Exemple 9.6

La figure 9.9 a) montre une fusée cargo munie d'un module de transport, d'une masse totale M, voyageant sur un axe des x dans l'espace. Ils ont une vitesse initiale, $\vec{v}_i$, de (2 100 km/h)$\vec{i}$ par rapport au Soleil. Grâce à une petite explosion, la fusée cargo éjecte le module de transport, dont la masse est $0{,}20M$ (figure 9.9 b]). La fusée se déplace alors 500,0 km/h plus rapidement que le module dans la direction de l'axe des x ; c'est donc dire que la grandeur de la vitesse relative v_{rel} entre la fusée et le module est de 500 km/h. Quelle est la vitesse $\vec{v}_{FS}$ de la fusée par rapport au Soleil ?

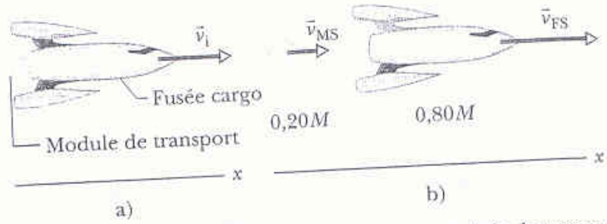


Figure 9.9 Exemple 9.6 a) Une fusée cargo et un module de transport se déplacent à une vitesse initiale $\vec{v}_i$. b) La fusée a éjecté le module. Maintenant, le module a une vitesse $\vec{v}_{MS}$ et la fusée a une vitesse $\vec{v}_{FS}$.

SOLUTION : Voici le concept clé : puisque le système fusée-module est fermé et isolé, sa quantité de mouvement totale est conservée, c'est-à-dire

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \tag{9.31}$$

où les indices i et f font respectivement référence aux valeurs avant et après l'éjection. Étant donné que le mouvement est parallèle à l'axe des x, on peut exprimer les quantités de mouvement et les vitesses en employant leur composante x. Avant l'éjection, on a :

$$P_{ix} = Mv_{ix}. \tag{9.32}$$

Soit $\vec{v}_{MS}$ la vitesse du module éjecté par rapport au Soleil. La composante x de la quantité de mouvement totale du système après l'éjection est alors :

$$P_{fx} = (0{,}20M)v_{MS,x} + (0{,}80M)v_{FS,x}, \tag{9.33}$$

où le premier terme du membre droit représente la composante x de la quantité de mouvement du module et le second terme, celle de la fusée.

On ne connaît pas la vitesse du module par rapport au Soleil, $\vec{v}_{MS}$, mais on peut l'exprimer en fonction des vitesses connues de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix}\text{vitesse de la fusée}\\ \text{par rapport}\\ \text{au Soleil}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{vitesse de la fusée}\\ \text{par rapport}\\ \text{au module}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{vitesse du module}\\ \text{par rapport}\\ \text{au Soleil}\end{pmatrix}$$

De façon symbolique, on a :

$$\vec{v}_{FS} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{MS} \tag{9.34}$$

ou

$$v_{MS,x} = v_{FS,x} - v_{rel,x}.$$

Si on remplace $v_{MS,x}$ par cette expression dans l'équation 9.33, puis si on substitue les équations 9.32 et 9.33 aux membres de l'équation 9.31, on obtient :

$$Mv_{ix} = 0{,}20M(v_{FS,x} - v_{rel,x}) + 0{,}80Mv_{FS,x},$$

ce qui donne

$$v_{FS,x} = v_{ix} + 0{,}20v_{rel,x},$$

ou

$$v_{FS,x} = 2\,100 \text{ km/h} + (0{,}20)(500 \text{ km/h})$$
$$\vec{v}_{FS} = (2\,200 \text{ km/h})\vec{i}. \qquad \text{(réponse)}$$

✓ **VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES 5** : Le tableau ci-dessous donne les grandeurs des vitesses de la fusée et du module (après l'éjection de ce dernier et par rapport au Soleil), ainsi que la grandeur de la vitesse relative entre la fusée et le module dans trois situations. Donnez les valeurs manquantes.

	Vitesses (km/h)		
	Module	Fusée	Vitesse relative (km/h)
a)	1 500	2 000	
b)		3 000	400,0
c)	1 000		600,0

Exemple 9.7

On met un pétard dans une noix de coco de masse M. La noix repose sur un plancher sans frottement. Le pétard la fait éclater en trois morceaux qui glissent sur le plancher. La figure 9.10 a) montre une vue en plongée du phénomène. Le morceau C, de masse $0{,}30M$, a une vitesse finale de module $v_{Cf} = 5{,}0$ m/s.

a) Quel est le module de la vitesse du morceau B, dont la masse est $0{,}20M$?

SOLUTION : Le concept clé applicable ici est de vérifier si la quantité de mouvement est conservée. On note : 1) que la noix de coco et ses morceaux forment un système fermé ; 2) que les forces générées par l'explosion sont des forces internes ; 3) et qu'aucune force extérieure résultante n'agit sur le système. Par conséquent, la quantité de mouvement du système est conservée.

Pour commencer, on introduit un système de coordonnées xy, comme dans la figure 9.10 b), dans lequel la direction négative de l'axe des x coïncide avec la direction de $\vec{v}_{Af}$. L'axe des x positifs forme des angles de 80° avec la direction de $\vec{v}_{Cf}$ et de −50° avec la direction de $\vec{v}_{Bf}$.

Selon un deuxième concept clé, la quantité de mouvement est conservée de manière indépendante selon l'axe des x et selon l'axe des y.

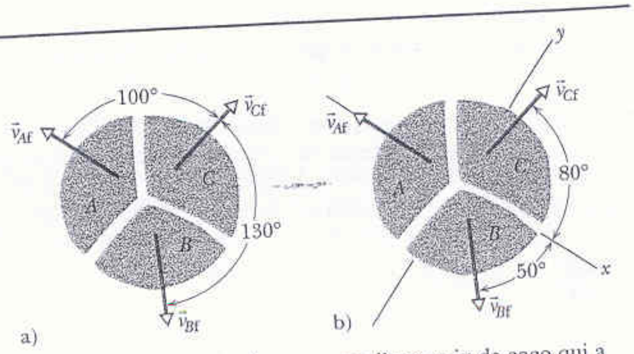


Figure 9.10 Exemple 9.7 Trois morceaux d'une noix de coco qui a explosé s'éloignent dans trois directions différentes sur un plancher sans frottement. a) Vue en plongée de l'événement b) La même vue incluant le système de coordonnées xy utilisé

En utilisant l'axe des y, on peut écrire :

$$P_{iy} = P_{fy}, \tag{9.35}$$

où l'indice i renvoie à la valeur initiale (avant l'explosion), et l'indice y renvoie à la composante y de $\vec{P}_i$ ou de $\vec{P}_f$.

