Préliminaires

1° Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall t \geqslant 0$, $\forall n$ entier strictement positif

$$\int_0^t g(s)\left\{\int_0^s g(u)\,\mathrm{d}u\right\}^n \mathrm{d}s = \frac{1}{n+1}\left\{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right\}^{n+1}.$$

(On pourra dériver chacun des deux membres considéré comme fonction de la variable t.)

2° Soit f, g, u trois fonctions continues, définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall t \geqslant 0, \quad u(t) \leqslant f(t) + g(t)\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

On désigne par $v(t)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$v(t) = \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s,$$

et par w la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$w(t) = v(t) \exp\left[-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

a) Montrer que $v'(t) \leqslant f(t) + v(t)\,g(t)$.

b) On suppose que $\forall t \geqslant 0,\ g(t) = a$.
Montrer que $w'(t) \leqslant e^{-at} f(t)$. En déduire

$$w(t) \leqslant \int_0^t e^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad v(t) \leqslant \int_0^t f(s)\, e^{a(t-s)}\,\mathrm{d}s.$$

c) g étant quelconque, montrer que

$$w'(t) \leqslant f(t) \exp\left[-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right]$$

puis que

$$v(t) \leqslant \int_0^t f(s) \left\{\exp \int_s^t g(x)\,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}s.$$

d) Trouver les fonctions u, continues, ne prenant que des valeurs positives ou nulles telles que

$$\forall t \geqslant 0, \quad u(t) \leqslant g(t) \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

3° Soit u et Φ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.
On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} \mathrm{U}(t) = \displaystyle\int_0^t u(t-s)\,\Phi(s)\,\mathrm{d}s, & \forall t > 0 \\ \mathrm{U}(0) = 0. \end{cases}$$

a) On suppose que u et Φ sont à valeurs positives ou nulles.
En écrivant, pour $t' > t$,

$$\mathrm{U}(t') - \mathrm{U}(t) = \int_0^t \{u(t'-s) - u(t-s)\}\,\Phi(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^{t'} u(t'-s)\,\Phi(s)\,\mathrm{d}s$$

montrer que si u est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors U est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer la continuité de U au point $t = 0$.
Soit $t_0 > 0$ et $t \in [t_0, 2t_0]$. On pose

$$\mathrm{M} = \mathrm{Sup}\{|u(t)|;\quad t \in [0, 2t_0]\}$$
$$\mathrm{M}^* = \mathrm{Sup}\{|\Phi(t)|;\quad t \in [0, 2t_0]\}.$$

Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que

$$|t - t_0| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{U}(t) - \mathrm{U}(t_0)| \leqslant \varepsilon t_0 \mathrm{M}^* + (t - t_0)\,\mathrm{M}\mathrm{M}^*.$$

(On pourra utiliser l'uniforme continuité de u.)
En déduire que U est continue à droite au point t_0.
Montrer la continuité de U sur $\mathbb{R}^+$.

Notations

Dans tout le problème, f désigne une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \quad |f(t)| \leqslant c;$$

Φ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

On note g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \forall s \leqslant t, \quad |\Phi(s)| \leqslant g(t).$$

On considère l'équation (E)

$$\text{(E)} \qquad u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-s)\,\Phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Vérifier que (E) peut s'écrire

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(s)\,\Phi(t-s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Résoudre le problème (E) consiste à trouver une fonction u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

(1) u est continue;

(2) u vérifie (E).

I

Étude de quelques exemples

1° Soit l'équation (E_1) correspondant à (E) avec $f(t) = 5 \cos t$ et $\Phi(s) = s$.

a) Montrer que si u continue vérifie (E_1), u est deux fois différentiable et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.

b) Soit u continue vérifiant (E_1). Calculer $u(0)$ et $u'(0)$.

c) Résoudre le problème (E_1).

2° *a*) Soit (E_2') correspondant à (E) avec $f(t) = 1$ et $\Phi(s) = ae^{-s}$ où a est une constante strictement positive.

Résoudre le problème (E_2').

Quel est le comportement de la solution continue de (E_2') au voisinage de $+\infty$?

b) Soit (E_2) correspondant à (E) avec $f(t) = te^{-t}$ et $\Phi(s) = e^{-s}$.

Résoudre le problème (E_2).

3° Soit (E_3) correspondant à (E) avec $f(t) = 0$ et $\Phi(s) = \sin s$.

