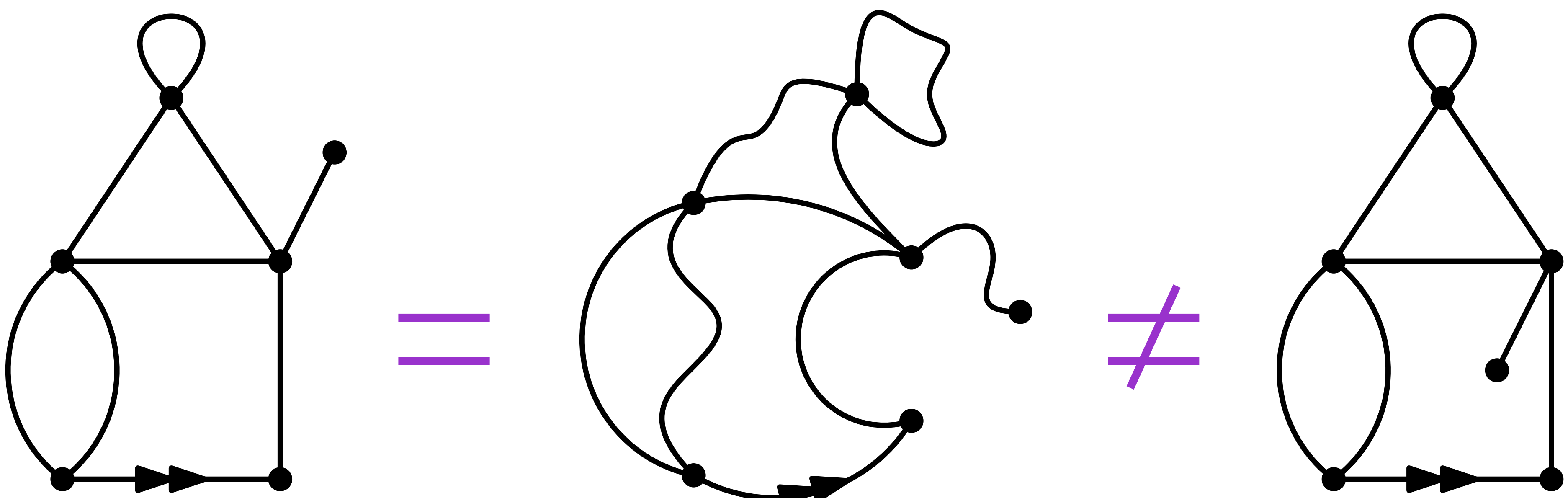
Bijections "fermeture éclair" pour les cartes biparties planaires à degrés prescrits

Juliette Schabanel (ENS Paris)

Stage de M2 encadré par **Baptiste Louf** (IMB)

Cartes planaires

Une **carte planaire** est un plongement propre d'un graphe planaire connexe dans la sphère, vu à homéomorphisme préservant l'orientation près.
Arêtes multiples et boucles sont autorisées.



Carte planaire = graphe planaire + ordre cyclique sur les arêtes autour de chaque sommet

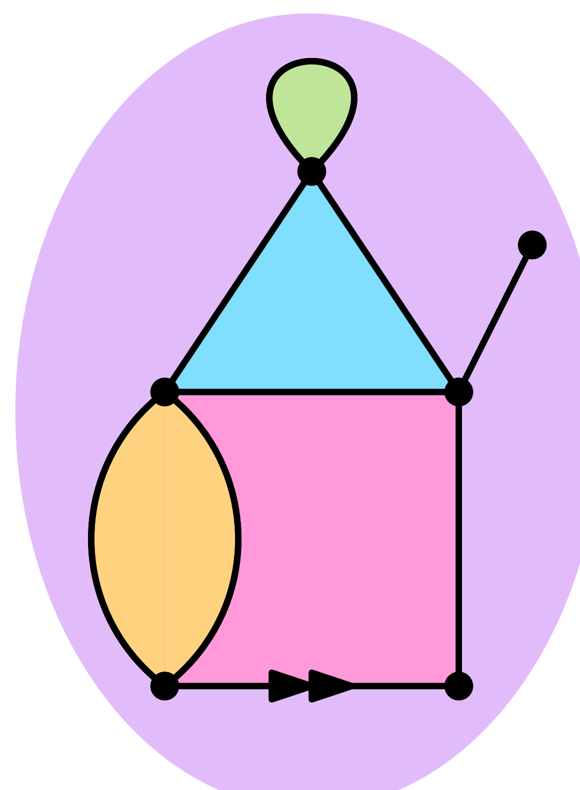
Pour casser les symétries, les cartes sont **enracinées** (une arête orientée marquée).

Cartes planaires

Carte planaire = graphe planaire + ordre cyclique sur les arêtes autour de chaque sommet

- **Sommets** et **arêtes** hérités du graphe. (Comptés par v et n)
- **Faces** = composantes connexes de la sphère privée du graphe. (Comptées par f.)

Ici : 6 sommets, 9 arêtes et 5 faces.

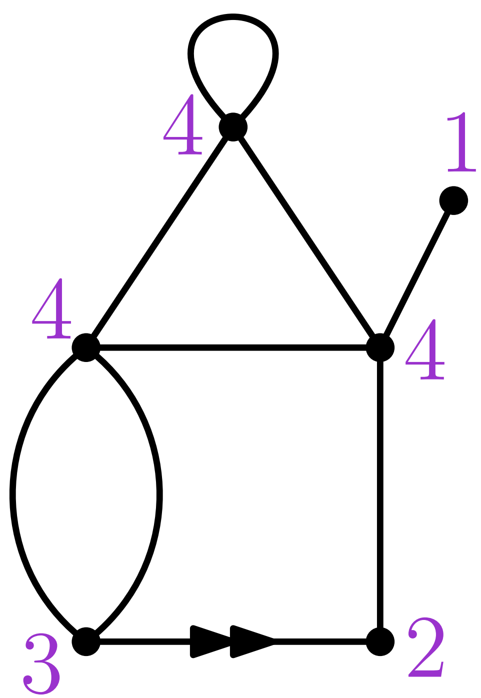


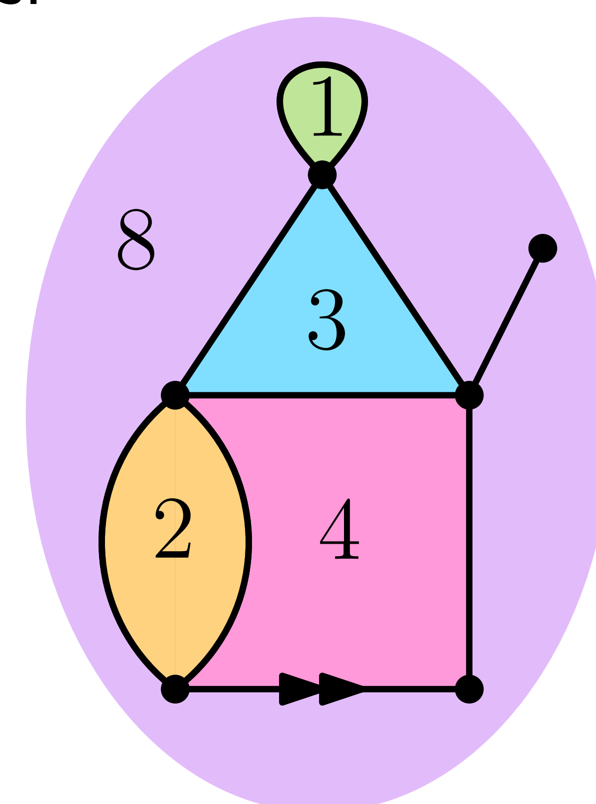
Cartes planaires

Carte planaire = graphe planaire + ordre cyclique sur les arêtes autour de chaque sommet

- **Sommets** et **arêtes** hérités du graphe. (Comptés par v et n)
- **Faces** = composantes connexes de la sphère privée du graphe. (Comptées par f.)

Degré = nombre de demi arêtes incidentes.





Contexte

Théorème. [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à n arêtes est

$2 \cdot 3^n \dfrac{\mathsf{Cat}(n)}{n+2}$ où $\mathsf{Cat}(n) = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Contexte

Théorème. [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à n arêtes est

$$2 \cdot 3^n \frac{\mathsf{Cat}(n)}{n+2} \text{ où } \mathsf{Cat}(n) = \underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{Nombre d'arbres planaires à } n \text{ arêtes.}} \; n^{\text{ième}} \text{ nombre de Catalan.}$$

Contexte

Théorème. [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à n arêtes est

$2 \cdot 3^n \dfrac{\mathsf{Cat}(n)}{n+2}$ où $\mathsf{Cat}(n) = \underbrace{\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}}_{\text{Nombre d'arbres planaires à } n \text{ arêtes.}}$ $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

$\Rightarrow$Bijection de **Cori-Vauquelin** (1981), reformulée par **Schaeffer** (1998).

Contexte

Théorème. [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $2 \cdot 3^n \frac{\text{Cat}(n)}{n+2}$ où $\text{Cat}(n) = \underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{}$ $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Nombre d'arbres planaires à n arêtes.

$\Rightarrow$Bijection de **Cori-Vauquelin** (1981), reformulée par **Schaeffer** (1998).

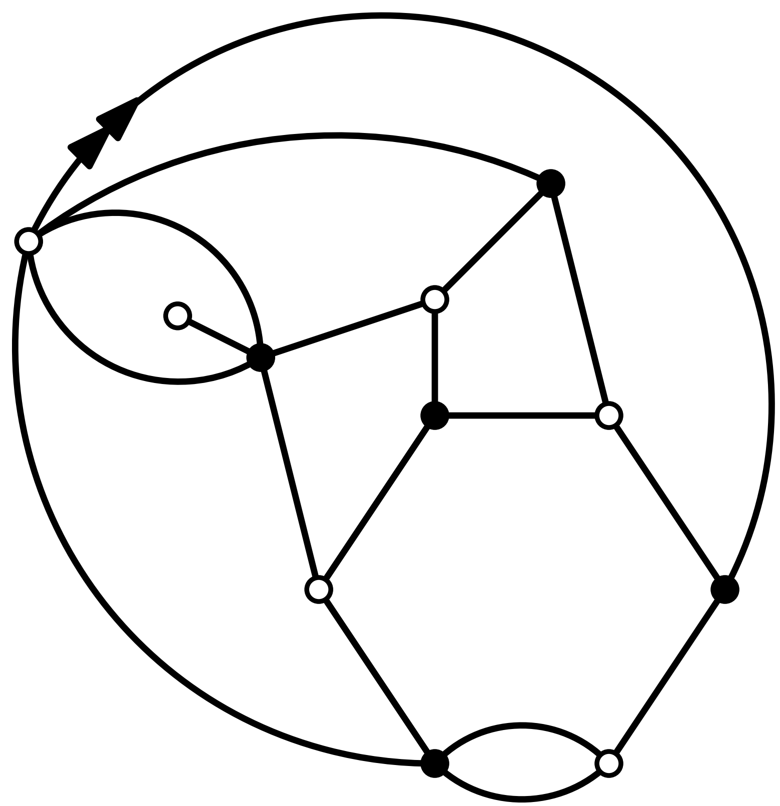
Théorème. [Goulden-Jackson, 08] Soit $T_g(n)$ le nombre de triangulations de genre g à $2n$ faces.

$$\begin{aligned}(n+1)T_g(n) &= 4n(3n-2)(3n-4))T_{g-1}(n-2) + 4(3n-1))T_g(n-1) \\ &\quad +4 \sum_{i+j=n-2} \sum_{g_1+g_2=g} (3i+2)(3j+2))T_{g_1}(i)T_{g_2}(j)\end{aligned}$$

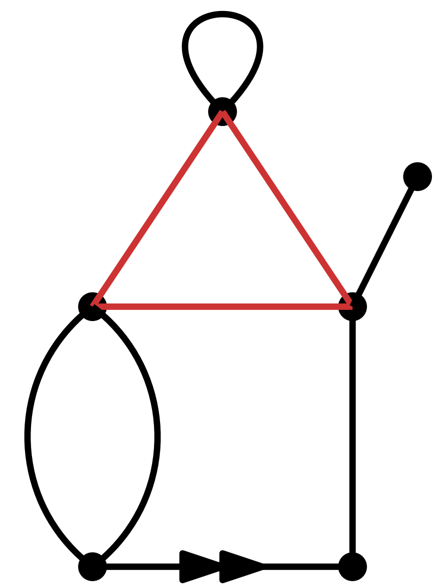
- Cas à un sommet [Chapuy-Féray-Fusy, 13]
- Cas planaire [Louf, 19]

Cartes biparties

Une carte est **biparties** si l'on peut colorier proprement ses sommets en noir et blanc $\iff$ toutes les faces ont degré pair.



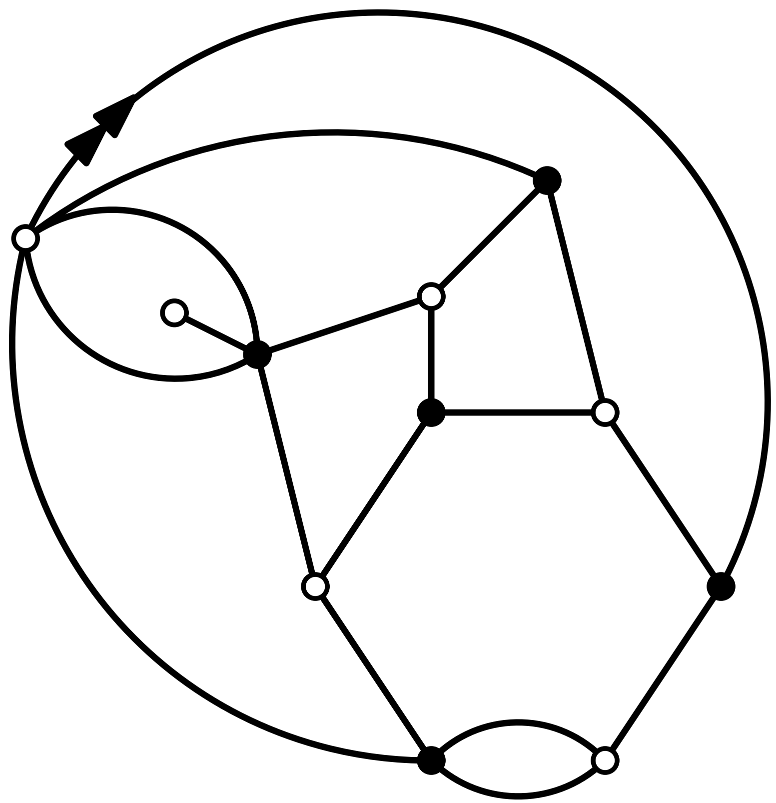
Bipartie



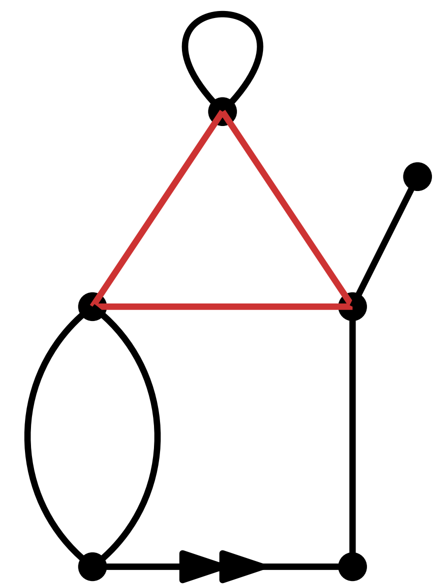
Non bipartie

Cartes biparties

Une carte est **bipartie** si l'on peut colorier proprement ses sommets en noir et blanc $\iff$ toutes les faces ont degré pair.