La composante P_{iy} de la quantité de mouvement initiale est nulle parce que la noix de coco est initialement au repos. Pour obtenir une expression pour P_{fy}, on détermine la composante y de la quantité de mouvement finale de chaque morceau à l'aide de l'équation 9.22 ($p_y = mv_y$) :

$$P_{Af,y} = 0,$$
$$P_{Bf,y} = 0{,}20Mv_{Bf,y} = -0{,}20Mv_{Bf} \sin 50°,$$
$$P_{Cf,y} = 0{,}30Mv_{Cf,y} = 0{,}30Mv_{Cf} \sin 80°.$$

où $P_{ix} = 0$ parce que la noix de coco est initialement au repos. Pour obtenir P_{fx}, on détermine les composantes x des quantités de mouvements finales, en sachant que la masse du morceau A doit être $0{,}50M$ (= $M - 0{,}20M - 0{,}30M$) :

$$P_{Af,x} = -0{,}50Mv_{Af},$$
$$P_{Bf,x} = 0{,}20Mv_{Bf,x} = 0{,}20Mv_{Bf} \cos 50°,$$
$$P_{Cf,x} = 0{,}30Mv_{Cf,x} = 0{,}30Mv_{Cf} \cos 80°.$$

($p_{Af,y} = 0$ en raison de l'orientation du système de coordonnées.) On peut maintenant écrire l'équation 9.35 ainsi :

$$P_{iy} = P_{fy} = P_{Af,y} + P_{Bf,y} + P_{Cf,y}.$$

Puis, comme $v_{Cf} = 5{,}0$ m/s, on a :

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{Bf} \sin 50° + (0{,}30M)(5{,}0 \text{ m/s}) \sin 80°,$$

et on isole v_{Bf} :

$$v_{Bf} = 9{,}64 \text{ m/s} \approx 9{,}6 \text{ m/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

b) Quel est le module de la vitesse du morceau A ?

SOLUTION : Puisque la quantité de mouvement est aussi conservée selon l'axe des x, on a :

$$P_{ix} = P_{fx}, \qquad (9.36)$$

On peut maintenant écrire l'équation 9.36 ainsi :

$$P_{ix} = P_{fx} = P_{Af,x} + P_{Bf,x} + P_{Cf,x}.$$

Puis, comme $v_{Cf} = 5{,}0$ m/s et $v_{Bf} = 9{,}64$ m/s, on a :

$$0 = -0{,}50Mv_{Af} + 0{,}20M(9{,}64 \text{ m/s}) \cos 50° + 0{,}30M(5{,}0 \text{ m/s}) \cos 80°$$

et on obtient

$$v_{Af} = 3{,}0 \text{ m/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

✓ VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES 6 : Supposez que la noix de coco qui explose accélère dans la direction négative de l'axe des y de la figure 9.10 (on peut imaginer qu'elle se trouve sur une rampe qui descend dans cette direction). La quantité de mouvement est-elle conservée a) le long de l'axe des x (comme l'indique l'équation 9.36) et b) le long de l'axe des y (comme l'indique l'équation 9.35) ?

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

2e stratégie : *La conservation de la quantité de mouvement*
Lorsque vous abordez des problèmes mettant en jeu la conservation de la quantité de mouvement, assurez-vous d'abord que vous avez choisi un système isolé et fermé. Par *fermé*, on entend qu'aucune matière (aucune particule) ne traverse la frontière du système dans aucune direction. Le terme *isolé* suppose que la force extérieure résultante subie par le système est nulle. Si le système n'est pas isolé, n'oubliez pas que chaque composante de la quantité de mouvement est conservée de manière indépendante si la composante correspondante de la force extérieure résultante est nulle. Ainsi, il est possible de conserver une composante sans conserver l'autre.

Choisissez ensuite deux états appropriés du système (que vous pouvez appeler « initial » et « final »), puis écrivez les expressions correspondant à la quantité de mouvement du système dans chacun de ces états. En écrivant ces expressions, assurez-vous de connaître le référentiel inertiel utilisé ; assurez-vous également que vous y incluez tout le système, n'en omettant aucune partie et n'y ajoutant aucun objet qui ne lui appartient pas.

Finalement, écrivez vos expressions sous forme d'égalités entre $\vec{P}_i$ et $\vec{P}_f$, puis isolez la composante demandée.

[Etude de forces "internes"]

Exemple 9.9

Lorsqu'un taupin (petit coléoptère) se trouve sur le dos, il saute en l'air en arquant soudainement le dos, transformant ainsi l'énergie emmagasinée dans un muscle en énergie mécanique. Ce mécanisme est si soudain qu'il produit un clic sonore. Une bande vidéo du saut d'un taupin montre que le centre de masse de cet insecte de masse $m = 4{,}0 \times 10^{-6}$ kg monte de 0,77 mm durant le décollage, puis jusqu'à une hauteur maximale de $h = 0{,}30$ m. Quel est le module de la force extérieure moyenne $\vec{F}$ que le sol exerce sur le dos du taupin durant le décollage ?

SOLUTION : Ici, le concept clé indique que, durant le décollage, il y a transformation de l'énergie interne de l'insecte en énergie mécanique du système taupin-Terre ; l'énergie transformée est $\Delta E_{méc}$. La transformation se fait par l'intermédiaire de la force extérieure $\vec{F}$ exercée par le sol sur l'insecte. Pour déterminer le module de cette force à l'aide de l'équation 9.46, on a d'abord besoin d'une expression pour $\Delta E_{méc}$.

Soit $E_{méc,0}$ l'énergie mécanique du système juste avant le décollage, et $E_{méc,1}$, son énergie mécanique à la fin du décollage. La variation $\Delta E_{méc}$ est donc :

$$\Delta E_{méc} = E_{méc,1} - E_{méc,0}. \qquad (9.52)$$

On doit maintenant trouver des expressions pour $E_{méc,0}$ et $E_{méc,1}$. On peut poser que l'énergie potentielle gravitationnelle du système taupin-Terre est $U_{g0} = 0$ quand l'insecte repose au sol. De plus, on sait que, juste avant le décollage, l'énergie cinétique du centre de masse du taupin est $K_0 = 0$, de sorte que l'énergie mécanique $E_{méc,0}$ est nulle au début. Malheureusement, quand on essaie de déterminer la valeur de $E_{méc,1}$, on se trouve devant un obstacle parce qu'on ne connaît pas l'énergie cinétique K_1 ni le module de la vitesse v_1 de l'insecte à la fin du décollage.

