  $N$  tel que pour  $n \geq N$  on ait  $\theta_{n+1} = \theta_n/2$ .
  - Établir que  $a$  est positif et que  $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en 0. Trouver les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(k/n)$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(k/n^2).$$

### 2 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

**Exercice 6.** Étudier la convergence des suites récurrentes suivantes

- $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ ,
- $u_0 = 0, u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$  avec  $a \geq 0$ ,
- $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$ ,
- $u_0 = 0, u_{n+1} = e^{-u_n^2}$ .

### 3 Suites récurrentes

**Exercice 7.** (Concours Général 1995, exercice 2) Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 \geq 0$  et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

pour  $n \geq 0$ .

**Exercice 8.** (Concours Général 1992, exercice 4) Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $0 < u_0 < 1$ ,  $0 < u_1 < 1$  et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}).$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ , la suite  $(u_n)$  est monotone (on ne demande pas de déterminer  $n_0$  qui dépend des valeurs initiales  $u_0$  et  $u_1$ ).

### 4 Optimisation de fonctions

**Exercice 9.** (Concours Général 2005, exercice 3). On considère dans le plan trois points  $A_0, B, C$  non alignés.

1. On désigne par  $A_1$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $A_0BC$ . On poursuit le processus en considérant  $A_2$ , centre du cercle inscrit dans le triangle  $A_1BC$ , etc. Ainsi, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $A_{i+1}$  est le centre du cercle inscrit dans le triangle  $A_iBC$ . Démontrer qu'il existe un point  $A$ , limite de la suite  $(A_n)$ , c'est-à-dire tel que  $AA_n$  tende vers  $A$  et préciser sa position.
2. Que devient le résultat précédent si, à chaque étape, pour  $i = 0, 1, 2, \dots$  on prend pour  $A_{i+1}$  l'orthocentre du triangle  $A_iBC$  au lieu du centre du cercle inscrit ?

**Exercice 10.** (Concours Général 1996, exercice 4)

1. Soit la fonction  $f$  définie, pour tout réel  $x$  strictement positif, par  $f(x) = x^x$ . Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque  $x$  décrit l'ensemble des réels strictement positifs.
2. Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs, montrer que  $x^y + y^x > 1$ .

**Exercice 11.** (Concours Général 1998, exercice 4, question 1). On considère deux droites  $D_1$  et  $D_2$  sécantes en  $O$ , et un point  $M$  n'appartenant à aucune de ces droites. On considère deux points variables,  $A$  sur  $D_1$ ,  $B$  sur  $D_2$ , tels que le point  $M$  appartienne au segment  $[AB]$ . Montrer qu'il existe une position des points  $A$  et  $B$  pour laquelle l'aire du triangle  $OAB$  est minimale. Construire les points  $A$  et  $B$  ainsi déterminés.