Résoudre le problème (E_3).

II

On étudie dans cette partie l'existence et l'unicité des solutions continues de (E)

1° Soit u_1 et u_2 deux solutions continues de (E).

Montrer que

$$\forall t \geqslant 0, \quad |u_1(t) - u_2(t)| \leqslant g(t) \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| \, \mathrm{d}s.$$

En déduire que

$$\forall t \geqslant 0, \quad u_1(t) = u_2(t).$$

Retrouver ainsi la solution continue de (E_3).

2° On construit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$u_0(t) = f(t),$$

$$u_{n+1}(t) = f(t) + \int_0^t u_n(t-s) \Phi(s) \, \mathrm{d}s.$$

a) Montrer que les fonctions u_n sont continues.

Soit f monotone croissante positive et Φ positive; montrer que u_n est une fonction monotone croissante, ceci pour tout entier n.

b) Soit $t_0 > 0$.
Vérifier que $\forall t \in [0, t_0]$, $|u_1(t) - u_0(t)| \leqslant c g(t) t_0$.
Montrer que

$$\forall t \geqslant 0, \quad |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leqslant g(t) \int_0^t |u_n(s) - u_{n-1}(s)| \, ds$$

puis que

$$\forall t \in [0, t_0], \quad |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leqslant c t_0 \frac{g(t)}{n!} \left\{ \int_0^t g(s) \, ds \right\}^n.$$

(On utilisera la question 1 des préliminaires.)

c) Soit $v_n(t) = u_{n+1}(t) - u_n(t)$.
Montrer que la *série* de terme général $v_n(t)$ converge absolument, pour tout $t \geqslant 0$.
Montrer que la *suite* de terme général $u_n(t)$ converge pour tout $t \geqslant 0$ vers une limite que l'on notera $u(t)$.

d) Montrer que

$$\forall t \in [0, t_0], \quad |u(t) - u_n(t)| \leqslant c t_0 g(t) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$$

où

$$\alpha = \int_0^{t_0} g(t) \, dt.$$

En déduire que l'on peut résoudre le problème (E).

III

Soit l'équation (E'), cas particulier de (E) :

(E') $$u(t) = 1 + \int_0^t u(t-s) \Phi(s) \, ds \quad \forall t \geqslant 0$$

où Φ est positive et $0 < \int_0^{\infty} \Phi(s) \, ds = b < 1$.

1° On construit (comme en II 2°) la suite de fonctions $(u_n)_{n \geqslant 0}$

$$\begin{cases} u_0(t) = 1 \\ u_n(t) = 1 + \int_0^t u_{n-1}(t-s) \Phi(s) \, ds. \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \geqslant 0$, u_n est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Soit a_n la suite définie par $a_0 = 1$

$$a_{n+1} = 1 + b a_n.$$

Déterminer explicitement la suite a_n et montrer qu'elle converge.

Soit $v_n = \sup_{t \geq 0} |u_n(t)|$. Montrer que $v_{n+1} \leq 1 + bv_n$, que $v_n \leq a_n$ et que la suite v_n est majorée.

En déduire que la solution continue de (E′) est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2° Montrer que u, solution continue de (E′) est monotone croissante.

En déduire que $\lim_{t \to \infty} u(t)$ existe. On note $u(\infty)$ cette limite.

Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tel que

$$t > A \implies \left| \int_0^t u(t-s)\Phi(s)\,ds - bu(\infty) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^A \{u(\infty) - u(t-s)\}\Phi(s)\,ds.$$

En déduire que la limite de $\int_0^t u(t-s)\Phi(s)\,ds$ lorsque $t \longrightarrow \infty$ est $bu(\infty)$.

Exprimer $u(\infty)$ en fonction de b. Vérifier les résultats trouvés sur l'équation (E_2').

exercice pour ceux qui ont fait tout ce qui précède.

Soit P une partie non vide de $\mathbb{N}$ stable par addition. Montrer qu'il existe $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$P \cap [n, +\infty[= k\mathbb{N} \cap [n, +\infty[.$$

Partie III.

L'inégalité : $0 < \int_0^{+\infty} \Phi(s)\,ds = b < 1.$

$\int_0^{+\infty} \Phi(s)\,ds$ signifie que la fonction $t \to \int_0^t \Phi(s)\,ds$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $t \to +\infty$ et.

cette limite est notée $\ell = \int_0^{+\infty} \Phi(s)\,ds$.