Un deuxième concept clé permet de s'en sortir : l'énergie mécanique du système reste constante de l'instant où l'insecte décolle jusqu'à ce qu'il atteigne sa hauteur maximale. On peut trouver cette énergie mécanique $E_{méc,1}$ à la hauteur maximale parce qu'on connaît la vitesse ($\vec{v} = \vec{0}$) et la hauteur ($y = h$) du taupin à ce point. On a donc :

$$E_{méc,1} = K + U_g = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = 0 + mgh = mgh.$$

Si on remplace cette expression et $E_{méc,0} = 0$ dans l'équation 9.52, on obtient

$$\Delta E_{méc} = mgh - 0 = mgh. \qquad (9.53)$$

On peut maintenant utiliser l'équation 9.46 pour calculer la force extérieure. On écrit :

$$\Delta E_{méc} = F_{moy} d \cos \phi. \qquad (9.54)$$

F_{moy} est la valeur moyenne du module de la force extérieure exercée sur l'insecte, d est le module du déplacement (0,77 mm) du centre de masse de l'insecte durant le décollage (quand la force externe agit sur lui) et ϕ (= 0°) est l'angle que forment les directions de la force extérieure et du déplacement.

Si on isole F_{moy} dans l'équation 9.54 et qu'on utilise l'équation 9.53, on obtient :

$$\begin{aligned} F_{moy} &= \frac{\Delta E_{méc}}{d \cos \phi} = \frac{mgh}{d \cos \phi} \\ &= \frac{(4{,}0 \times 10^{-6}\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}30\text{ m})}{(7{,}7 \times 10^{-4}\text{ m})(\cos 0°)} \\ &= 1{,}5 \times 10^{-2}\text{ N}. \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Le module de cette force peut sembler petit, mais il est énorme pour le taupin parce que, comme vous pouvez le démontrer, il lui donne une accélération de plus de 380g durant le décollage.

Exemple 12.7

La figure 12.19 a) montre un étudiant assis sur un banc pouvant tourner librement autour d'un axe vertical. L'étudiant, initialement immobile, tient une roue de bicyclette dont la jante a été remplie de plomb et dont le moment d'inertie, I_r, par rapport à son axe central est de 1,2 kg · m². Cette roue tourne à une vitesse angulaire ω_r de 3,9 tr/s ; vue d'en haut, cette rotation se fait dans le sens antihoraire. L'axe de la roue est vertical, et le moment cinétique, $\vec{L}_r$, de la roue est orienté directement vers le haut. L'étudiant renverse ensuite la roue (figure 12.19 b), de sorte que, vue d'en haut, elle tourne dans le sens horaire. Le moment cinétique est alors $-\vec{L}_r$. En raison de ce renversement, l'étudiant, le banc et le centre de la roue tournent ensemble comme un corps rigide autour de l'axe de rotation du banc, avec un moment d'inertie $I_b = 6{,}8$ kg · m². (Le fait que la roue tourne également autour de son centre n'affecte pas la répartition de la masse de ce corps composé ; par conséquent, que la roue tourne ou non, I_b a la même valeur.) À quelle vitesse angulaire, ω_b, et dans quelle direction le corps composé tourne-t-il après le renversement de la roue ?

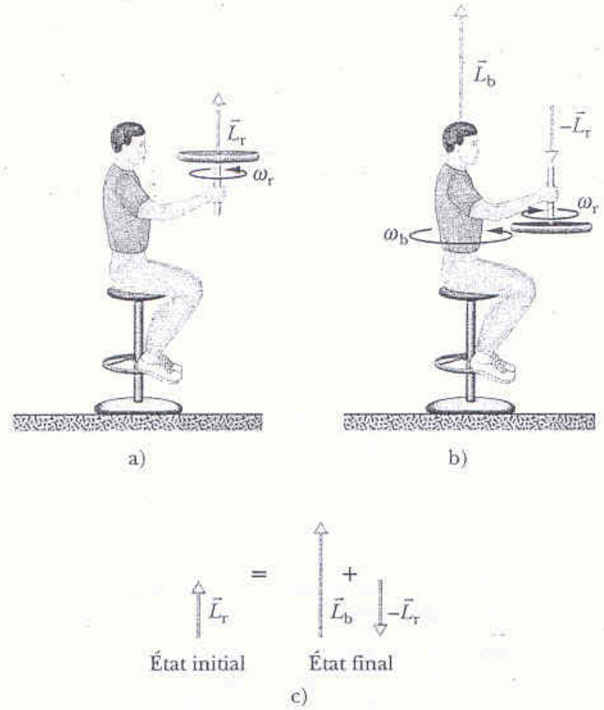


Figure 12.19 Exemple 12.7 a) Un étudiant tient une roue de bicyclette tournant autour d'un axe vertical. b) L'étudiant renverse la roue, ce qui le fait lui-même tourner. c) Le moment cinétique résultant du système doit demeurer le même malgré le renversement.

SOLUTION : Voici les concepts clés utilisés pour résoudre ce problème.

1. L'équation 12.31 ($L = I\omega$) met en relation la vitesse angulaire, ω_b, recherchée avec le moment cinétique final, $\vec{L}_b$, du corps composé par rapport à l'axe de rotation du banc.
2. La même équation met en relation la vitesse angulaire, ω_r, de la roue avec le moment cinétique, $\vec{L}_r$, de la roue par rapport à son centre.
3. L'addition vectorielle de $\vec{L}_b$ et de $\vec{L}_r$ donne le moment cinétique résultant, $\vec{L}_{rés}$, du système étudiant, banc et roue.
4. Quand l'étudiant renverse la roue, aucun moment de force *extérieur* résultant n'agit sur le système pour faire varier $\vec{L}_{rés}$ par rapport à un axe vertical. (Les moments de force engendrés par les forces agissant entre l'étudiant et la roue au cours de l'inversion sont *internes* au système.) Donc, le moment cinétique résultant du système par rapport à tout axe vertical est conservé.

