# Inégalités 2.

*Mikhail Isaev*
Isaev.M.I@gmail.com
09/11/2013

**Partie 1. L'usage des inégalités entre les moyennes.**

Montrer que :

1) $2(a^4+b^4)+16 \geq 16ab.$

2) $\sqrt{6a_1+1}+\sqrt{6a_2+1}+\sqrt{6a_3+1}+\sqrt{6a_4+1}+\sqrt{6a_5+1} \leq \sqrt{55}$
où $a_1,\ldots,a_5 \geq 0$ et $a_1+\ldots+a_5=1.$

3) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$ où $a,b>0$ et $a+b=1.$

4) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$

5) $6a+4b+5c \geq 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$ où $a,b,c \geq 0.$

6) $(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c) \leq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ où $a,b,c,d>0.$

7) $\cos^3 t \sin t \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$

8) $x^2+y^2 \geq 2\sqrt{2}(x-y)$ où $xy=1.$

9) $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ où $a,b,c$ sont les côtés d'un triangle.

10) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}.$

11) $\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3} \leq \sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}$ où $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3>0.$

12) $n(n+1)^{1/n} < n+S_n$ où $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},\ n=2,3,4,\ldots$

13) Trouver toutes les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\ldots+\sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}, \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}. \end{cases}$$

**Partie 2. Les problèmes à résoudre indépendamment.**

1) Trouver toutes les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$$

Montrer que

2) $\sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$ où $n=2,3,4,\ldots$

3) $\dfrac{\log(a-1)}{\log a} < \dfrac{\log a}{\log(a+1)}$ où $a>1$.

4) $abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ où $a,b,c>0$.

5) $\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)^2 \geq \dfrac{(n^2+1)^2}{n}$
où $x_1,\ldots,x_n \geq 0$ et $x_1+\ldots+x_n=1$.

6)

$$\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}+\ldots+\sqrt[n]{k_1\ldots k_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1+\ldots+k_1)(a_2+b_2+\ldots+k_2)\ldots(a_n+b_n+\ldots+k_n)}$$

où $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,\ldots,k_1,\ldots,k_n,>0$.

7) $n-S_n > \dfrac{n-1}{n^{1/(n-1)}}$ où $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n},\ n=3,4,\ldots$

8) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ où $n\in\mathbb{N}$.

9) $na^k-ka^n \leq n-k$ où $n>k,\ n,k\in\mathbb{N},\ a>0$.

10) $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$ où $a,b,c>0$.