Théorème de Charkovsky et suite logistique
Parimaths - niveau débutant

Florian Danard

16 novembre 2013

1 Mise en bouche

1.1 Composition

Définition Soient f et g deux fonctions de I dans I avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit $f \circ g$ comme :

$$f \circ g : \begin{cases} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & f(g(x)) \end{cases}$$

1- Exprimer $f \circ g$ dans les cas suivants :
a) $f(x) = x^n$, $g(x) = cos(x)$
b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x^2$

2- Exprimer f^n dans les cas suivants :
a) $f(x) = x + 1$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Définition Une fonction f de I dans F est dite continue si pour tout point a de I on a $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Théorème 1.1. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I alors l'image par f de I, $f(I) = \{y | y = f(x) \ pour \ x \ \in I\}$, est aussi un intervalle.*

3- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et dont la différence change de signe sur cette intervalle. Montrer que f et g sont égales en un point de I.

1.3 Récurrence

4- Montrer par récurrence sur n que $\sum_{k=0}^{n} 2k - 1 = n^2$ pour $n \geqslant 1$.

2 Théorème de Charkovski, première partie

Dans cette partie on va chercher à démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *On définit l'ordre de Charkovski sur les entiers naturels non nuls comme suit :* $3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec ... \prec 2 \times 3 \prec 2 \times 5 \prec 2 \times 7 \prec ... \prec 2^2 \times 3 \prec 2^2 \times 5 \prec 2^2 \times 7 \prec ... \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$
Alors, si f est une fonction continue de I dans I et si f a un point m-périodique, quelque soit n, $m \prec n$, f a un point n-périodique.

Dans la suite on considère une fonction f de I dans I continue à valeurs réelles.

2.1 Quelques lemmes

5- Prouver le lemme 1 :

Lemme 2.2. *Si $f^m(x_0) = x_0$ alors la plus petite période du point x_0 divise m.*

6- Prouver le lemme 2 :

Lemme 2.3. *Si J est un sous-intervalle fermé de I tel que $J \subset f(J)$ alors f a un point fixe dans J.*

7- Prouver le lemme 3 :

Lemme 2.4. *Soient J et L deux sous-intervalles fermés de I tel que $L \subset f(J)$. Alors il existe un sous-intervalle fermé K de J tel que $f(K) = L$.*

Définition On appelle cycle de longueur n une suite de J_0, ..., J_{n-1}, J_n d'intervalles tel que :
- $J_0 = J_n$
- tous les J_i sont fermés
- on a pour tout i compris entre 0 et $n-1$, $J_{i+1} \subset f(J_i)$

8- Prouver le lemme 4 en utilisant les deux lemmes précédents :

Lemme 2.5. *Si $J_0 J_1 ... J_{n-1} J_0$ est un cycle de longueur n alors il existe un point y tel que :*
- $f^i(y) \in J_i$ pour i compris entre 0 et $n-1$
- $f^n(y) = y$

2.2 Un premier résultat

Dans cette partie nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 2.6. *Si f a un point de période m, $m \geqslant 3$ impair, alors f a un point de période $m+2$.*

Pour cela on considère f qui admet un point de période m impair. Notons $P = \{x_1, ..., x_n\}$ l'orbite de ce point où $x_1 < x_2 < ... < x_n$.
On définit $x_s = max\{x \in P \ : \ f(x) > x\}$.

9- Montrer que x_s existe, que $s < m$ et que f admet un point fixe dans l'intervalle $[x_s, x_{s+1}]$. On notera z ce point fixe.

10- Supposons que pour i compris entre 1 et $m-1$, i différent de s, on a $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$ sont du même côté de z.
a) Montrer alors que $[x_{s+1}, x_m] \subset f([x_1, x_s])$ et que $[x_1, x_s] \subset f([x_{s+1}, x_m])$.
b) En déduire que f a un point de période 2. (On pourra appliquer les lemmes précédents)
c) Montrer que quand m est impair la supposition effectuée en question 10- est fausse.

11- Exprimer la négation de la supposition effectuée en question 10-.

12- On suppose maintenant que l'hypothèse faite en question 10- est fausse, on nomme x_t un point tel que $f(x_t)$ et $f(x_{t+1})$ soient chacun d'un coté de z avec t différent de s.
a) Montrer que $[x_s, x_{s+1}] \subset f([x_t, x_{t+1}])$.
Dans la suite on suppose que $x_t \leqslant x_s$. Soit q le plus petit entier positif tel que $f^q(x_s) \leqslant f(x_t)$
b) Prouver que $q \leqslant m-1$
b) On pose $J_i = [z, f^i(x_s)]$. Pour tout $n \geqslant m+1$ montrer que $J_0 J_1 ... J_{q-1}[x_t, x_{t+1}]([x_s, x_{s+1}])^{n-q-1} J_0$ est un cycle de longueur n, en déduire que f a un point de période n.

2.3 Fin de la preuve

On admet que, en utilisant des raisonnements très similaires à ceux vu dans la partie précédente, on peut démontrer les deux résultats suivants :

Théorème 2.7. *Si f a un point de période m, $m \geqslant 3$, alors f a un point de période 2.*

Théorème 2.8. *Si f a un point de période m, $m \geqslant 3$ impair, alors f a un point de période 6 et un point de période $2m$.*

13- Montrer le lemme suivant :

Lemme 2.9. *Si x_0 est un point périodique pour f de période m alors c'est un point périodique pour f^n de période $\frac{m}{PGCD(m,n)}$.*

14- En déduire le lemme :

Lemme 2.10. *Si x_0 est un point périodique pour f^n de période k alors c'est un point périodique pour f de période au moins $\frac{kn}{s}$ où s divise n et $PGCD(s,k) = 1$.*

15- Conclure.

3 Théorème de Charkovski, seconde partie

Dans cette partie on se propose de montrer que les hypothèses du théorème de Charkovski sont les plus fortes possibles, c'est-à-dire que :

Théorème 3.1. - *Pour tout entier n positif, il existe une fonction f qui a un point de période n mais aucun point de période m pour m quelconque, $m \prec n$.*

- Il existe une fonction continue f qui a des points de période 2^i pour i entier mais qui n'admet aucun point d'aucune autre période.

Pour cela on va se limiter au cas où $I = [0, 1]$. On considère la fonction T de I dans I telle que $T(x) = 1 - |2x - 1|$.

16- Faire une représentation graphique de la fonction T.

17- Étudier les points fixes de T^n pour n entier positif.

18- Définir le diamètre d'une orbite.

Soit P_n une n-orbite de T de plus petit diamètre. On définit l'application T_n sur I par : $T_n(x)$=min P_n si $x \leqslant$ min P_n, $T_n(x)$=max P_n si $x \geqslant$ max P_n et $T_n(x) = T(x)$ sinon.

19- Vérifier que T_n a une orbite de diamètre n mais n'admet aucune orbite de diamètre m pour $m \prec n$.

20- En s'inspirant de la question 19- prouver la deuxième partie du théorème.