La figure 12.19 c) illustre, par des vecteurs, la conservation de $\vec{L}_{rés}$. On peut également l'exprimer en utilisant ses composantes sur un axe vertical :

$$L_{b,f} + L_{r,f} = L_{b,i} + L_{r,i}, \qquad (12.35)$$

où i et f renvoient à l'état initial (avant le renversement de la roue) et à l'état final (après le renversement). Étant donné que le renversement de la roue a inversé le vecteur moment cinétique de celle-ci, on remplace $L_{r,f}$ par $-L_{r,i}$. Si on établit ensuite que $L_{b,i} = 0$ (parce que l'étudiant, le banc et le centre de la roue étaient initialement au repos), l'équation 12.35 donne

$$L_{b,f} = 2L_{r,i}.$$

On fait alors appel à l'équation 12.31, et on remplace $L_{b,f}$ par $I_b\omega_b$ et $L_{r,i}$ par $I_r\omega_r$, puis on isole ω_b pour obtenir

$$\omega_b = \frac{2I_r}{I_b}\,\omega_r = \frac{(2)(1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3{,}9\ \text{tr/s})}{6{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$= 1{,}4\ \text{tr/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

Ce résultat positif indique que l'étudiant tourne dans le sens antihoraire autour de l'axe du banc quand on le regarde d'en haut. Si l'étudiant veut arrêter de tourner, il n'a qu'à renverser la roue une autre fois.

Exemple 12.8

Durant son vol vers son partenaire, un trapéziste doit faire un quadruple saut périlleux en $t = 1{,}87$ s. Durant le premier et le dernier quart de tour, il est en extension orientée comme dans la figure 12.20, ayant un moment d'inertie $I_1 = 19{,}9$ kg · m² par rapport à son centre de masse (le point). Durant le reste de l'envol, il est regroupé sur lui-même, ayant un moment d'inertie $I_2 = 3{,}93$ kg · m². Quelle doit être sa vitesse angulaire, ω_2, par rapport à son centre de masse quand il est regroupé ?

SOLUTION : Il est évident qu'il doit tourner assez vite pour effectuer les 4,0 tours requis en 1,87 s. Pour ce faire, il se regroupe sur lui-même pour augmenter sa vitesse angulaire à ω_2. Le concept clé suivant permet de mettre en relation ω_2 avec sa vitesse angulaire initiale, ω_1 : son moment cinétique par rapport à son centre de masse est conservé durant tout l'envol parce qu'aucun moment de force extérieur résultant par rapport à son centre de masse n'agit. À l'aide de l'équation 12.34, on peut écrire la conservation du moment cinétique ($L_1 = L_2$) ainsi :

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

ou

$$\omega_1 = \frac{I_2}{I_1}\,\omega_2. \qquad (12.36)$$

Un deuxième concept clé doit être utilisé : les vitesses angulaires sont liées aux angles auxquels le trapéziste doit tourner et au temps dont il dispose. Au départ et à l'arrivée, il doit tourner en extension d'un angle total de $\theta_1 = 0{,}500$ tr (deux quarts de tour) dans un laps de temps qu'on appellera t_1. En position groupée, il doit tourner

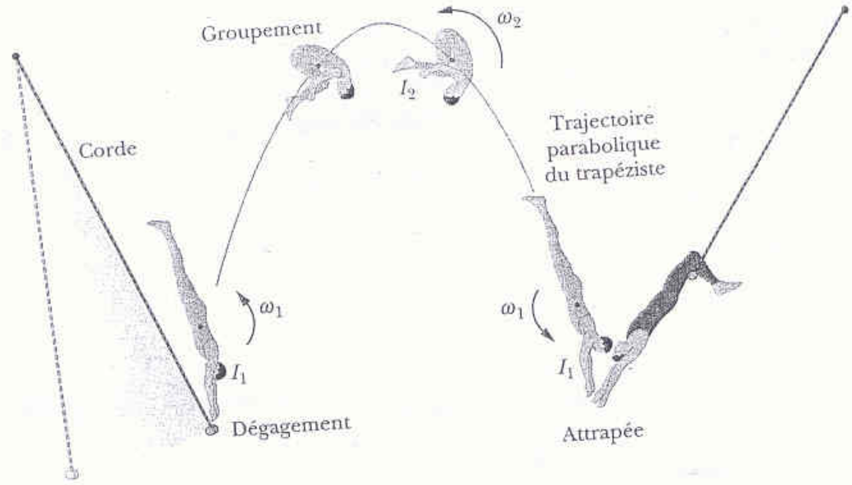


Figure 12.20 Exemple 12.8 Un trapéziste effectuant un multiple saut périlleux vers un partenaire.

d'un angle de $\theta_2 = 3{,}50$ tr en un temps t_2. À l'aide de l'équation 11.5 ($\omega_{moy} = \Delta\theta/\Delta t$), on peut écrire :

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}.$$

Par conséquent, le temps total du vol est

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2}{\omega_2}, \qquad (12.37)$$

que l'on sait être de 1,87 s. Si on remplace maintenant ω_1 par l'équation 12.36, on obtient :

$$t = \frac{\theta_1 I_1}{\omega_2 I_2} + \frac{\theta_2}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_2}\left(\theta_1 \frac{I_1}{I_2} + \theta_2\right).$$

Si on insère les valeurs connues dans cette expression, on obtient :

$$1{,}87\ \text{s} = \frac{1}{\omega_2}\left((0{,}500\ \text{tr})\frac{19{,}9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{3{,}93\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} + 3{,}50\ \text{tr}\right),$$

ce qui nous donne

$$\omega_2 = 3{,}23\ \text{tr/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

Cette vitesse angulaire est si rapide que le trapéziste ne peut clairement voir son environnement ni bien régler sa rotation en ajustant sa position groupée. La possibilité qu'un trapéziste réussisse un quadruple saut périlleux et demi est très faible ; ce mouvement nécessiterait une valeur plus élevée de ω_2 et, par conséquent, un I_2 plus petit, qu'il obtiendrait en resserrant davantage la position groupée.

Exemple 12.9

(Ce dernier exemple du chapitre est long et laborieux, mais il est utile parce qu'il regroupe plusieurs notions abordées dans les chapitres 11 et 12.) La figure 12.21 montre une vue en plongée de quatre minces tiges homogènes, chacune de masse M et de longueur $d = 0{,}50$ m, attachées solidement à un poteau vertical pour former un tourniquet. Ce tourniquet tourne dans le sens horaire autour du poteau fixé au sol ; il tourne à une vitesse angulaire initiale $\omega_i = -2{,}0$ rad/s. Une boule de boue de masse $m = \frac{1}{3}M$ voyageant à une vitesse initiale de module $v_i = 12$ m/s sur la trajectoire indiquée heurte l'extrémité d'une tige et y reste collée. Quelle est la vitesse angulaire finale, ω_f, du système boule-tourniquet ?

