Exercice 1

Soit (x_n) une suite réelle. On définit la suite (y_n) par :

$$y_n = 2x_n + x_{n-1}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge si et seulement si la suite (y_n) converge. (pour le sens non trivial on pourra d'abord se ramener à une suite tendant vers 0 puis essayer d'exprimer x_n à l'aide des y_k).

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tende vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un intervalle.
2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On suppose que la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Montrer que la suite est convergente. (On pourra utiliser qu'une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence est convergente).

Problème I

Soit $[a,b]$ ($a < b$) un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle subdivision de $[a,b]$ toute famille $\sigma = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. A toute application f de $[a,b]$ et à toute subdivision σ de $[a,b]$, on associe le réel :

$$V_a^b(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

et on dit que f est à variation bornée sur $[a,b]$ si l'ensemble $\{V_a^b(f,\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}\}$ est majoré. Dans ce cas, on note $V_a^b(f) = \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{S}} V_a^b(f,\sigma)$.
Si $a = b$, on convient que $V_a^b(f) = 0$.

1. Montrer que toute fonction monotone sur $[a,b]$ est à variation bornée sur $[a,b]$.
2. La somme de deux fonctions à variation bornée sur $[a,b]$ est-elle à variation bornée sur $[a,b]$? Si oui, comparer $V_a^b(f+g)$ et $V_a^b(f) + V_a^b(g)$.
3. Le produit de deux fonctions à variation bornée sur $[a,b]$ est-elle à variation bornée sur $[a,b]$?
4. L'ensemble des fonctions à variations bornées sur $[a,b]$ peut-il être muni d'une structure d'anneau ?
5. L'ensemble des fonctions à variations bornées sur $[a,b]$ peut-il être muni d'une structure de corps ?
6. Montrer que si f est à variation bornée sur $[a,b]$ et si $|f|$ est minorée par un réel $\delta > 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est à variation bornée sur $[a,b]$.
7. Soit f une fonction à variation bornée sur $[a,b]$. Montrer que pour tout couple $(x,y) \in [a,b]^2$ avec $x < y$, on a :
$$V_a^y(f) \geq V_a^x(f) + V_x^y(f).$$
(on oubliera pas de justifier l'existence de $V_a^x(f)$ et de $V_x^y(f)$.)
8. Montrer que si f est à variation bornée sur $[a,b]$ alors les fonctions $f_1 : x \mapsto V_a^x(f)$ et $f_2 = f_1 - f$ sont croissantes.
9. En déduire qu'une application f est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si elle est la différence de deux fonctions croissantes.

Problème II

Partie I

On dit qu'un groupe G est ordonné s'il existe une relation d'ordre $(\leq)$ dans G tel que :

$$\forall c \in G\ ,\ a \leq b \Longrightarrow ac \leq bc \text{ et } ca \leq cb$$

On dit qu'il est strictement ordonné si de plus :

$$\forall c \in G\ ,\ a < b \Longrightarrow ac < bc \text{ et } ca < cb.$$

Dans toute la suite, l'élément neutre du groupe sera noté e.

1. Montrer qu'un groupe ordonné est strictement ordonné.
2. On appelle cône positif d'un groupe ordonné la partie $P = \{x \in G \mid x \geq e\}$ et on désigne par P^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de P.
   (a) Montrer $P \cap P^{-1} = \{e\}$ puis $PP \subset P$, $(PP = \{z \in G \mid \exists (x,y) \in P^2\ :\ z = xy\})$
   (b) Montrer que $\forall a \in G\ ,\ a^{-1}Pa \subset P$. $(a^{-1}Pa = \{x \in G \mid \exists y \in P\ :\ x = a^{-1}ya\})$
   (c) Montrer que si l'ordre est total, on a de plus $P \cup P^{-1} = G$.
3. Réciproquement soit G un groupe possédant une partie P vérifiant $P \cap P^{-1} = \{e\}$, $PP \subset P$ et $\forall a \in G\ ,\ a^{-1}Pa \subset P$.
   Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par
   $$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow ba^{-1} \in P$$
   est une relation d'ordre sur G qui fait de G un groupe ordonné et que pour tout $x \in G$, on a $e\mathcal{R}x$ si et seulement si $x \in P$. Montrer que si de plus $P \cup P^{-1} = G$ alors l'ordre est total.
4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de la relation d'ordre lexicographique est un groupe totalement ordonné. Décrire P.
5. Le groupe $\mathbb{R}^2$ muni de la relation d'ordre produit est-il un groupe ordonné ? Si oui, décrire P.

Partie II

On dit qu'un groupe G muni d'une relation d'ordre est archimédien si :

$$\forall x > e\ ,\ \forall y > e\ :\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ x^n > y \quad (*).$$

1. Le groupe $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre lexicographique est-il archimédien ?
2. Le groupe $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit est-il archimédien ?

   Dans la suite on considère un groupe G totalement ordonné et archimédien.
   On veut montrer que G est commutatif.

3. Montrer que pour tout x et y dans G avec $x > e$ et $y > e$, il existe un unique entier naturel q tel que $x^q \leq y < x^{q+1}$. $x^q \leq y < x^{q+1}$ $x^p \leq y < x^{p+1}$ x^p
4. On suppose que $P - \{e\}$ a un plus petit élément que l'on note a. Montrer que pour tout $x > e$ dans G, si $a^q \leq x < a^{q+1}$ avec $q \in \mathbb{N}$, alors $x = a^q$.
   En déduire que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ donc est commutatif.
5. On suppose que $P - \{e\}$ n'a pas de plus petit élément.
   (a) Montrer que pour tout $c > e$, il existe $d > e$ tel que $d^2 \leq c$.
   (b) Soit $(a,b) \in G^2$ et $c = a^{-1}b^{-1}ab$. On veut montrer que $c = e$.
   On suppose $a > e$, $b > e$ et $c \geq e$, montrer que l'hypothèse $c > e$ conduit à une contradiction.
   Conclure puis montrer que G est commutatif.