Bipartie



Non bipartie

Coloriage canonique : racine de blanc vers noir

Cartes biparties à degrés prescrits

Soit $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots)$ une suite d'entiers. Une carte bipartie M a **profil** $\mathbf{d}$ si elle a exactement d_i faces de degré $2i$ pour tout i.
On note $B(\mathbf{d})$ leur nombre.

Cartes biparties à degrés prescrits

Soit $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots)$ une suite d'entiers. Une carte bipartie M a **profil** $\mathbf{d}$ si elle a exactement d_i faces de degré $2i$ pour tout i.
On note $B(\mathbf{d})$ leur nombre.

Formule d'Euler : $v + f = n + 2$ pour toute carte planaire.

Une carte $M \in B(\mathbf{d})$ a :

- $f(\mathbf{d}) = \sum_{i \geqslant 1} d_i$ faces
- $n(\mathbf{d}) = \sum_{i \geqslant 1} i d_i$ arêtes
- $v(\mathbf{d}) = n(\mathbf{d}) + 2 - f(\mathbf{d})$ sommets

Cartes biparties à degrés prescrits

Soit $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots)$ une suite d'entiers. Une carte bipartie M a **profil** $\mathbf{d}$ si elle a exactement d_i faces de degré $2i$ pour tout i.
On note $B(\mathbf{d})$ leur nombre.

Formule d'Euler : $v + f = n + 2$ pour toute carte planaire.

Une carte $M \in B(\mathbf{d})$ a :

- $f(\mathbf{d}) = \sum_{i \geqslant 1} d_i$ faces
- $n(\mathbf{d}) = \sum_{i \geqslant 1} i d_i$ arêtes
- $v(\mathbf{d}) = n(\mathbf{d}) + 2 - f(\mathbf{d})$ sommets

Théorème. [Louf 21]

$$\left(\binom{n(\mathbf{d}) + \mathbf{1}}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2}\right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\substack{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

$s_i + t_i = d_i \forall i$

Formules

Théorème. [Louf 21]

$$\left(\binom{n(\mathbf{d})+\mathbf{1}}{2}-\binom{v(\mathbf{d})}{2}\right)B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}(1+n(\mathbf{s}))\binom{v(\mathbf{t})}{2}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formule d'Euler : $n+1=v+f-1$ pour toute carte planaire.

$$\left((f(\mathbf{d})-1)v(\mathbf{d})+\binom{f(\mathbf{d})-1}{2}\right)B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}(v(\mathbf{s})+f(\mathbf{s})-1)\binom{v(\mathbf{t})}{2}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formules

Théorème. [Louf 21]

$$\left(\binom{n(\mathbf{d})+\mathbf{1}}{2}-\binom{v(\mathbf{d})}{2}\right)B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}(1+n(\mathbf{s}))\binom{v(\mathbf{t})}{2}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formule d'Euler : $n+1=v+f-1$ pour toute carte planaire.

Théorème. [S.] Le nombre de cartes planaires biparties de profil $\mathbf{d}$ satisfait :

$$2v(\mathbf{d})(f(\mathbf{d})-1)B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t})-1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

et

$$\binom{f(\mathbf{d})-1}{2}B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}(f(\mathbf{s})-1)\binom{v(\mathbf{t})}{2}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formules

Théorème. [Louf 21]

$$\left(\binom{n(\mathbf{d})+\mathbf{1}}{2}-\binom{v(\mathbf{d})}{2}\right)B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}(1+n(\mathbf{s}))\binom{v(\mathbf{t})}{2}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formule d'Euler : $n+1=v+f-1$ pour toute carte planaire.

Théorème. [S.] Le nombre de cartes planaires biparties de profil $\mathbf{d}$ satisfait :

$$2v\underset{2}{\cancel{(\mathbf{d}}})(f(\mathbf{d})-1)B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})\cancel{(v(\mathbf{t})-1)}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

et

$$\binom{f(\mathbf{d})-1}{2}B(\mathbf{d})=\sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}}(f(\mathbf{s})-1)\binom{v(\mathbf{t})}{2}B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formules

Théorème. [Louf 21]

$$\left(\binom{n(\mathbf{d})+\mathbf{1}}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2}\right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (1+n(\mathbf{s}))\binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formule d'Euler : $n+1 = v+f-1$ pour toute carte planaire.

Théorème. [S.] Le nombre de cartes planaires biparties de profil $\mathbf{d}$ satisfait :

$$4(f(\mathbf{d})-1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

et

$$\binom{f(\mathbf{d})-1}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)\binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

Formules

Théorème. [Louf 21]

$$\left(\binom{n(\mathbf{d})+\mathbf{1}}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2}\right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (1+n(\mathbf{s}))\binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s})B(\mathbf{t}).$$

Formule d'Euler : $n+1 = v+f-1$ pour toute carte planaire.

Théorème. [S.] Le nombre de cartes planaires biparties de profil $\mathbf{d}$ satisfait :

$$\boxed{4(f(\mathbf{d})-1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})}$$

Bijection de cet exposé

et

$$\binom{f(\mathbf{d})-1}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)\binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

Cas à 2 faces

Cas à deux faces de la formule non simplifiée [Bouttier-Guitter-Miermont, 22].

$$4(\cancel{f(\mathbf{d}) - 1})B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

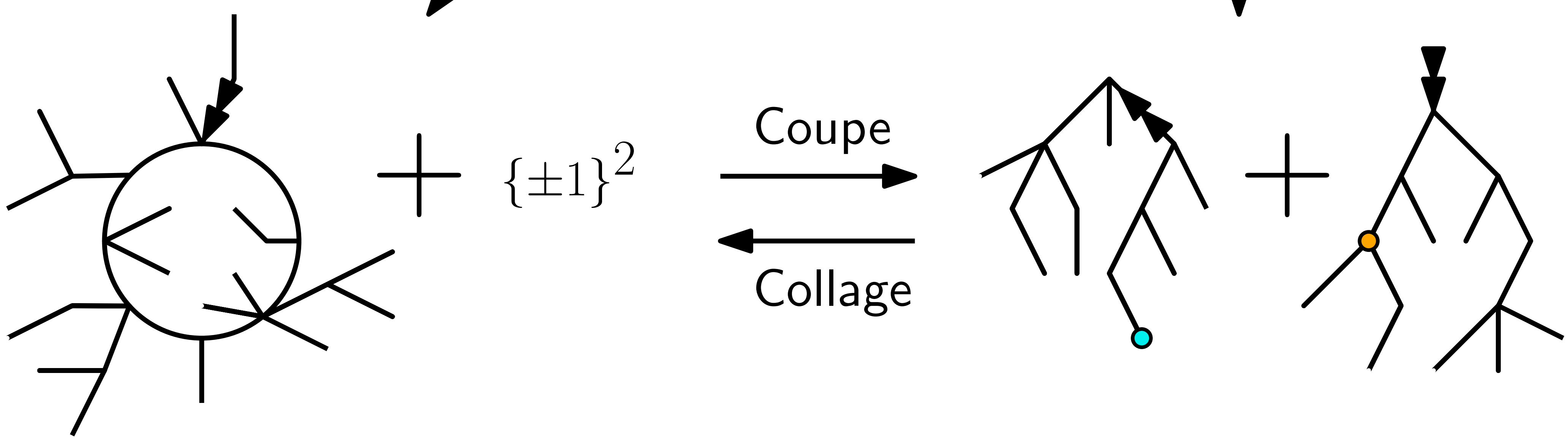
$$\mathbf{d} = \mathbb{1}_{i=m_1} + \mathbb{1}_{i=m_2} \qquad \mathbf{s} = \mathbb{1}_{i=m_1} \qquad \mathbf{t} = \mathbb{1}_{i=m_2}$$

Cas à 2 faces

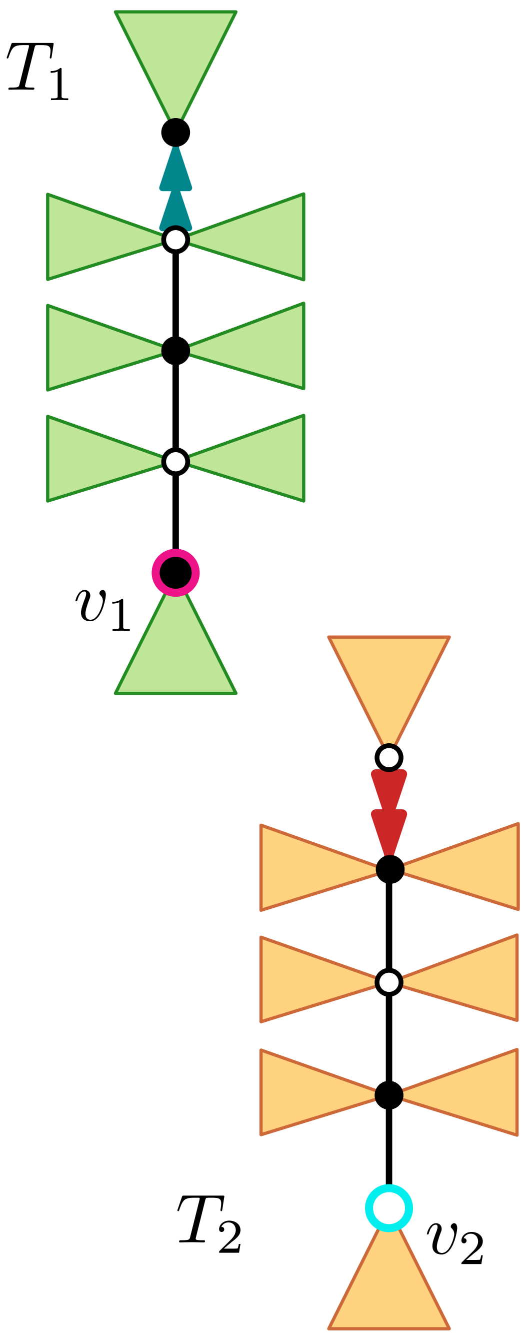
Cas à deux faces de la formule non simplifiée [Bouttier-Guitter-Miermont, 22].

$$4(\cancel{f(\mathbf{d}) -} 1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

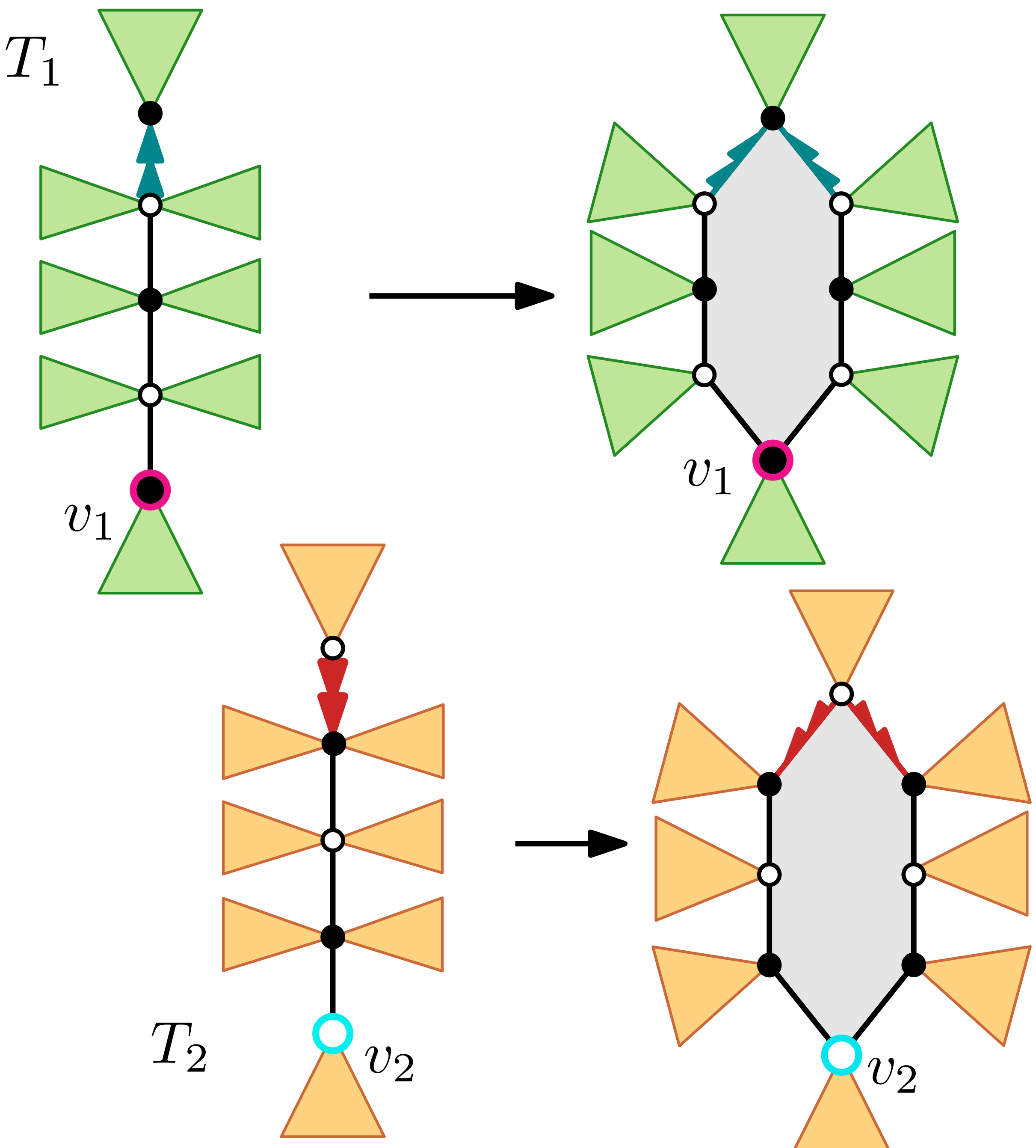
$\mathbf{d} = \mathbb{1}_{i=m_1} + \mathbb{1}_{i=m_2}$ $\mathbf{s} = \mathbb{1}_{i=m_1}$ $\mathbf{t} = \mathbb{1}_{i=m_2}$