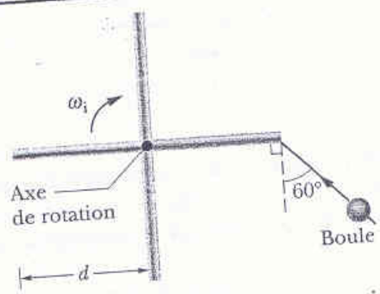


Figure 12.21 Exemple 12.9 Une vue de haut de quatre tiges solidement attachées à un poteau central autour duquel elles tournent, ainsi que la trajectoire d'une boule de boue qui colle à l'une des tiges.

SOLUTION : Ici, le concept clé peut prendre la forme question-réponse. Voici la question : le système possède-t-il une quantité qui est conservée durant la collision et qui met en jeu la vitesse angulaire, de sorte qu'on puisse déterminer ω_f ? Pour répondre, on doit étudier les possibilités de conservation.

1. L'énergie cinétique totale, K, n'est *pas* conservée, car la collision entre la boule et la tige est parfaitement inélastique (la boule reste collée). Donc, une certaine quantité d'énergie cinétique doit être transformée en d'autres types d'énergies (comme en énergie thermique). Pour la même raison, l'énergie mécanique totale n'est pas conservée.
2. La quantité de mouvement, $\vec{P}$, n'est *pas* davantage conservée parce que, durant la collision, une force extérieure agit sur le tourniquet au point d'ancrage du poteau au sol. (C'est la force qui empêche le tourniquet de tomber sur le plancher au moment de l'impact avec la boule.)
3. Le moment cinétique total, $\vec{L}$, du système par rapport au poteau *est* conservé parce qu'aucun moment de force extérieur résultant ne vient modifier $\vec{L}$. (Les forces en jeu dans la collision génèrent seulement des moments de force internes ; la force extérieure qui agit sur le tourniquet le fait au niveau du poteau ; elle a un bras de levier nul et ne génère donc aucun moment de force extérieur.)

On peut écrire la conservation du moment cinétique total du système ($L_f = L_i$) par rapport à l'axe ainsi :

$$L_{t,f} + L_{boule,f} = L_{t,i} + L_{boule,i}, \qquad (12.38)$$

où t renvoie au tourniquet. La vitesse angulaire finale, ω_f, est comprise dans les termes $L_{t,f}$ et $L_{boule,f}$ parce que ces moments cinétiques finaux dépendent de la vitesse à laquelle le tourniquet et la boule tournent. Pour déterminer ω_f, on doit d'abord tenir compte du tourniquet, puis de la boule, pour revenir ensuite à l'équation 12.38.

Tourniquet: Le concept clé est le suivant : étant donné que le tourniquet est un objet rigide en rotation, l'équation 12.31 ($L = I\omega$) permet de déterminer son moment cinétique initial. Par conséquent, on peut écrire ses moments cinétiques final et initial par rapport au poteau de la manière suivante :

$$L_{t,f} = I_t\omega_f \quad \text{et} \quad L_{t,i} = I_t\omega_i. \qquad (12.39)$$

Étant donné que le tourniquet est constitué de quatre tiges, chacune tournant autour d'une extrémité, le moment d'inertie, I_t, du tourniquet correspond à la somme du moment d'inertie des quatre tiges par rapport à son extrémité. Grâce à la case e) du tableau 11.2, on sait que le moment d'inertie, I_{CM}, d'une tige par rapport à son centre est $\frac{1}{12}Md^2$, où M est sa masse et d sa longueur. Pour obtenir I_{tige}, on fait appel au théorème des axes parallèles de l'équation 11.29 ($I = I_{CM} + Mh^2$). Ici, la distance perpendiculaire h est $d/2$. On détermine alors que

$$I_{tige} = \tfrac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}Md^2.$$

Puisque le tourniquet contient quatre tiges, on a :

$$I_t = \tfrac{4}{3}Md^2. \qquad (12.40)$$

Boule: Avant la collision, la boule constitue une particule voyageant sur une ligne droite, comme dans la figure 12.11. Donc, pour déterminer le moment cinétique initial de la boule, $L_{boule,i}$, par rapport au poteau, on peut faire appel à n'importe quelle équation parmi les équations 12.18 à 12.21, mais l'équation 12.20 ($\ell = rmv_\perp$) est la plus indiquée. Ici, ℓ est $L_{boule,i}$; juste avant la collision, la distance radiale, r, entre la balle et l'axe est d ; la composante $v_\perp$ de la vitesse de la boule perpendiculaire à r est $v_i \cos 60°$.

Pour attribuer un signe à ce moment cinétique, on trace mentalement un vecteur position allant de l'axe du tourniquet à la boule. Quand la boule approche du tourniquet, ce vecteur position tourne dans le sens antihoraire autour du poteau ; le moment cinétique de la boule est donc positif. On peut maintenant récrire $\ell = rmv_\perp$ ainsi :

$$L_{boule,i} = mdv_i \cos 60°. \qquad (12.41)$$

Après la collision, la boule est comme une particule qui tourne en suivant un cercle de rayon d. Par conséquent, selon l'équation 11.26 ($I = \sum m_i r_i^2$), on a $I_{boule} = md^2$ par rapport au poteau. Puis, à l'aide de l'équation 12.31 ($L = I\omega$), on peut écrire le moment cinétique final de la boule par rapport au poteau ainsi :

$$L_{boule,f} = I_{boule}\omega_f = md^2\omega_f. \qquad (12.42)$$

On revient maintenant à l'équation 12.38: si on substitue les équations 12.39 à 12.42 dans l'équation 12.38, on obtient :

$$\tfrac{4}{3}Md^2\omega_f + md^2\omega_f = \tfrac{4}{3}Md^2\omega_i + mdv_i \cos 60°.$$

Si on remplace M par $3m$ et si on isole ω_f, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_f &= \frac{1}{5d}(4d\omega_i + v_i \cos 60°) \\ &= \frac{1}{5(0{,}50\ \text{m})}[4(0{,}50\ \text{m})(-2{,}0\ \text{rad/s}) + (12\ \text{m/s})(\cos 60°)] \\ &= 0{,}80\ \text{rad/s}. \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Donc, le tourniquet tourne maintenant dans le sens antihoraire.

