— I —

$\mathbb{R}[X]$ étant l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on désigne par E le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ ayant pour éléments les polynômes P tels que :

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 0$$

On appellera D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme P sa dérivée P', et d la restriction de D à E.

a) 1) Montrer que d est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$. On désignera par ϕ l'isomorphisme réciproque : $\phi = d^{(-1)}$.

2) Vérifier que pour tout élément Q de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = \phi(Q)$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt + \int_0^1 \underset{u}{(t-1)}\ \underset{v'}{Q(t)}\,dt \ .$$

b) On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad B_{n+1} = \phi\,(B_n) \ .$$

1) Expliciter B_1 et B_2.

2) Vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a : $B_n(0) = B_n(1)$.

c) A tout n de $\mathbb{N}$ on associe le polynôme P_n défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad , \quad P_n(x) = (-1)^n\, B_n(1-x) \ .$$

1) Pour tout n non nul exprimer P'_{n+1}, en fonction de P_n.

2) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P_{n+1} = \phi\,(P_n)$.

3) En déduire l'expression de $B_n\,(1-x)$ en fonction de $B_n\,(x)$.

d) Dans cette question, p est un entier naturel non nul. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+j}{p}\right) = Q_n\,(x) \ .$$

1) Montrer que : $Q_{n+1} = \phi\,(Q_n)$.

2) En déduire que l'on a, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad , \quad B_n(x) = p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+j}{p}\right) \ .$$

e) A tout n de $\mathbb{N}$ on associe le polynôme R_n défini par :

$$R_n = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) .$$

1) Démontrer que l'on a pour tout n : $\forall x \in \mathbb{R} \; , \; R_{n+1}(x) = \int_0^x R_n(t)\, dt$.

2) Déterminer le polynôme R_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3) En déduire que, pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs on a :

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = n!\,\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1) \right) .$$

– II –

Les notations restant celles de la partie I, on pose : $B_n(0) = b_n$.

a)

1) Démontrer que l'on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \frac{x^j}{j!}$.

2) En déduire que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; , \; b_n = - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n-j}}{(j+1)!} \; , \text{ avec } b_0 = 1 \; .$$

3) Montrer que, pour tout k entier naturel, on a $b_{2k+1} = 0$.

$k \geqslant 1$

b) Utilisant le résultat de I.d), donner les expressions en fonction n et b_n de :

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) \; ; \; B_n\left(\frac{1}{3}\right) \; ; \; B_n\left(\frac{1}{4}\right) \; ; \; B_n\left(\frac{1}{6}\right) .$$

c) On se propose de démontrer que, pour tout entier m strictement positif B_{2m} a exactement un zéro sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, que l'on appellera θ_m.

1) Vérifier qu'il existe dans $\mathbb{N}^*$ au moins un nombre m tel que la fonction $x \mapsto (-1)^m B_{2m-1}(x)$ soit strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

2) Soit m un tel nombre. Etudier les variations de $(-1)^m B_{2m}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et déterminer le nombre des zéros de B_{2m} sur cet intervalle.

3) De cette étude déduire que $(-1)^{m+1}\ B_{2m+1}(x)$ est strictement positif sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

4) Justifier alors la proposition énoncée au début de la question.

5) Vérifier que, quel que soit m, θ_m appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right[$.

d)

1) Calculer pour tout m la borne supérieure de $|B_{2m}(x)|$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2) En déduire que : $\sup\limits_{[0,1]} |B_{2m}(x)| = |b_{2m}|$.

Exercices

1. (a) Etudier la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

   (b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $P_n(x)=x^n+x-1$ a une unique racine notée α_n dans $]0,1[$.

   (c) Etudier la suite (α_n).

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1}=\sin(u_n)$.

   (a) Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

   (b) On définit la suite
   $$v_n=\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}.$$
   Montrer que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$.
   On rappelle que $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)$ où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

   (c) Montrer que $u_n=\sqrt{\dfrac{3}{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}w_n$ où w_n est une suite qui tend vers 0 (soit $\dfrac{1}{\sqrt{n}}w_n=o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$).

3. (a) On considère la suite $u_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\dfrac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel n non nul. Montrer que (u_n) converge. (on pourra utiliser la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$).
   Par la suite on pourra utiliser que $\lim u_n=\dfrac{\pi^2}{6}$.

   (b) Soit f la fonction $x\mapsto x^a\ln x$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$ prolongée par continuité en 0.
   Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt$ et calculer cette intégrale.

   (c) Montrer que la fonction définie pour tout entier n par : $g_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^+$. On appelera h_n le prolongement en question.

   (d) Montrer que si $0\le x\le 1$ alors $0\le h_n(x)\le\dfrac{1}{2}$.

   (e) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,dt$. Calculer $I_{n+1}-I_n$.

   (f) Etudier la suite (I_n).

   (g) En déduire la valeur de I_0

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
   Soit $\alpha\in[0,1[$.
   Montrer que f est uniformément continue sur $]\alpha,1[$ si et seulement si $\alpha\neq 0$.