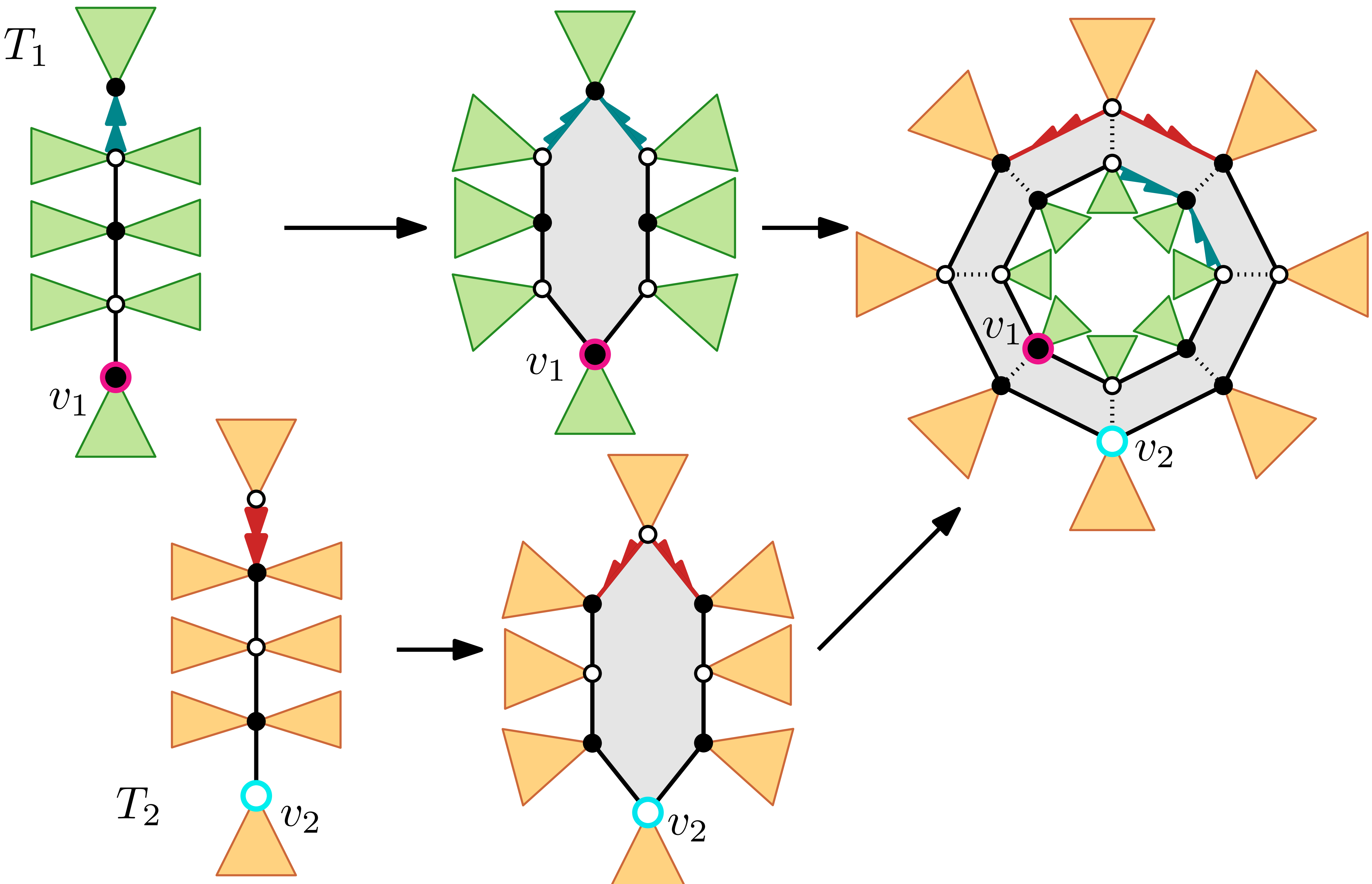
Cas à 2 faces : collage



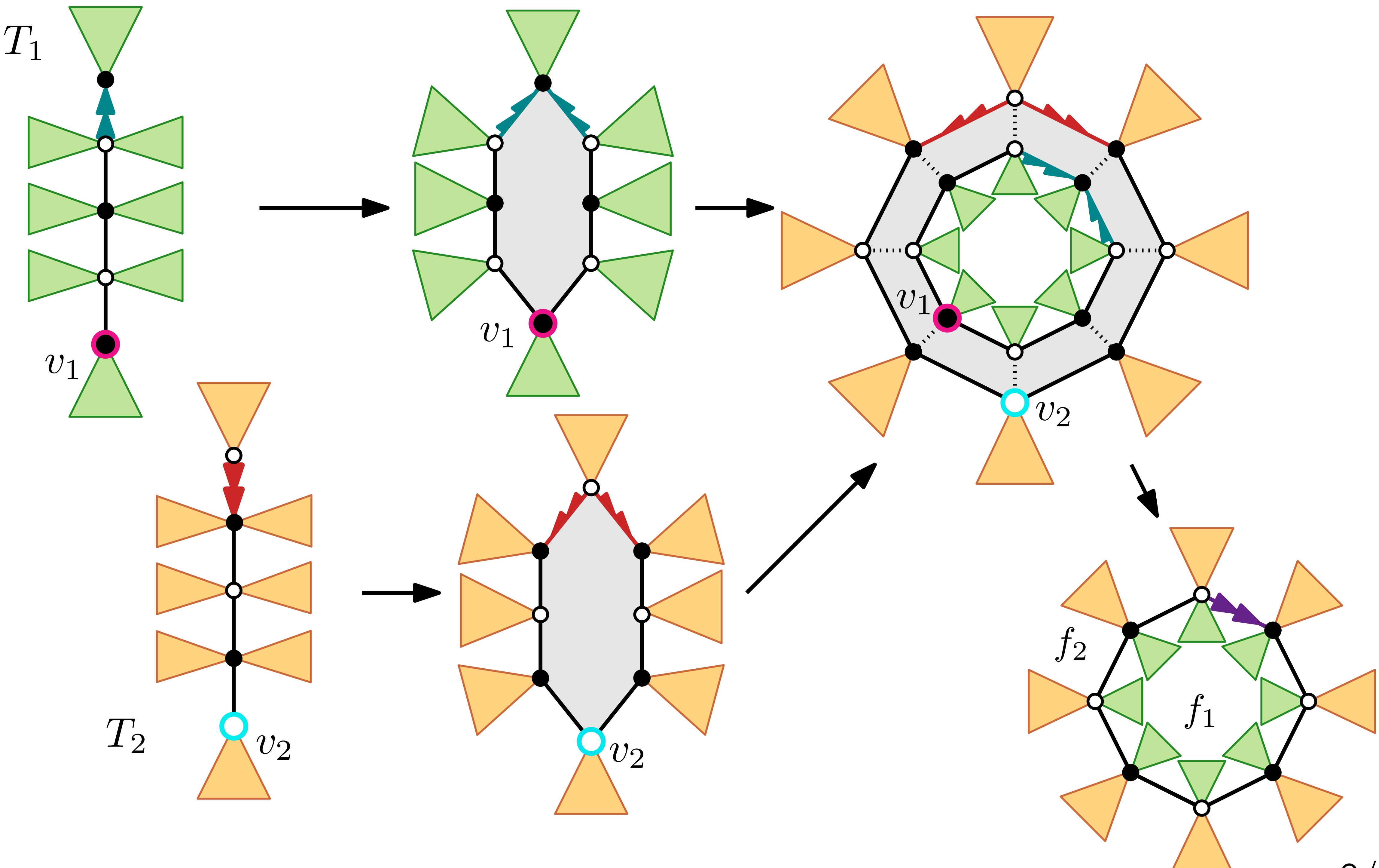
Cas à 2 faces : collage



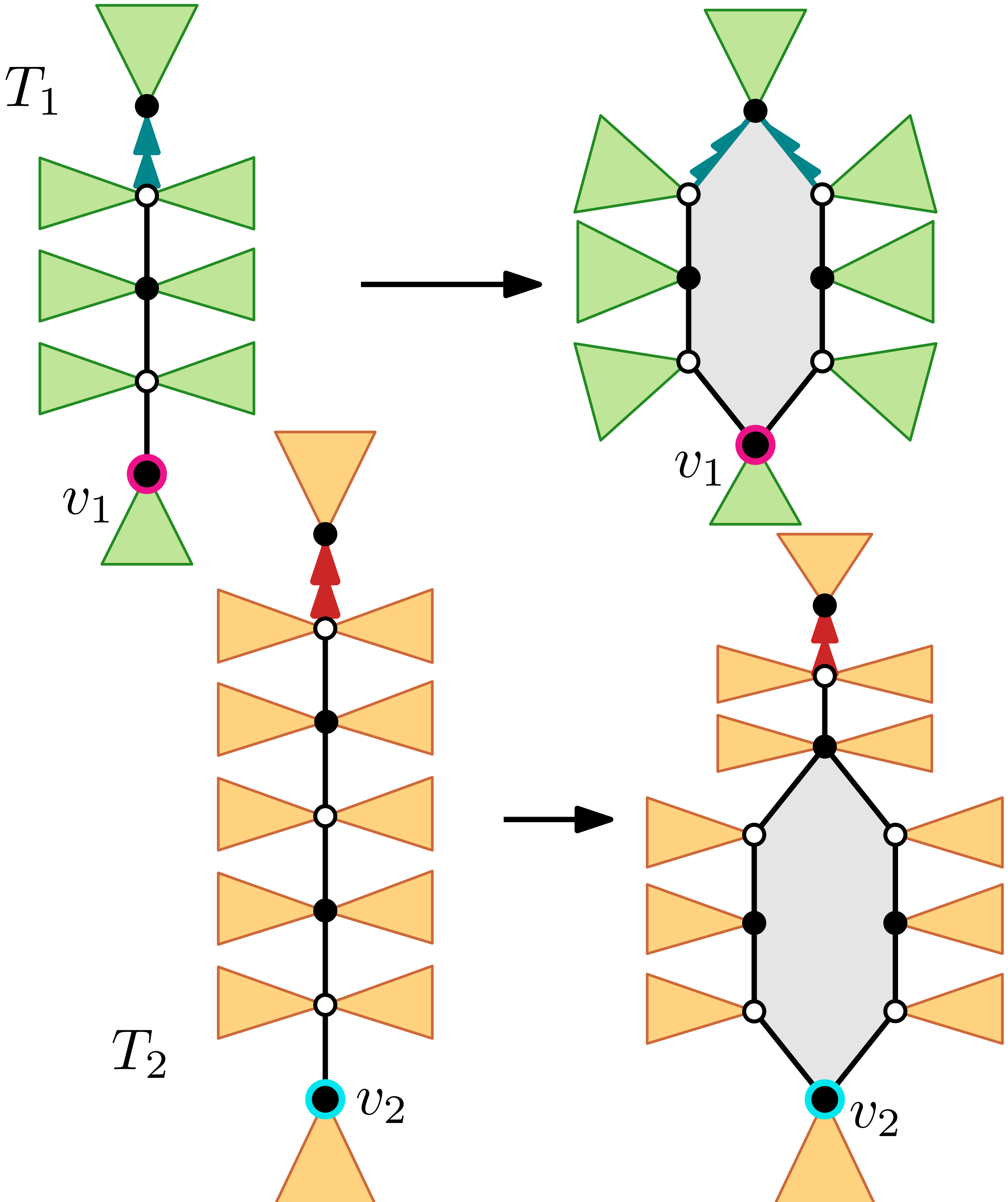
Cas à 2 faces : collage



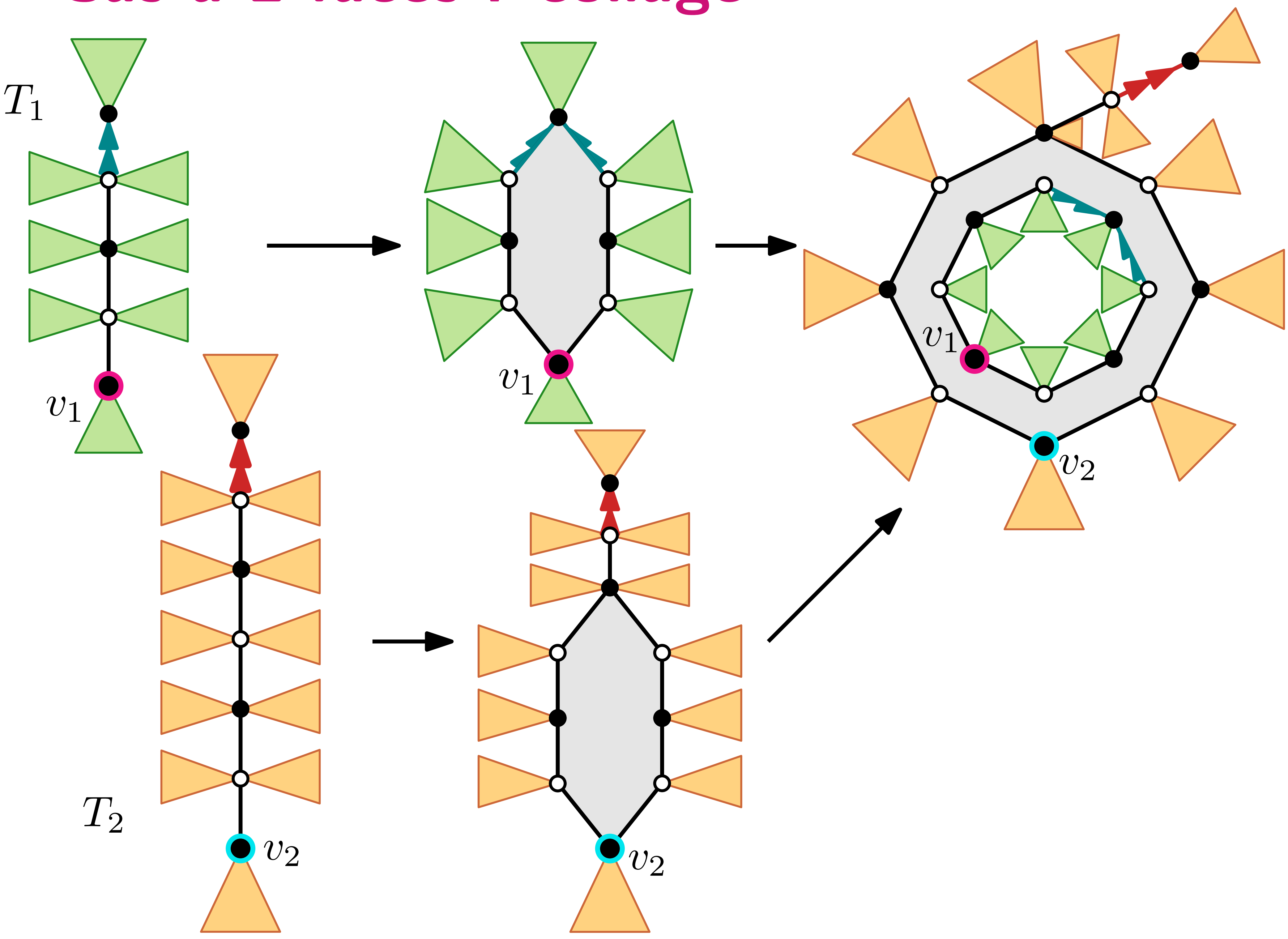
Cas à 2 faces : collage



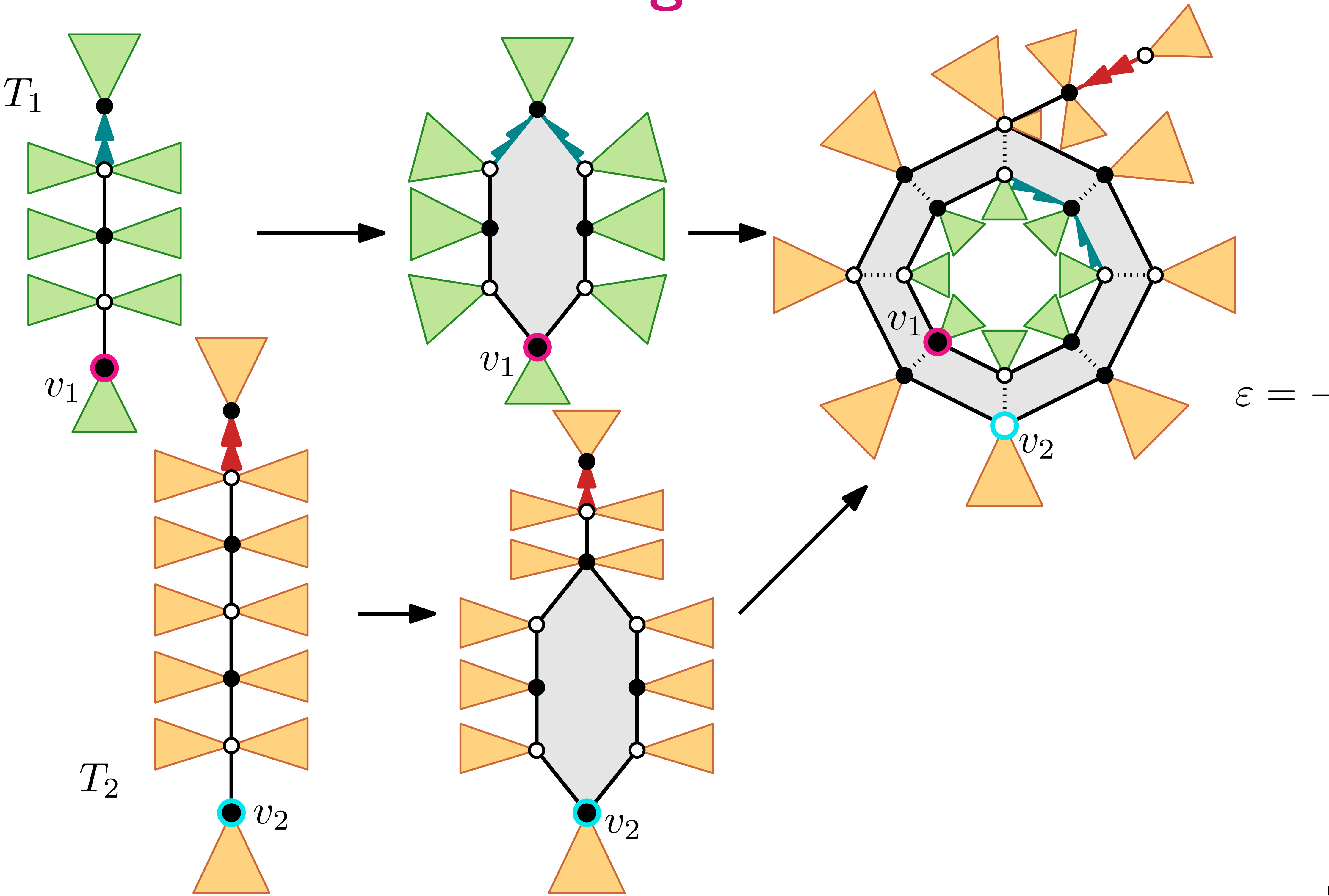
Cas à 2 faces : collage



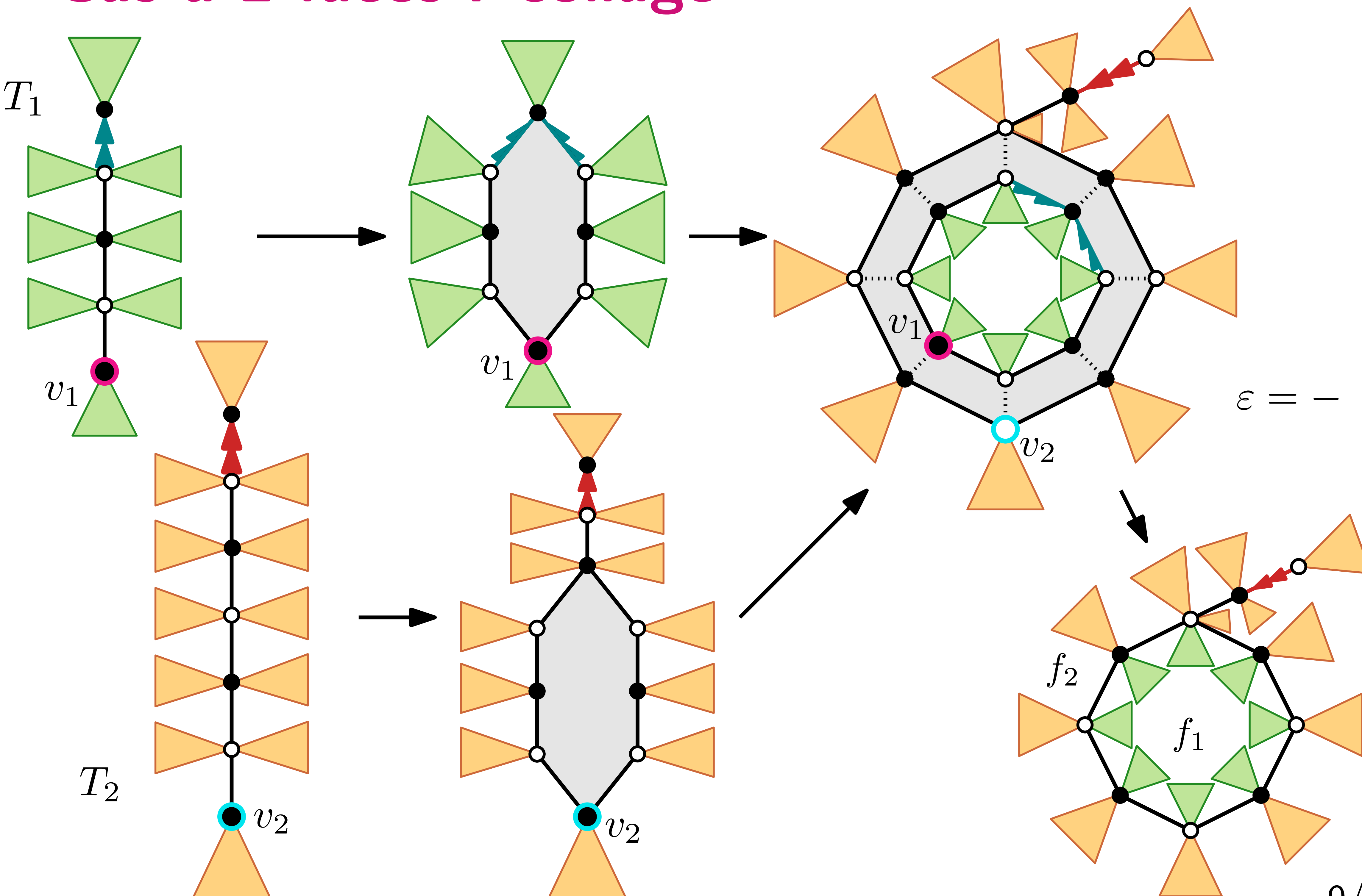
Cas à 2 faces : collage