Conservations mécaniques.

conservation de $\vec{p}$

32E. Un wagon plat d'une masse M peut rouler sans frottement sur des rails horizontaux droits. Un homme de masse m se tient initialement sur le wagon, qui se déplace vers la droite à une vitesse $\vec{v}_0$ (voyez la figure 9.34). Quelle est la variation de la vitesse du wagon si l'homme court vers la gauche (dans la figure) de sorte que sa vitesse par rapport au wagon est $\vec{v}_{rel}$?

rep : $-\dfrac{m\,\vec{V}_{rel}}{m+M}$

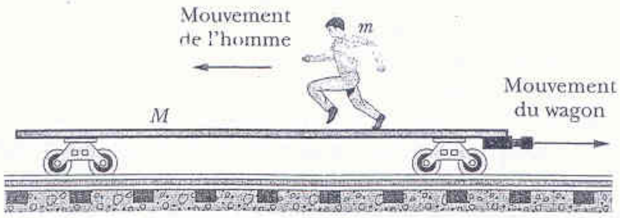


Figure 9.34 Exercice 32

Initial : $\vec{p} = (m+M)\vec{V_0}$.

Puis $\vec{p} = M\vec{V} + m(\vec{V} - \vec{V_{rel}})$.

But : $V_0 - V$.

$\Rightarrow (m+M)V_0 = MV + mV - mV_{rel}$.

$\Rightarrow V - V_0 = \dfrac{m\,V_{rel}}{m+M}$

collisions.

P et E conservés
Ec si élastique

Exemple 10.2

Le *pendule balistique* servait à mesurer la vitesse des balles avant l'invention des appareils de mesure électroniques. La version illustrée à la figure 10.11 consiste en un gros bloc de bois de masse $M = 5{,}4$ kg, suspendu à deux cordes. On tire une balle de masse $m = 9{,}5$ g dans le bloc, ce qui l'immobilise rapidement. Le bloc et la balle se balancent alors vers le haut, leur centre de masse monte une distance verticale $h = 6{,}3$ cm avant de s'immobiliser momentanément. Quel est le module de la vitesse de la balle juste avant la collision ?

SOLUTION : On peut constater que la vitesse de la balle, $\vec{v}$, doit déterminer la hauteur h. Cependant, selon un concept clé exploité ici, on *ne* peut faire appel au principe de la conservation de l'énergie pour mettre en relation ces deux quantités parce qu'il y a certainement une certaine quantité d'énergie mécanique qui a été transformée en d'autres formes d'énergie (comme en énergie thermique et en énergie nécessaire pour séparer les grains de bois) quand la balle a pénétré dans le bloc. Un autre concept clé peut cependant aider à résoudre le problème : on peut diviser ce mouvement compliqué en deux étapes qu'on peut analyser séparément : 1) la collision balle-bloc et 2) l'élévation de l'ensemble balle-bloc, durant laquelle l'énergie mécanique *est* conservée.

1re étape. Étant donné que la collision à l'intérieur du système balle-bloc est très brève, on peut formuler deux hypothèses importantes : 1) durant la collision, il y a équilibre entre la force gravitationnelle agissant sur le bloc et la force exercée par les cordes sur le bloc. Par conséquent, durant la collision, la force extérieure résultante sur le système balle-bloc est nulle. Le système est donc isolé, et sa quantité de mouvement totale est conservée. 2) La collision est à une dimension ; on peut le dire parce que la direction suivie par la balle et le bloc *juste après la collision* est la même que celle du mouvement initial.

Étant donné que la collision est à une dimension, que le bloc est initialement immobile et que la balle y reste emprisonnée, on fait appel à l'équation 10.18 pour exprimer la conservation de la quantité de mouvement. Si on y remplace les symboles par les symboles correspondants ici et qu'on choisit l'axe des x positifs orienté dans la direction de $\vec{v}$, on obtient :

$$V = \frac{m}{m + M}\,v. \tag{10.22}$$

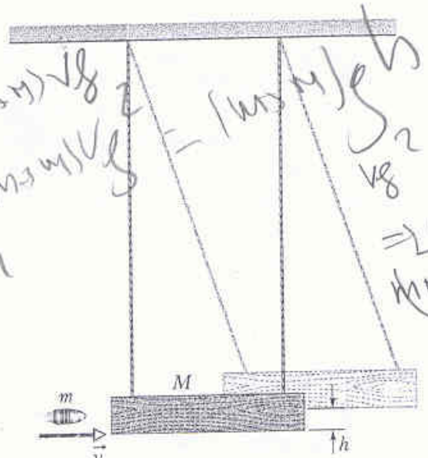
2e étape. Quand la balle et le bloc se balancent ensemble vers le haut, l'énergie mécanique du système balle-bloc-Terre est conservée. (La force qu'exercent les cordes sur le bloc ne modifie pas cette énergie mécanique parce qu'elle est toujours perpendiculaire au déplacement du bloc.) On peut choisir la hauteur initiale du bloc comme le niveau zéro d'énergie potentielle gravitationnelle. La conservation de l'énergie mécanique signifie que l'énergie cinétique du système au début du balancement doit être égale à son énergie potentielle gravitationnelle au point le plus élevé du balancement. Étant donné que la vitesse de la balle et du bloc au début du balancement correspond à la vitesse $\vec{V}$ immédiatement après la collision, on peut exprimer cette conservation ainsi :

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh$$
$$V = \sqrt{2gh}$$

Si on remplace V dans l'équation 10.22, on obtient :

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh}$$
$$= \left(\frac{0{,}009\ 5\ \text{kg} + 5{,}4\ \text{kg}}{0{,}009\ 5\ \text{kg}}\right)\sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}063\ \text{m})}$$
$$= 6{,}3 \times 10^2\ \text{m/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

Le pendule balistique est une forme de « transformateur » : il transforme la vitesse élevée d'un objet (la balle) en vitesse faible (donc facilement mesurable) d'un objet massif (le bloc).



$mV = (m+M)V_g$

$E_i = \frac{1}{2}(m+M)V_g^2 = (m+M)gh$

$V_g^2 = 2gh$

$v = \sqrt{2gh}\,(m+M)/m$

Figure 10.11 Problème 10.2 Un pendule balistique servant à mesurer la vitesse d'une balle

Exemple 10.3

$U = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v\right)^2 + (m_1+m_2)gh.$

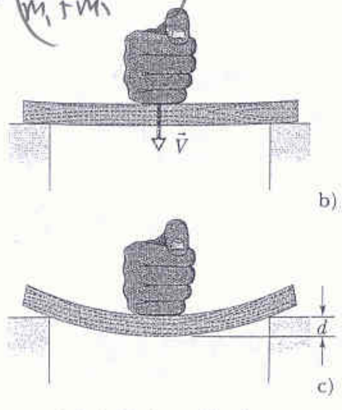
En frappant vers le bas avec son poing (de masse $m_1 = 0{,}70$ kg), un karatéka expérimenté fend une planche de 0,14 kg (figure 10.12 a]). Il fait la même chose avec un bloc de béton de 3,2 kg. Les constantes d'élasticité en flexion k sont $4{,}1 \times 10^4$ N/m dans le cas du bois et $2{,}6 \times 10^6$ N/m dans le cas du béton.

