Correction DS

Exercice 1

On obtient $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_0 - \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} y_k$.

On écrit $y_n - 3\ell = 2(x_n - \ell) + (x_{n-1} - \ell)$ et on se ramène à $\ell = 0$.

puis soit $\varepsilon > 0$.

$\exists N$ tq $n \geq N \Rightarrow \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n x_0\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

$\exists N'$ tq $n \geq N' \Rightarrow |y_k| \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

et $\left|\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} y_k\right| \leq \left|\sum_{0}^{N'-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} y_k\right| + \left|\sum_{N'}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} y_k\right|$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\sum_{k=0}^{N'-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} y_k\right|}_{\text{tend vers } 0 \text{ avec } n.} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{6} \sum_{N'}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{< \varepsilon/3}.$$

Exercice 2

a) soient $a < b$ 2 valeurs d'adhérence. et $a < c < b$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists N'$ tq $n \geq N' \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$

a est v.a donc : $\exists q \geq \max(N, N')$ tq $u_q \leq c - \varepsilon$

b est v.a donc $\exists r \geq \max(N, N', q)$ tq $u_r \geq c + \varepsilon$.

soit $\{k \,/\, q \leq k \leq r \,/\, u_k \leq c - \varepsilon\}$

et m le plus grand élément de cet ensemble.

alors u_{m+1} n'est pas dans $]-\infty, c-\varepsilon[$, ni dans $]c+\varepsilon, +\infty[$

donc $u_{m+1} \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.

On a montré : $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $|u_m - c| < \varepsilon$.

donc c est v.a.

b) On montre que u a une seule v.a

Soit ℓ une v.a. $u_{\varphi(n)} \to \ell$ $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \to f(\ell)$

or $u_{n+1} - u_n \to 0$ donc $u_{\varphi(n)+1} \to \ell$ donc $f(\ell) = \ell$.

supposons qu'il y ait 2 va $\ell_1 < \ell_2$.

il existe un terme de la suite u_p avec $\ell_1 \leq u_p \leq \ell_2$

u_p est v.a donc point fixe et la suite devient stationnaire. donc ℓ_1 et ℓ_2 ne peuvent être v.a.

Problème 1

1.) si f est $\nearrow$.

$V_a^b(f,\sigma) = f(b) - f(a)$

2.) $V_a^b(f+g,\sigma) \leq V_a^b(f,\sigma) + V_a^b(g,\sigma) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$.

puis passer au sup.

3.) $|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \leq |f(x_i)|\,|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})|\,|f(x_i) - f(x_{i-1})|$

On montre que si f est à variation bornée alors f est bornée.

soit $x \in]a,b[$ et $\sigma = (a,x,b)$.

$V_a^b(f,\sigma) = |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \leq V_a^b(f)$.

et $2|f(x)| - |f(b)| - |f(a)| \leq V_a^b(f)$.

4.) oui

5.) non : $\frac{1}{f}$ pas forcément définie.

6.) comme : $\left|\frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_{i-1})}\right| \leq \frac{|f(x_{i-1}) - f(x_i)|}{\delta^2}$

7.) Existence de $V_a^x(f)$.

Soit σ subdi. de $[a,x]$ alors : $\sigma = a, x_1 \ldots x_n = x$.

et $\sigma' = a, x_1 \ldots, x, b$ une subdivision de $[a,b]$

donc $|f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(x) - f(x_{n-1})| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f)$.

et donc $\{V_a^x(f,\sigma)\}$ est majoré par $V_a^b(f) - |f(b) - f(x)|$.

Pour montrer que $V_a^y(f) \geq V_a^x(f) + V_x^y(f)$.

soit σ subd. de $[a,x]$ et $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ (Wot évidente).

σ' ——— $[x,y]$

alors : $V_a^x(f,\sigma) + V_x^y(f,\sigma') \leq V_a^y(f)$.

puis passer proprement au sup.

8.) $f_1 \nearrow$ clair

$f_2 \nearrow$: $f_1(x) - f(x) \leq f_1(y) - f(y)$.

$\Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq V_x^y(f)$.

il suffit de prendre $\sigma = (x,y)$.

9.) un sens vient du 8.)

d'autre du fait que la différence de 2 fonctions à variation bornées est à variation bornée.

Problème II Partie I

1.) Si G est ordonné.
soit $a<c$. si : $ac = bc$ alors en multipliant par c^{-1} on aurait $a = b$. De même pour $ca<cb$.

/ Soit $x \in P \cap P^{-1}$ alors $x \geq e$ et $x^{-1} \geq e$ en multipliant par x, on a. $e \geq x$ puis $x = e$.
$P \cap P^{-1} \subset \{e\}$ et $\{e\} \subset P \cap P^{-1}$ évident.
$PP \subset P$. si $x \in P$ et $y \in P$ alors $x \geq e$ d'où $xy \geq y \geq e$ et donc $xy \in P$.

Soit $x \in a^{-1}Pa$, alors $x = a^{-1}ya$ avec $y \geq e$.
en multipliant par a^{-1} et a on a : $x \geq e$.

) Soit $x \in G$ alors x et e sont comparables donc $x \geq e$ ou $x \leq e$
et donc $x \geq e$ ou $x^{-1} \geq e$.

/ R est reflexive, en effet : $e \in P$ donc aRa.
R est transitive. si aRb alors $ba^{-1} \in P$. si bRc — $cb^{-1} \in P$. puis $ca^{-1} \in P$. et donc aRc.

R est antisymétrique [illegible] alors $xx^{-1} \in P \cap P^{-1}$ et $x = y$.

[illegible] $\in G$ $xx^{-1} \in P$.
soit $(x, y) \in G^2$ alors : $yx^{-1} \in P$ ou $yx^{-1} \in P^{-1}$.
et donc xRy ou $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1} \in P$ et yRx.

1.) c'est bien un groupe totalement ordonné.
$P = \{(a,b)$ tq $(a,b) \geq (e,0)\}$.
soit $a > e$ ou $a = e$ et $b \geq e$.
/ $P = \{(a,b)$ $a \geq e$ et $b \geq 0\}$.

Partie II.
/ oui : $n(0,1)$ — $(1,0)$
/ non : $n(0,1)$ ne peut être plus grand que $(1,0)$
/ $\{k$ tq $x^k > y\}$ le plus petit élément de cet ensemble est noté $q+1$.
alors on a $x^{q+1} > y$ et $x^q \leq y$.

[illegible] $\Rightarrow$ $e \leq [illegible] < a$ donc $xa^{-q} \in P$ si $xa^{-1} \neq e$
impossible donc $x = a^q$
[illegible] φ [illegible] (a, e) sur $(G, \ast)$.
[illegible] $\geq a^{q}$.
[illegible], [illegible] $(a \in P - \{e\} \Rightarrow a > e$ puis par [illegible] $a^n > e$.
$\exists x$ tq $e < x < c$. Si $x^2 \leq c$ On prend $d = x$.
Sinon $x^2 > c$ alors : $x^{-1}c.x^{-1}c \leq c$

S: On suppose $a > e$ et $b > e$

si $c > e$ il existe $d > e$ avec $d^2 \leq c$

alors $d^n \leq a < d^{n+1}$ et

$d^p \leq b < d^{p+1}$

et $d^{-n-1} < a^{-1} \leq d^{-n}$.

$d^{-p-1} < b^{-1} \leq d^{-p}$.

et $a^{-1}b^{-1}ab < d^2$.

donc $c = e$ et G est commutatif.

Si $a < e$ prendre a^{-1} ...