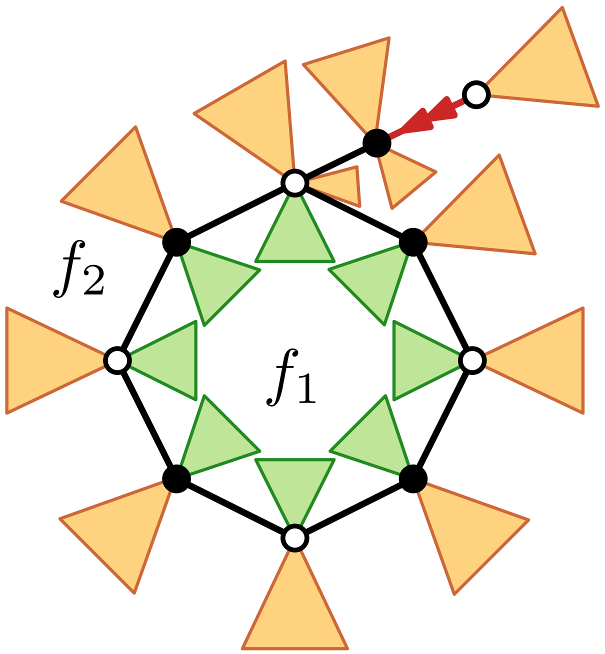
Cas à 2 faces : collage



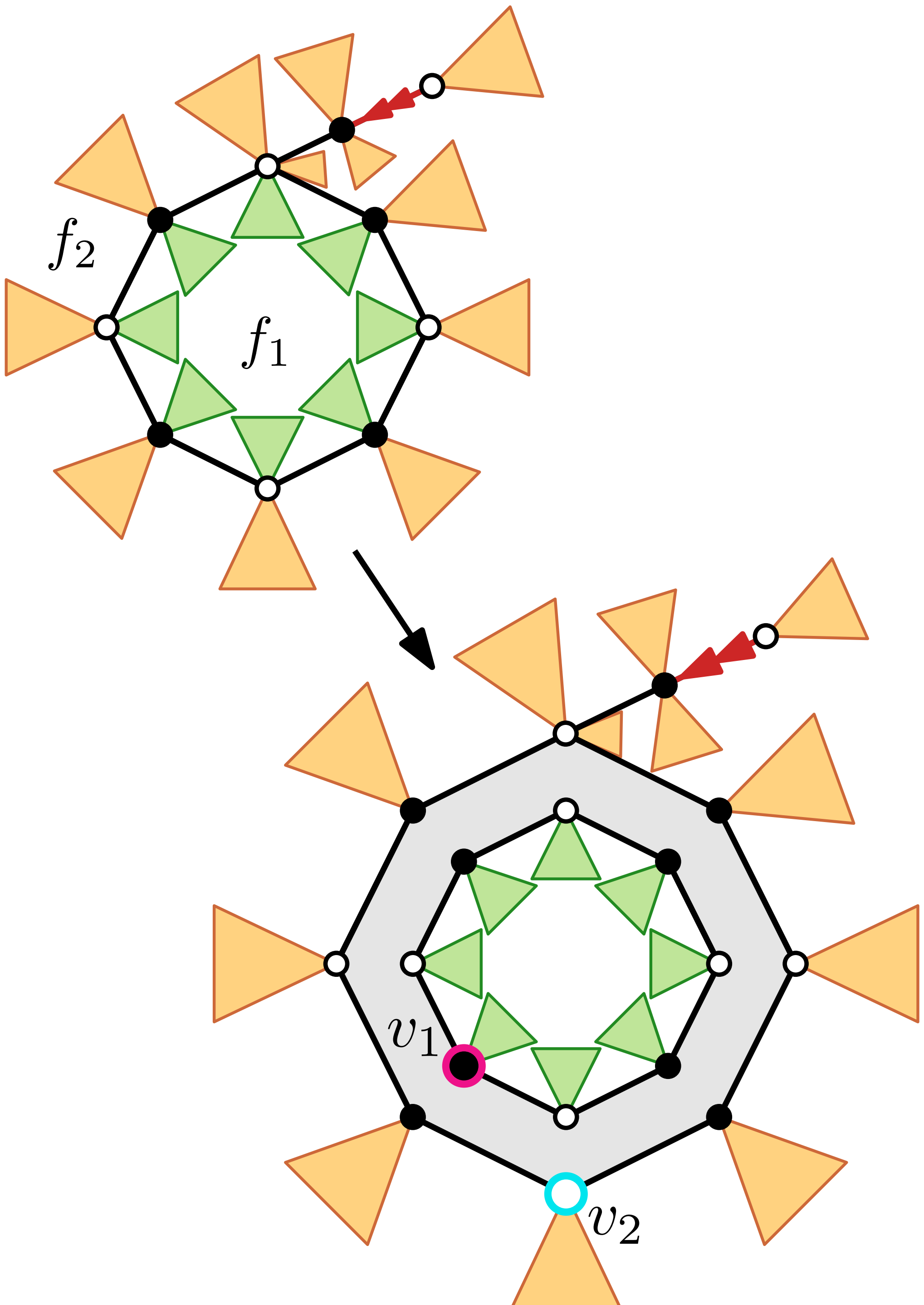
Cas à 2 faces : collage



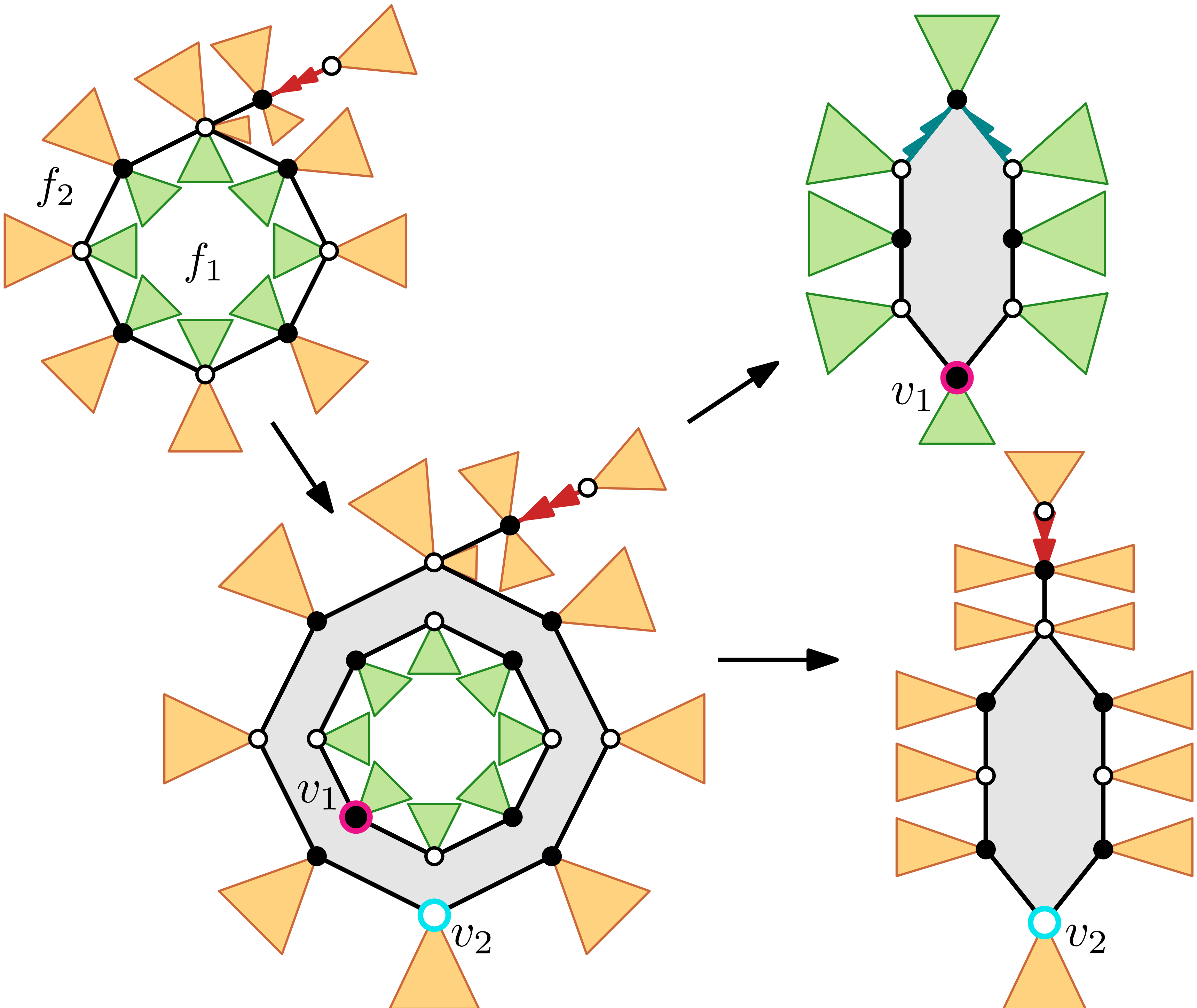
Cas à 2 faces : coupe



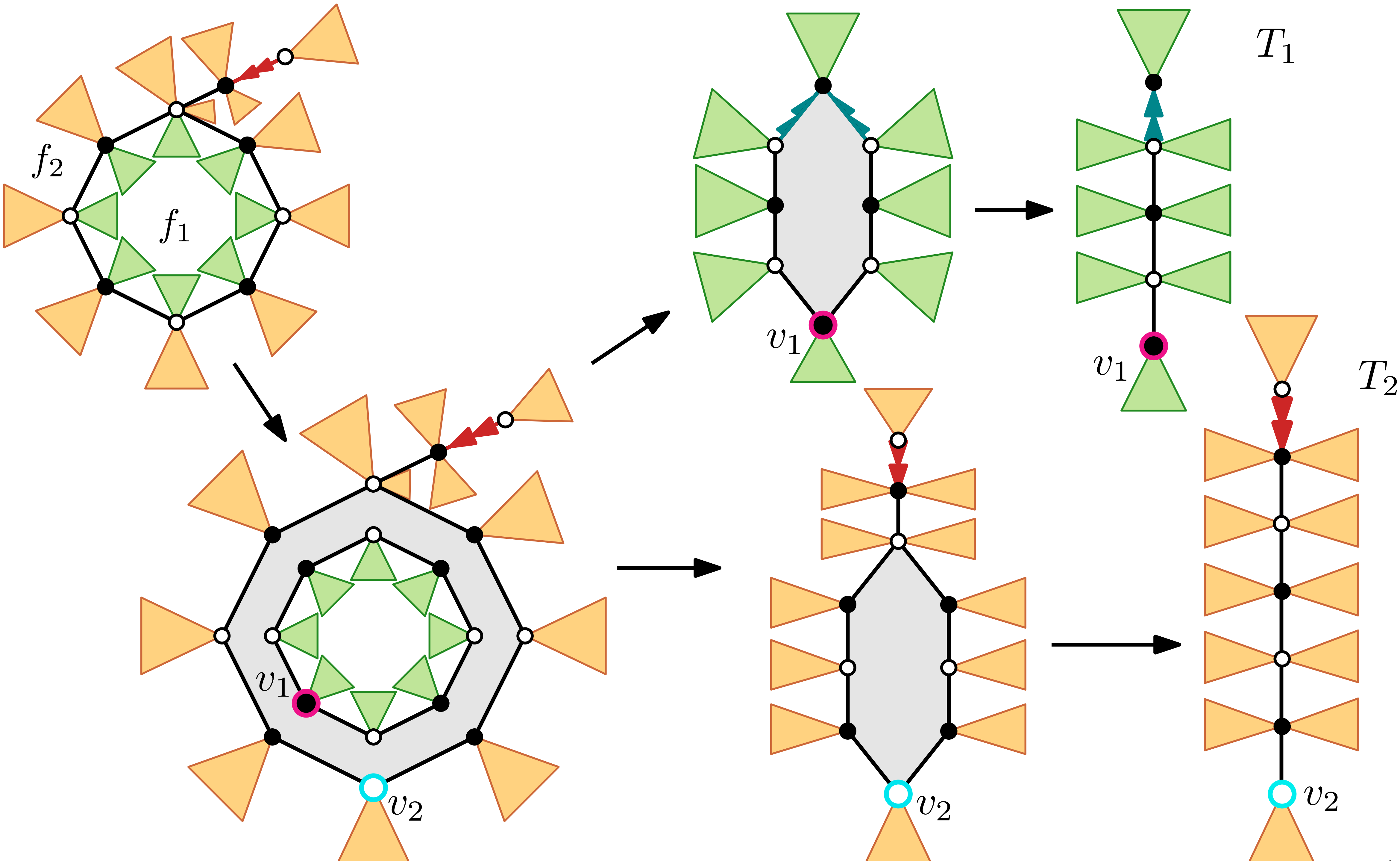
Cas à 2 faces : coupe



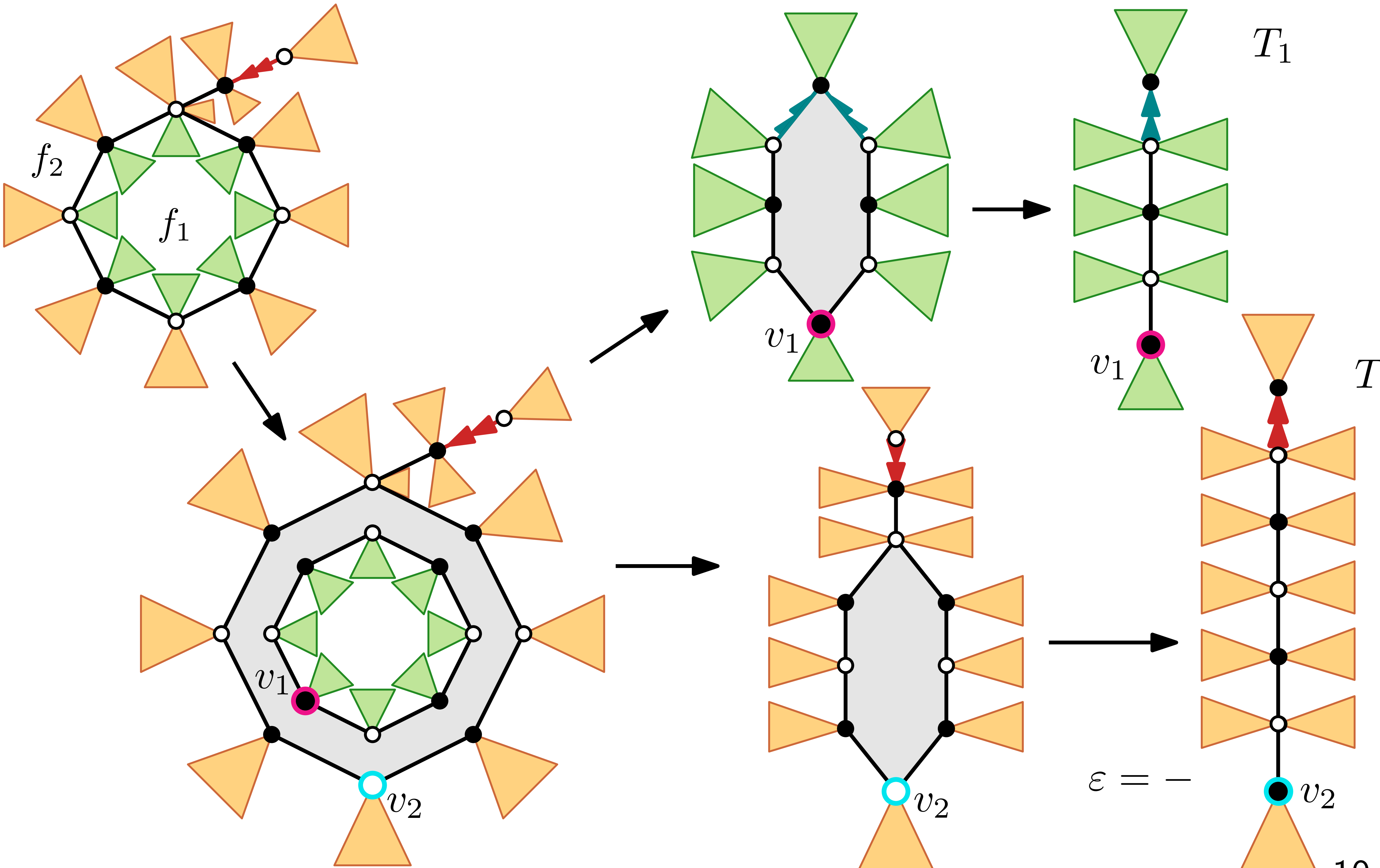
Cas à 2 faces : coupe



Cas à 2 faces : coupe



Cas à 2 faces : coupe