La rupture se produit à une flexion d de 16 mm dans le cas du bois et de 1,1 mm dans le cas du béton (figure 10.12 c]). (Les données proviennent de l'article « The Physics of Karate », de S. R. Wilk, R. E. McNair et M. S. Feld, *American Journal of Physics*, septembre 1983.)

a) Quelle est l'énergie emmagasinée dans l'objet (planche ou bloc) juste avant la rupture ?

$E_i = \frac{1}{2}m v_i^2$

$v_i = \frac{m_1}{m_1+m_2}v$



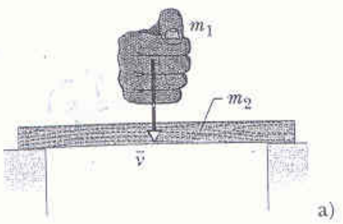


Figure 10.12 Exemple 10.3 a) Un karatéka frappe un objet plat à la vitesse $\vec{v}$. b) Le poing et l'objet subissent une collision parfaitement inélastique ; la flexion commence. Le système *poing-objet* a alors une vitesse $\vec{V}$. c) L'objet se casse quand la flexion du centre est égale à d.

…ON : Le concept clé à utiliser ici est le suivant : on peut considérer …lexion comme la compression d'un ressort à laquelle la loi de Hooke … applique. L'énergie potentielle emmagasinée est alors, d'après l'équation 8.11, $U = \frac{1}{2}kd^2$. Pour la planche de bois,

$$U = \tfrac{1}{2}(4{,}1 \times 10^4 \text{ N/m})(0{,}016 \text{ m})^2$$
$$= 5{,}248 \text{ J} \approx 5{,}2 \text{ J.} \qquad \text{(réponse)}$$

Pour le bloc de béton,

$$U = \tfrac{1}{2}(2{,}6 \times 10^6 \text{ N/m})(0{,}0011 \text{ m})^2$$
$$= 1{,}573 \text{ J} \approx 1{,}6 \text{ J.} \qquad \text{(réponse)}$$

b) Quel est le module de la vitesse minimale, v_{poing}, que le poing doit avoir pour rompre l'objet (planche ou bloc) ? Supposez qu'il s'agit seulement de collisions parfaitement inélastiques entre le poing et l'objet, que la flexion commence juste après la collision et que l'énergie mécanique est conservée du début de la flexion jusqu'à l'instant qui précède la rupture de l'objet. À ce point, la vitesse du poing et de l'objet est négligeable.

SOLUTION : Le concept clé à utiliser ici est le suivant : on peut diviser ce mouvement compliqué en trois étapes que l'on peut analyser séparément :

1. Il s'agit d'une collision à une dimension parfaitement inélastique entre le poing et l'objet.
2. L'énergie cinétique du système poing-objet après la collision se transforme en énergie potentielle U emmagasinée par la flexion.
3. L'objet se brise quand U atteint la valeur calculée en a).

À la première étape, on peut faire appel à l'équation 10.18 pour relier la vitesse du poing, $\vec{v}_{poing}$, juste avant la collision et la vitesse poing-objet, $\vec{V}_{po}$, juste après la collision, quand la flexion commence. Avec cette notation et en considérant que l'axe des x positifs est orienté vers le bas, l'équation 10.18 devient :

$$V_{po} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{poing}. \qquad (10.23)$$

À la deuxième étape, l'énergie mécanique du système poing-objet est conservée durant la flexion (jusqu'à la rupture). (Étant donné que l'objet fléchit peu vers le bas, la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle du système poing-objet durant la flexion est si petite qu'on peut la négliger.) On peut exprimer de la manière suivante la conservation de l'énergie mécanique durant la flexion :

$$\begin{pmatrix}\text{énergie cinétique au}\\ \text{début de la flexion}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{énergie potentielle de flexion}\\ \text{juste avant la rupture}\end{pmatrix},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{po}^2 = U. \qquad (10.24)$$

Si on utilise l'expression de V_{po} de l'équation 10.23 et si on isole v_{poing}, on obtient :

$$v_{poing} = \frac{1}{m_1}\sqrt{2U(m_1 + m_2)}. \qquad (10.25)$$

À la troisième étape, on remplace la valeur de la masse m_2 appropriée avec la valeur de rupture U correspondante obtenue en a). On obtient ainsi pour la planche

$$v_{poing} = 4{,}2 \text{ m/s} \qquad \text{(réponse)}$$

et pour le bloc

$$v_{poing} = 5{,}0 \text{ m/s.} \qquad \text{(réponse)}$$

Par conséquent, d'après les réponses obtenues en a), on constate qu'il faut plus d'énergie pour briser une planche que pour briser un bloc. Et, d'après les réponses obtenues en b), on comprend pourquoi il est plus facile de briser une planche qu'un bloc : la vitesse requise par le poing est inférieure. La raison réside dans l'équation 10.23. Si on diminue la masse de la cible dans la collision, on augmente la vitesse poing-objet, $\vec{V}_{po}$. Par conséquent, on augmente également la fraction de l'énergie du poing qui est transférée à l'objet. (La raison pour laquelle il est facile de casser un crayon de la manière illustrée à la figure 10.12 est que cet objet a une petite masse.)

Retour sur système à masse variable.

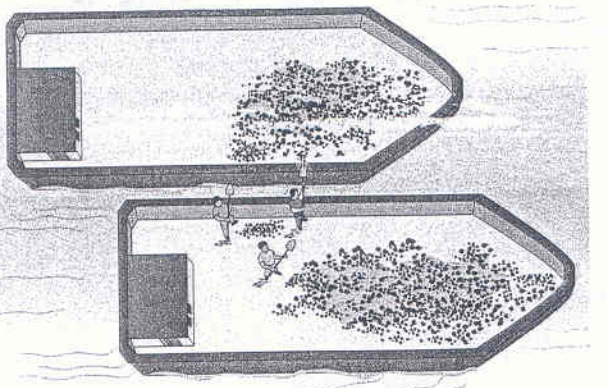


Figure 9.35 Problème 47

47P. Dans la figure 9.35, deux longues barges se déplacent dans la même direction sur une eau calme, l'une à 10 km/h, l'autre à 20 km/h. Pendant qu'elles sont côte à côte, on transfère du charbon de la barge la plus lente à la barge la plus rapide à raison de 1 000 kg/min. Quel est le module de la force additionnelle que les moteurs de chacune des barges doivent fournir pour maintenir V = cte ?
Le transfert de charbon se fera ⊥ à $\vec{v}$ et on néglige les frottements additionnels.