Cas général

$$4(f(\mathbf{d})-1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

Problèmes :

- Collage : choix des chemins d'ouverture ?
- Coupe : choix du cycle de coupe ?

Cas général

$$4(f(\mathbf{d})-1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

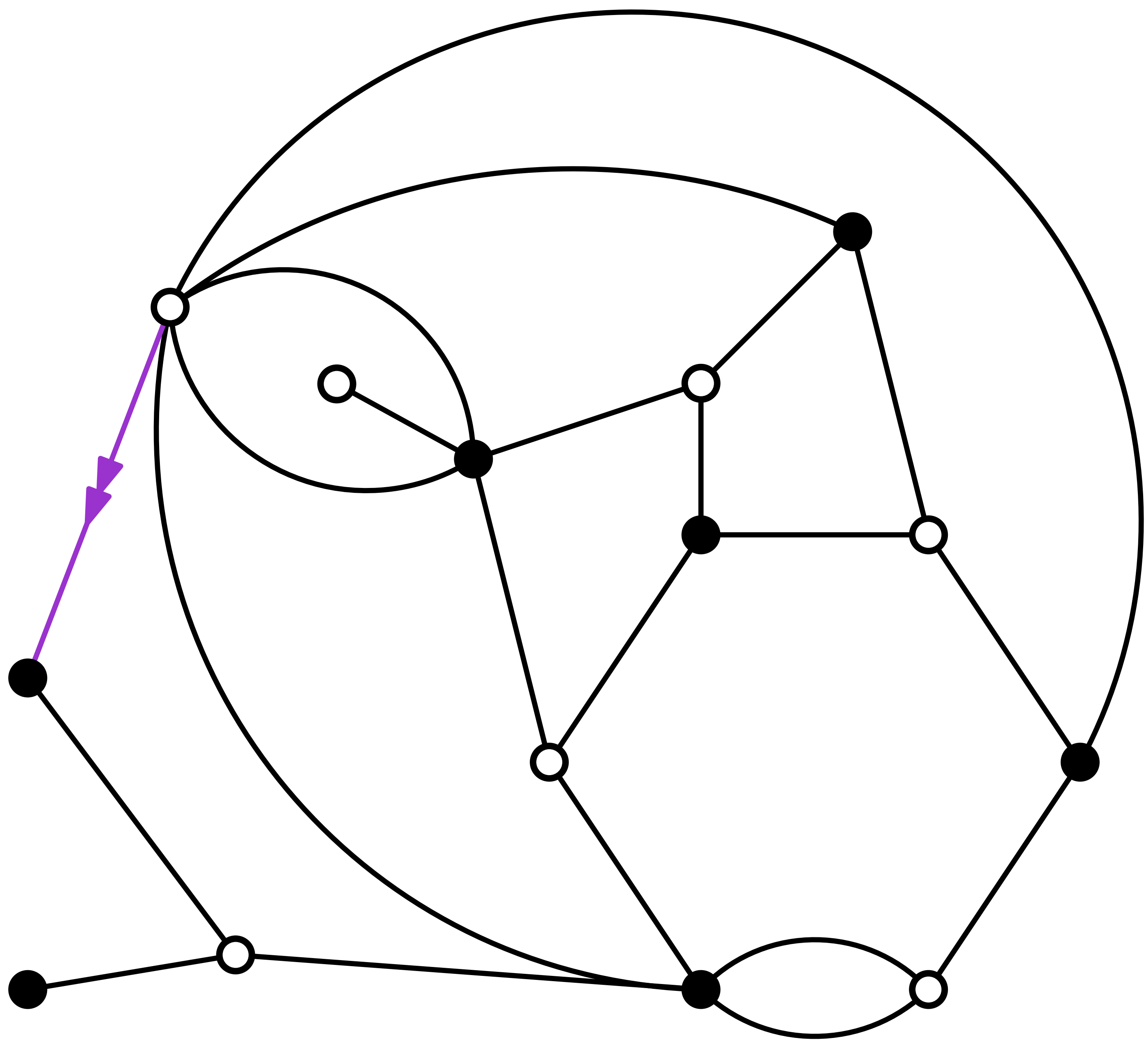
Problèmes :

- Collage : choix des chemins d'ouverture ?
- Coupe : choix du cycle de coupe ?

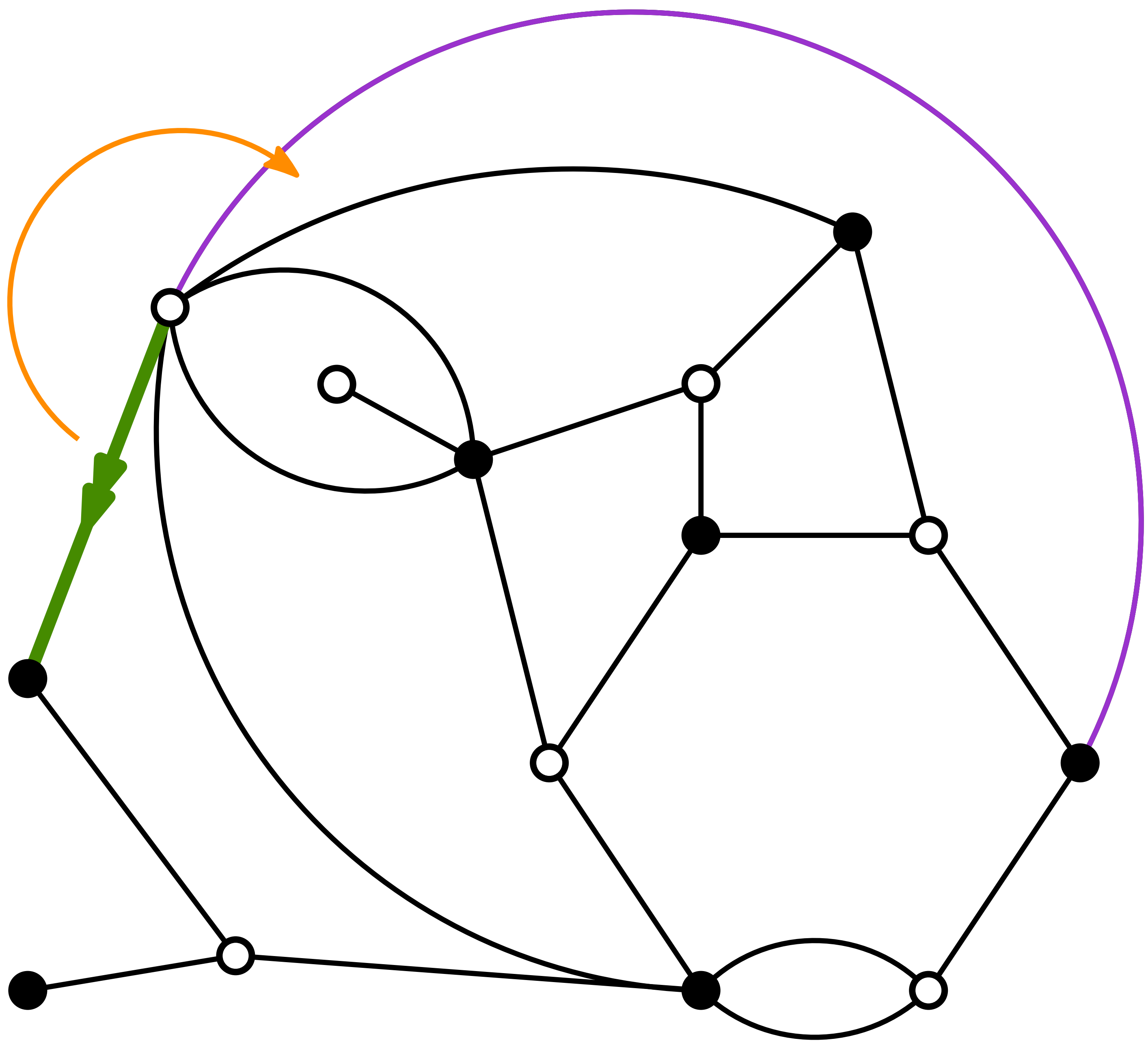
$\Rightarrow$Arbre couvrant.

$\hookrightarrow 2(f(\mathbf{d})-1) =$ arête orientée n'appartenant pas à l'arbre couvrant.