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = F$$

$$\frac{(m_2 + dm)V_2 - m_2 V_2}{dt} = F$$

$\frac{dm}{dt} V_{rel} = f$ = poussée.

Attention aux unités !!!

$\frac{dm}{dt} = 10^3$ kg/min

$V_{rel} = 10$ km/h.

$F = \frac{dm}{dt} V_2$

d'où $f = \frac{10^3}{60} \times \frac{10 \cdot 10^3}{3600} = 46$ N !

La barge qui reçoit est ralentie
celle qui cède est accélérée…

pendant : dM, ini : $m_1 V_1$ | $(m_1 - dm) V_1$
on calcule ΔP … $F dt =$
$m_2 V_2$, $(m_2 + dm) V_2$

collision inelastique

Exemple 10.5

Deux patineurs se heurtent dans une collision parfaitement inélastique. Ils demeurent donc liés après l'impact, comme l'illustre la figure 10.17, où l'origine du système de coordonnées se trouve au point de collision. Antoine, dont la masse m_A est 83 kg, se déplaçait initialement vers l'est à $v_A = 6{,}2$ km/h. Brigitte, dont la masse m_B est 55 kg, se déplaçait initialement vers le nord à $v_B = 7{,}8$ km/h.

a) Quelle est la vitesse du couple $\vec{V}$ après la collision ?

SOLUTION : Le concept clé utilisé ici est le suivant : on suppose que les deux patineurs forment un système fermé et isolé, donc qu'aucune force extérieure *résultante* n'agit sur eux. En particulier, on néglige toute force de frottement qu'exerce la glace sur les lames. Cette supposition permet d'appliquer le principe de la conservation de la quantité de mouvement totale du système en écrivant $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ ainsi :

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = (m_A + m_B)\vec{V}. \tag{10.45}$$

Si on isole $\vec{V}$, on obtient

$$\vec{V} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}$$

On peut résoudre cette équation à l'aide d'une calculatrice à capacité vectorielle en remplaçant les symboles du membre droit par les données fournies. On peut également la résoudre en faisant appel à un deuxième concept clé (qu'on a déjà utilisé) et à un peu d'algèbre : selon ce concept, la quantité de mouvement totale du système est conservée séparément sur l'axe des x et sur l'axe des y illustrés à la figure 10.17. Si on écrit l'équation 10.45 en employant les composantes x, on obtient :

$$m_Av_A + m_B(0) = (m_A + m_B)V\cos\theta, \tag{10.46}$$

et, en employant les composantes y,

$$m_A(0) + m_Bv_B = (m_A + m_B)V\sin\theta. \tag{10.47}$$

On ne peut résoudre aucune de ces équations individuellement parce que toutes deux contiennent deux inconnues (V et θ), mais on peut les résoudre simultanément en divisant l'équation 10.47 par l'équation 10.46. On obtient alors :

$$\tan\theta = \frac{m_Bv_B}{m_Av_A} = \frac{(55\text{ kg})(7{,}8\text{ km/h})}{(83\text{ kg})(6{,}2\text{ km/h})} = 0{,}834.$$

Donc,

$$\theta = \tan^{-1} 0{,}834 = 39{,}8° \approx 40°. \quad \text{(réponse)}$$

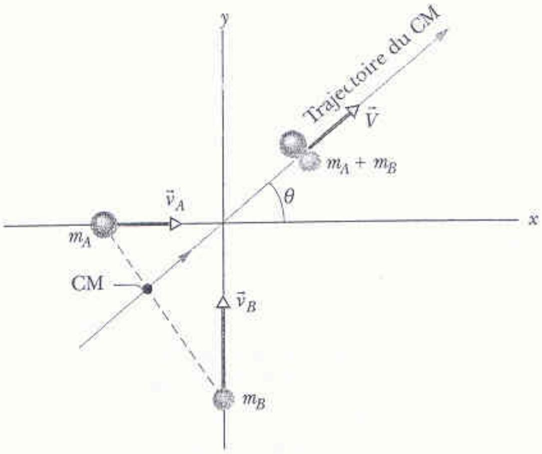


Figure 10.17 Exemple 10.5 Deux patineurs, Antoine (A) et Brigitte (B), représentés par des sphères dans cette vue plongeante simplifiée, se heurtent pour produire une collision parfaitement inélastique. Ils se déplacent ensuite ensemble à une vitesse $\vec{V}$, qui fait un angle θ par rapport à l'axe des x positifs. La trajectoire suivie par leur centre de masse est illustrée. La position du centre de masse correspondant aux positions indiquées avant la collision est également illustrée.

D'après l'équation 10.47, si $m_A + m_B = 138$ kg, on a

$$V = \frac{m_Bv_B}{(m_A + m_B)\sin\theta} = \frac{(55\text{ kg})(7{,}8\text{ km/h})}{(138\text{ kg})(\sin 39{,}8°)}$$
$$= 4{,}85\text{ km/h} \approx 4{,}9\text{ km/h}. \quad \text{(réponse)}$$

b) Quelle est la vitesse $\vec{v}_{CM}$ du centre de masse des deux patineurs avant et après la collision ?

SOLUTION : Pour déterminer la vitesse du centre de masse après la collision, on fait appel au concept clé suivant : étant donné que les patineurs restent liés, leur centre de masse doit se déplacer avec eux, comme le montre la figure 10.17. Par conséquent, la vitesse de leur centre de masse, $\vec{v}_{CM}$, est égale à $\vec{V}$, comme on l'a calculé en a).

Pour déterminer $\vec{v}_{CM}$ avant la collision, on fait appel à un autre concept clé : la $\vec{v}_{CM}$ d'un système ne peut varier que si une force résultante extérieure est exercée. Dans ce problème, on suppose ici que les patineurs forment un système isolé (aucune force extérieure résultante n'agit sur ce système). Par conséquent, la collision ne peut pas faire varier $\vec{v}_{CM}$ (car durant la collision, seules des forces internes sont exercées). On a donc, avant et après la collision,

$$\vec{v}_{CM} = \vec{V}. \quad \text{(réponse)}$$

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$

$E = -\dfrac{dV}{dx}$