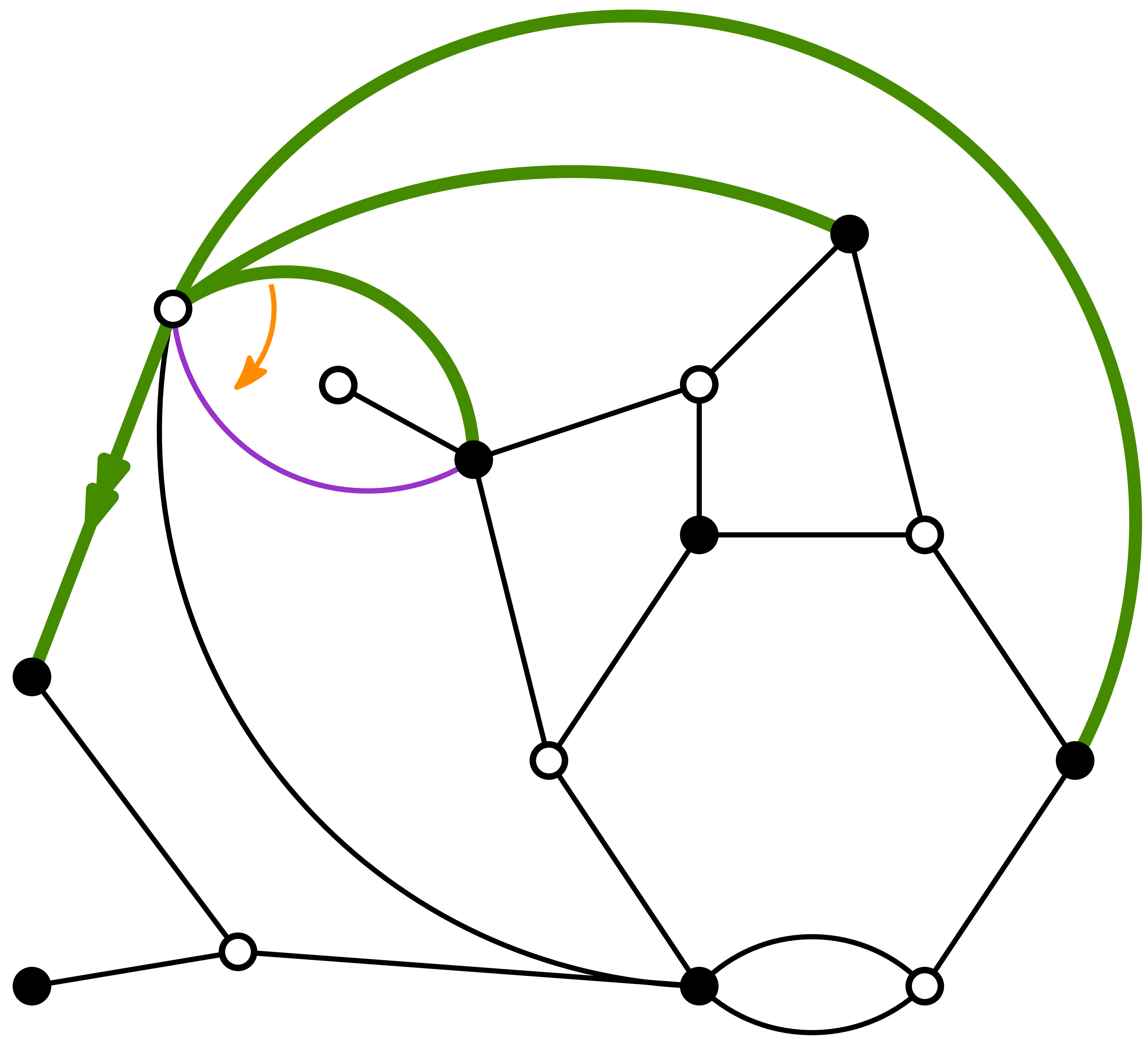
Arbre de parcours en largeur



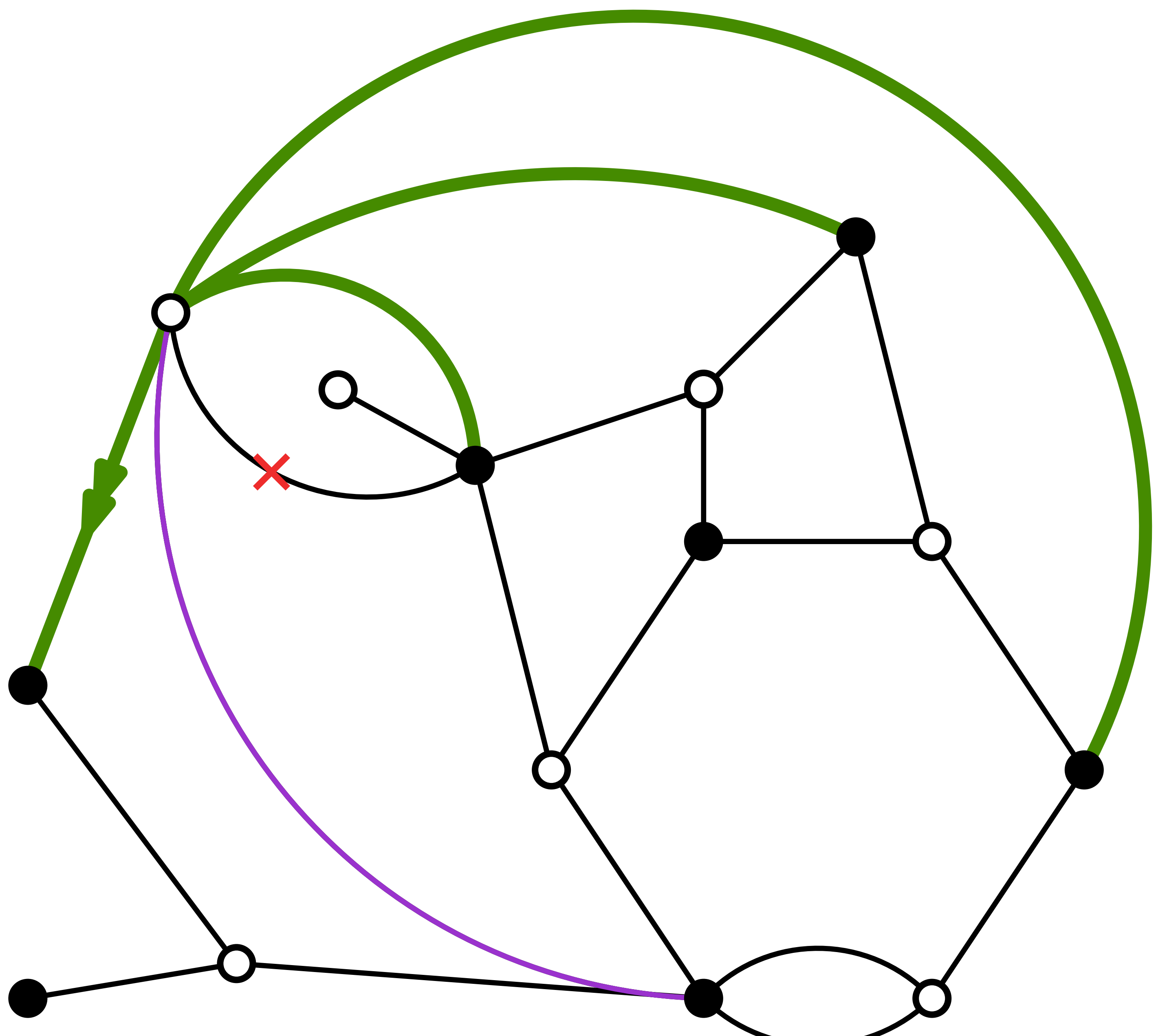
Arbre de parcours en largeur



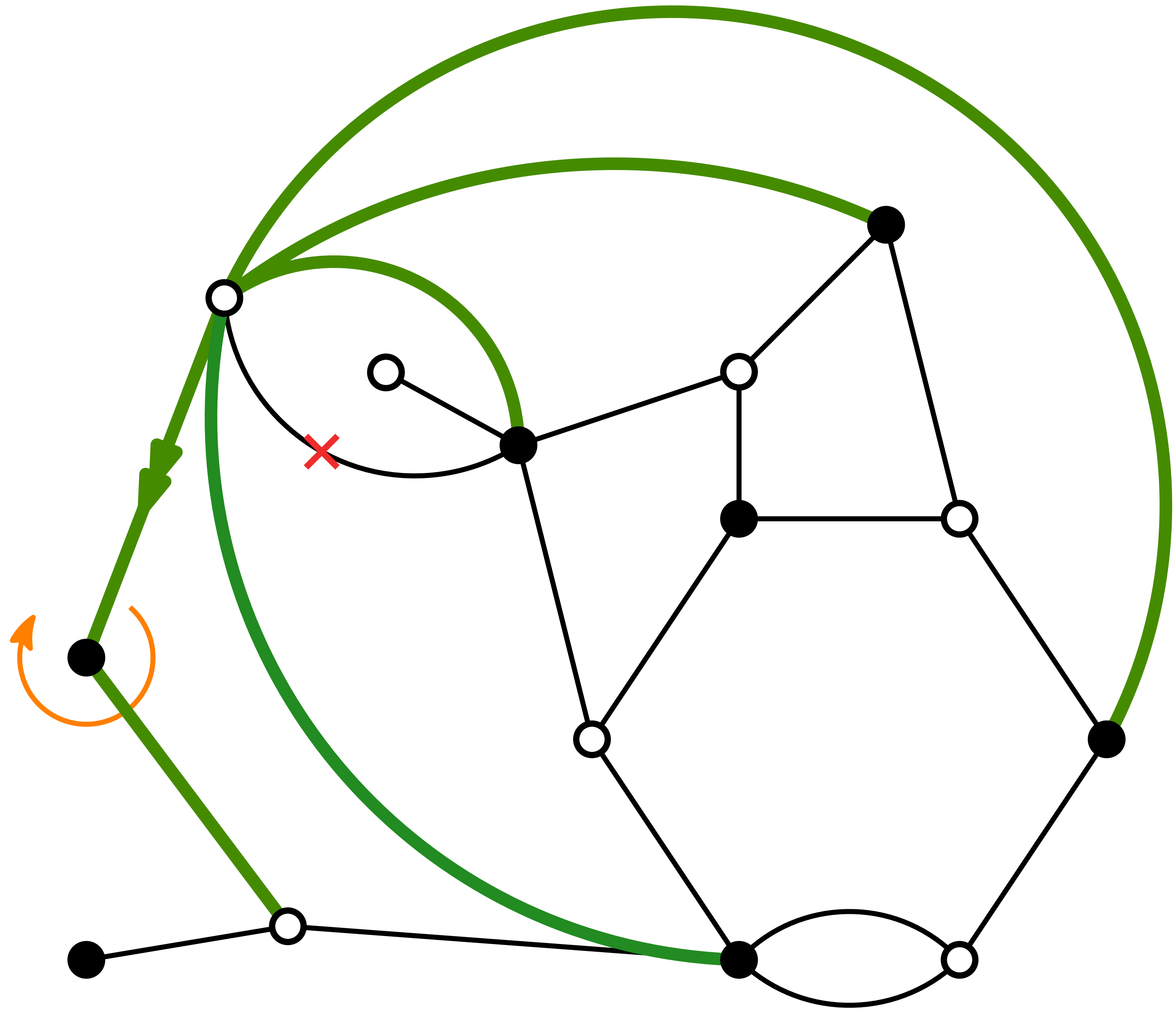
Arbre de parcours en largeur



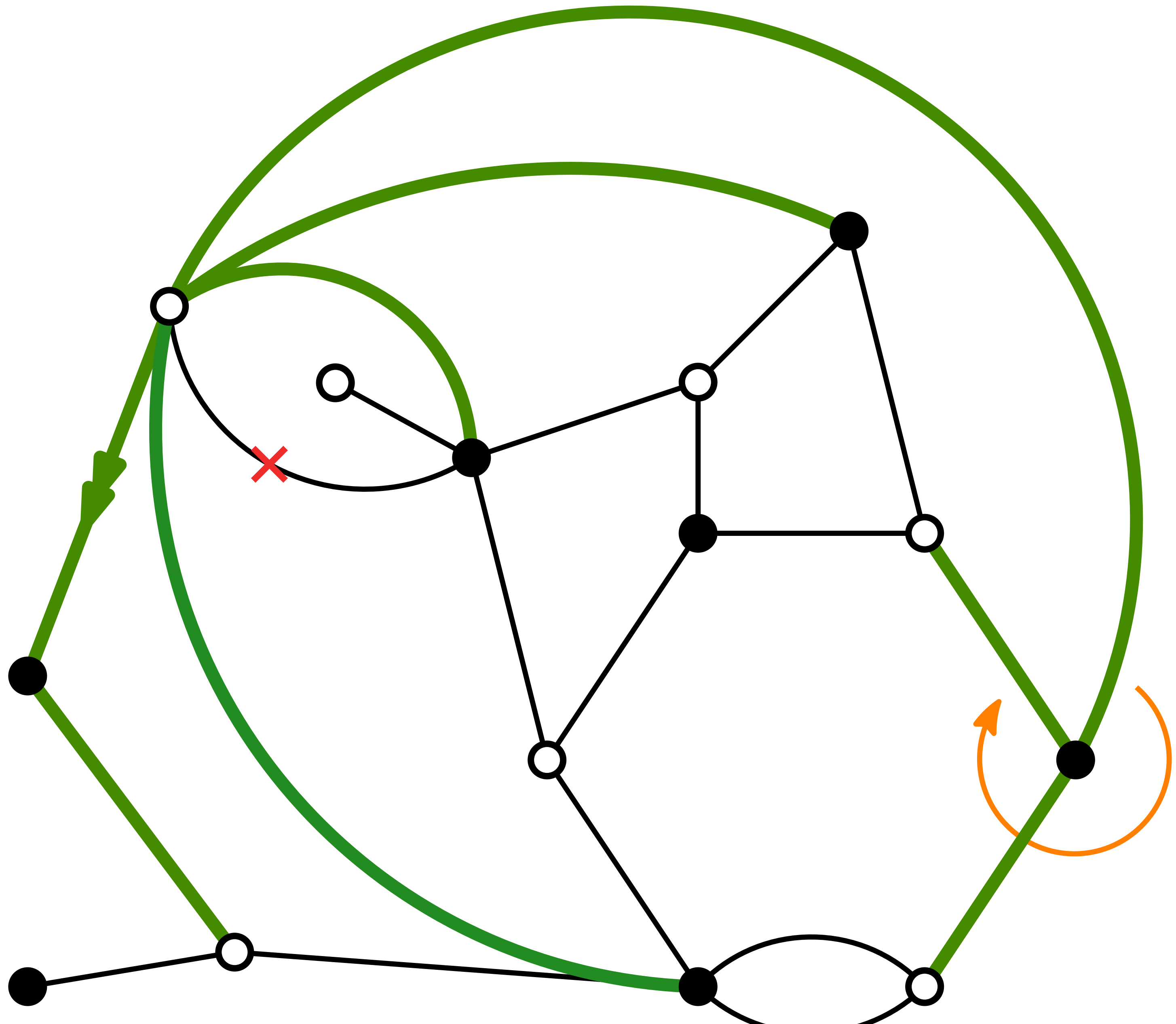
Arbre de parcours en largeur



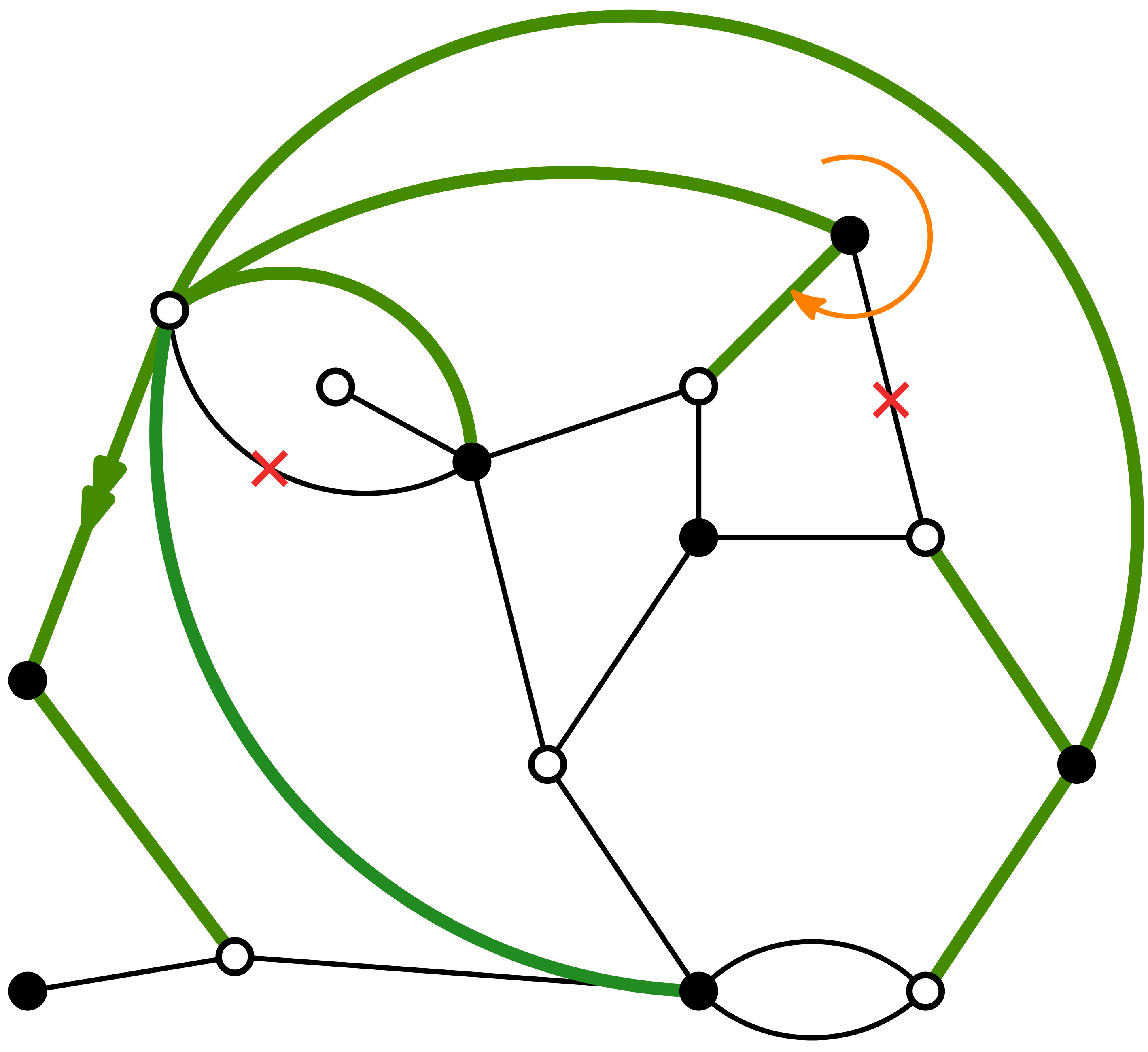
Arbre de parcours en largeur



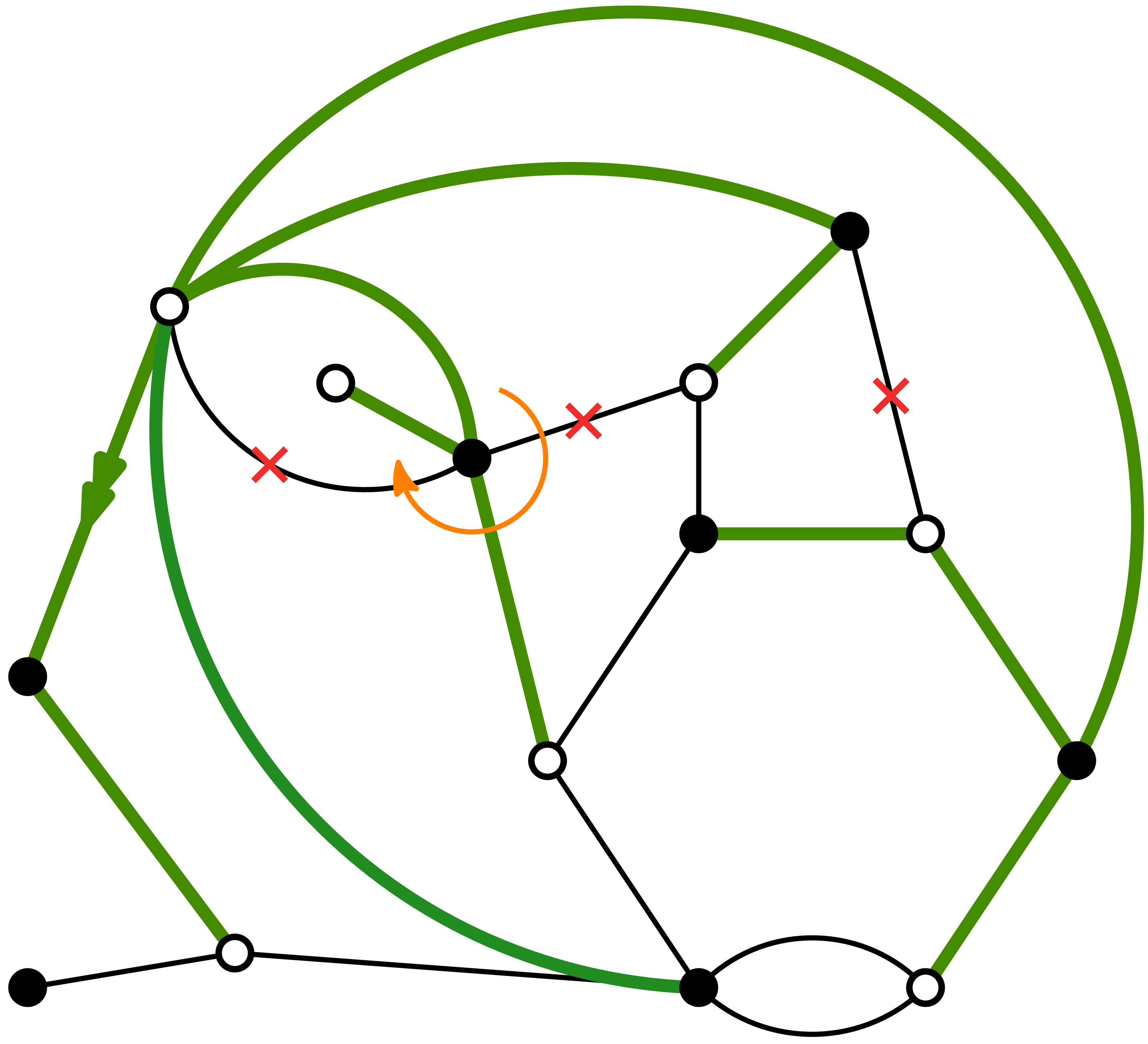
Arbre de parcours en largeur



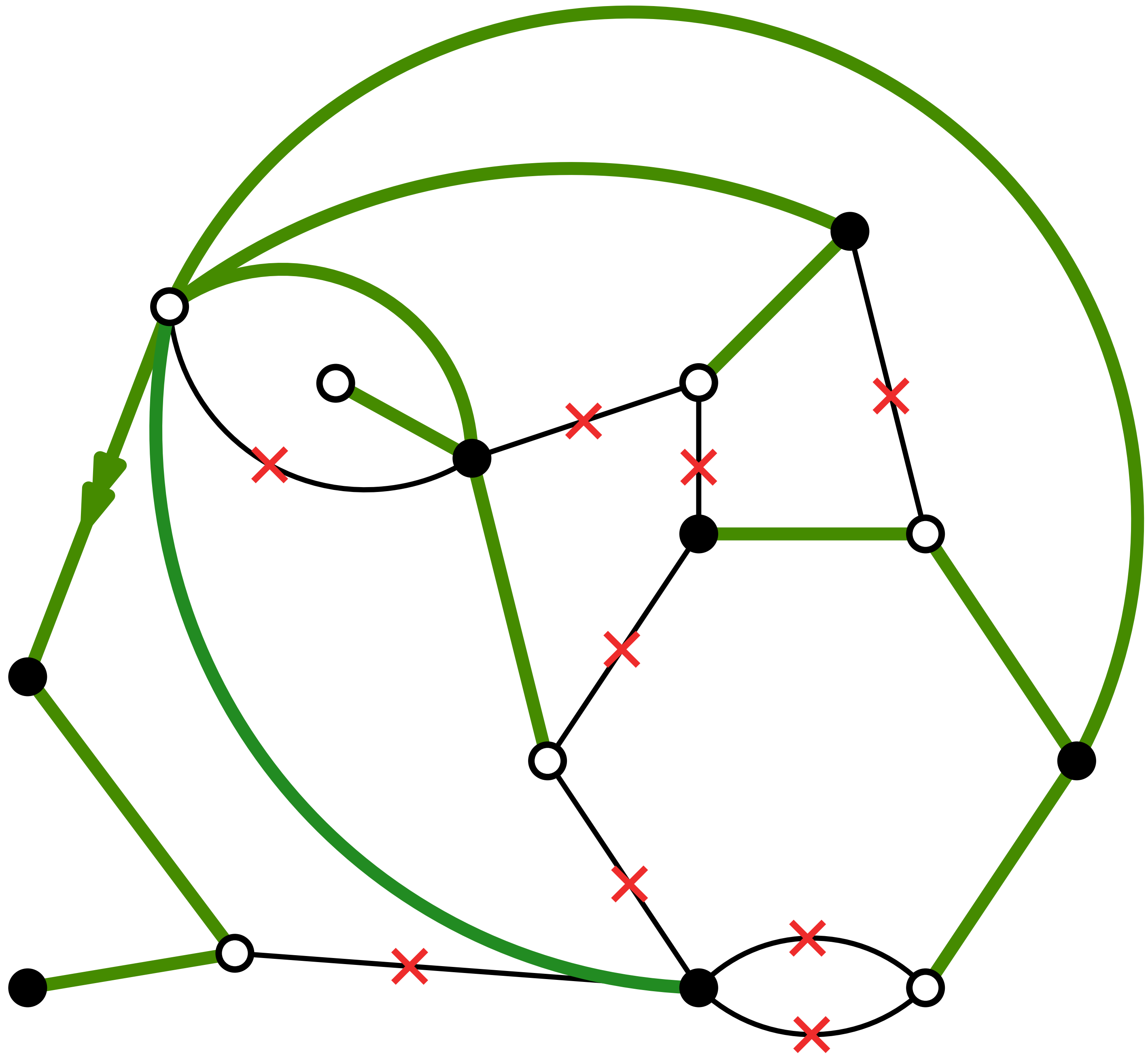
Arbre de parcours en largeur



Arbre de parcours en largeur

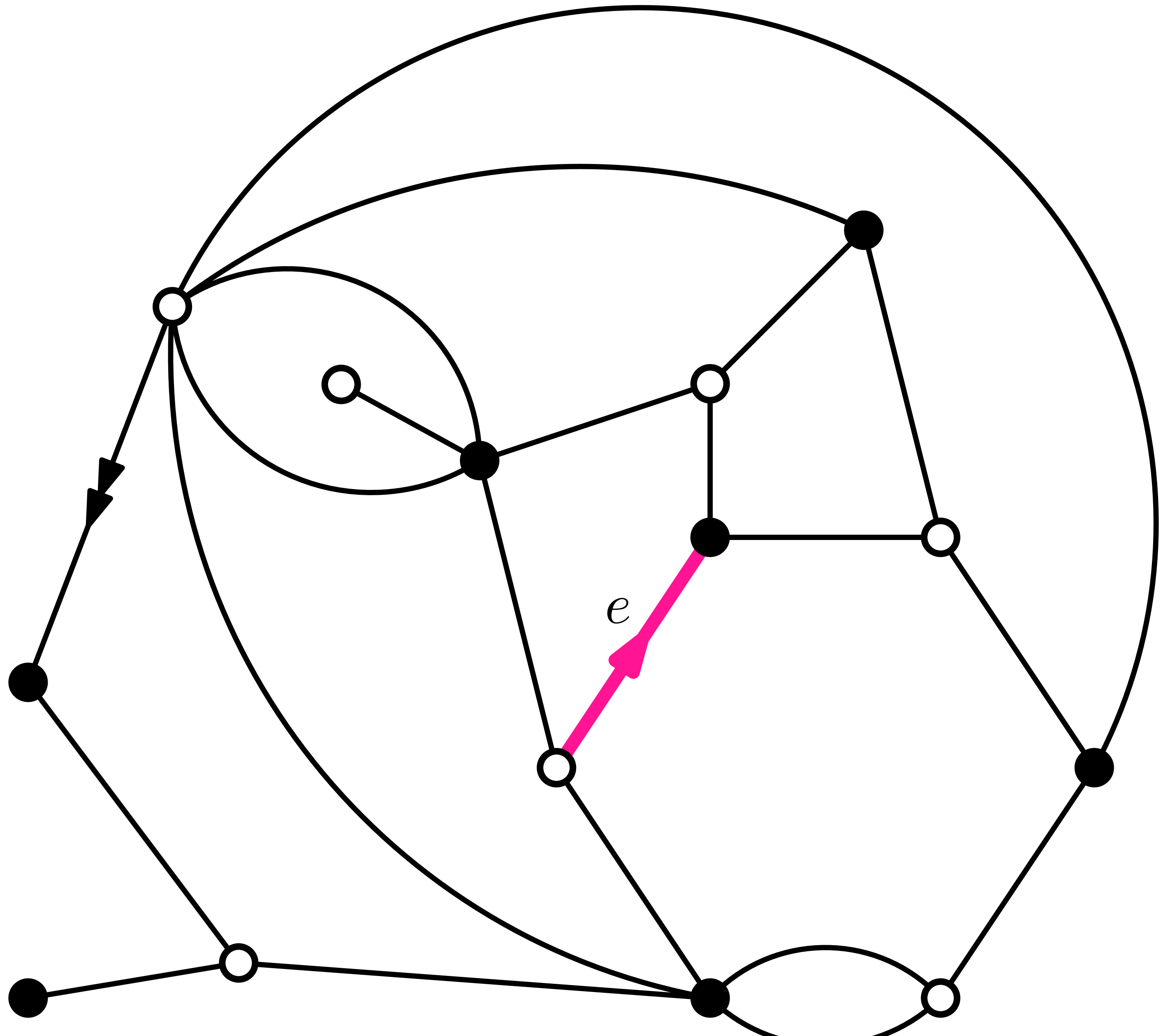


Arbre de parcours en largeur



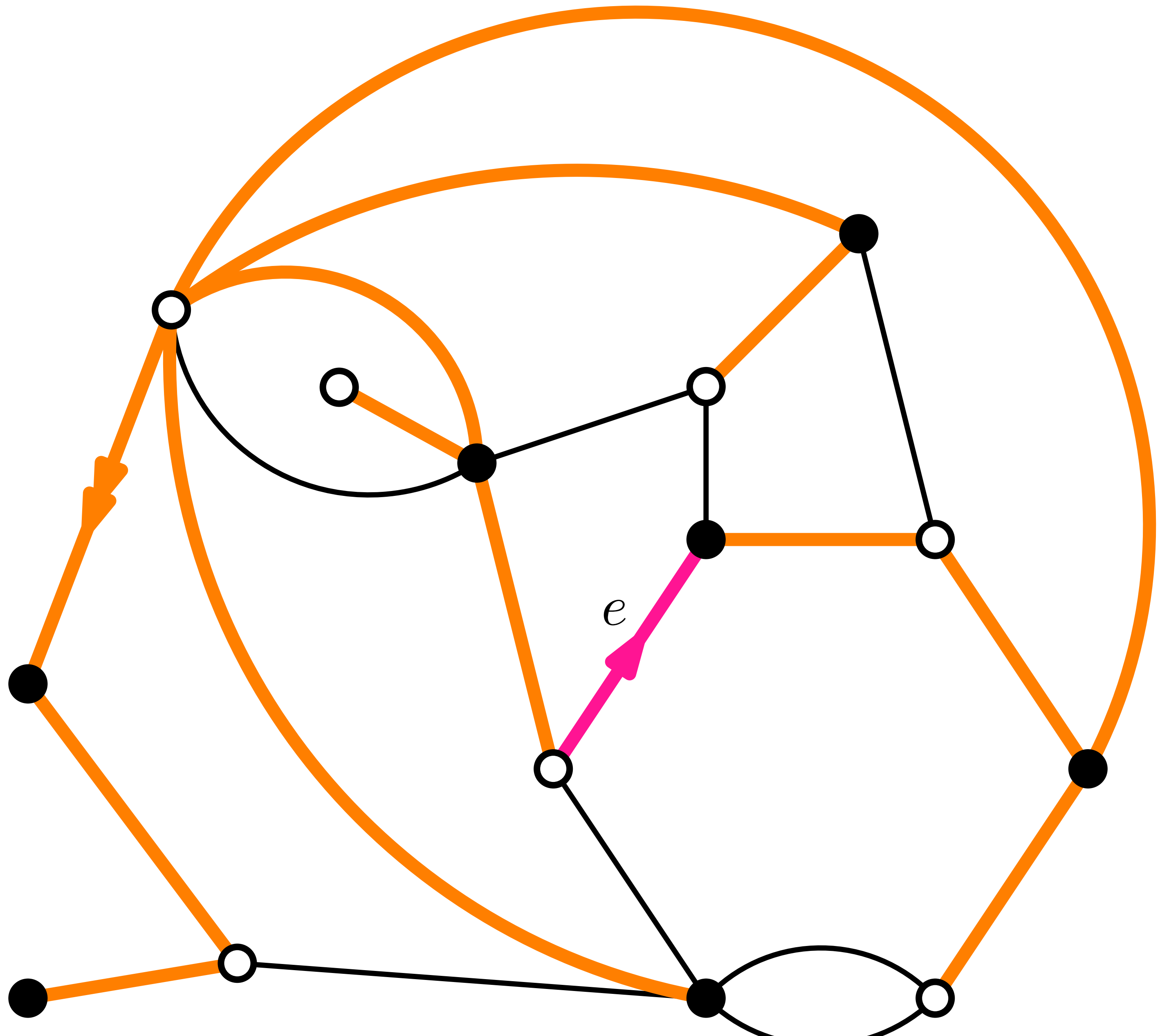
Cas général : coupe

$(M, -)$



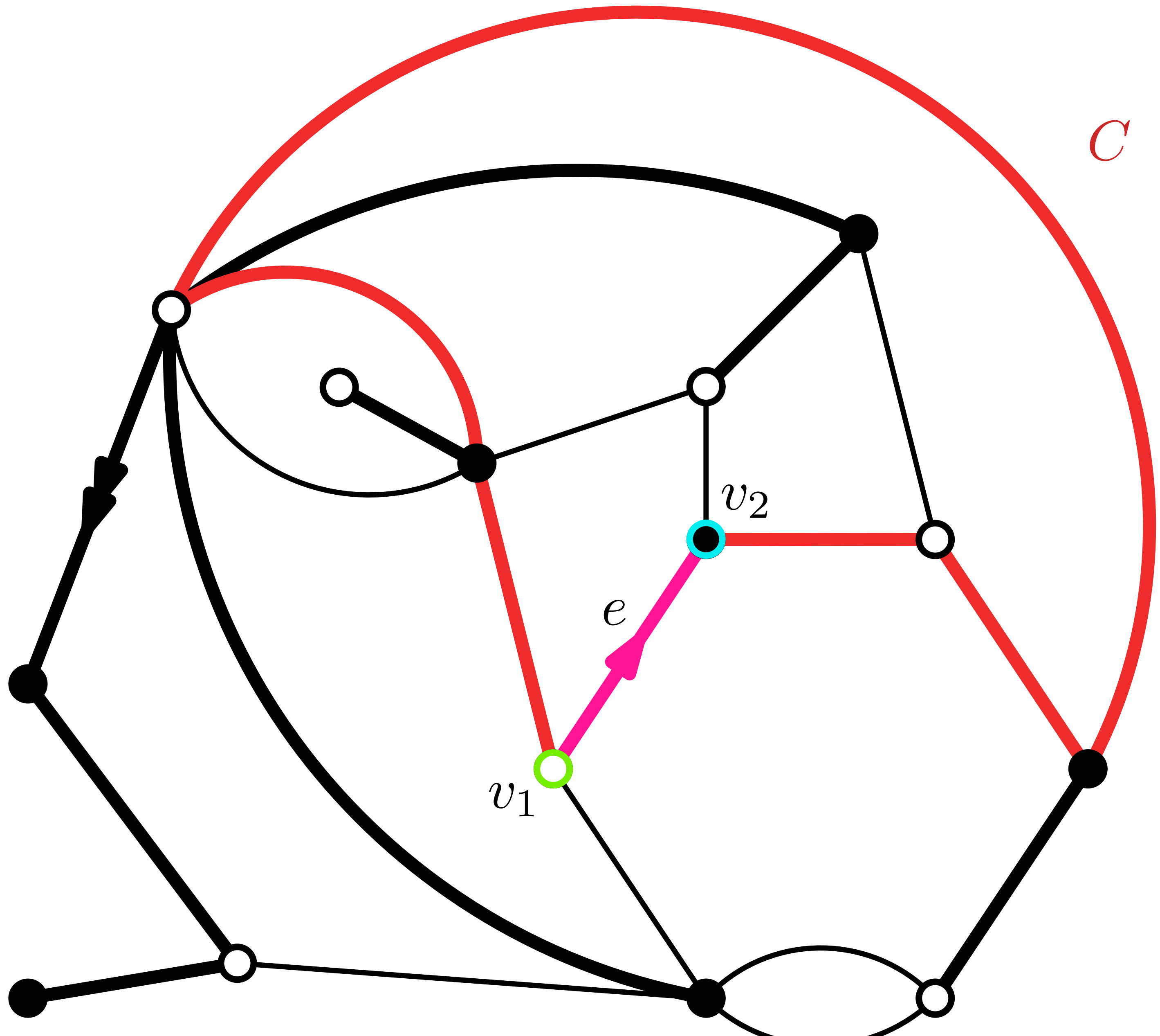
Cas général : coupe

$(M, -)$

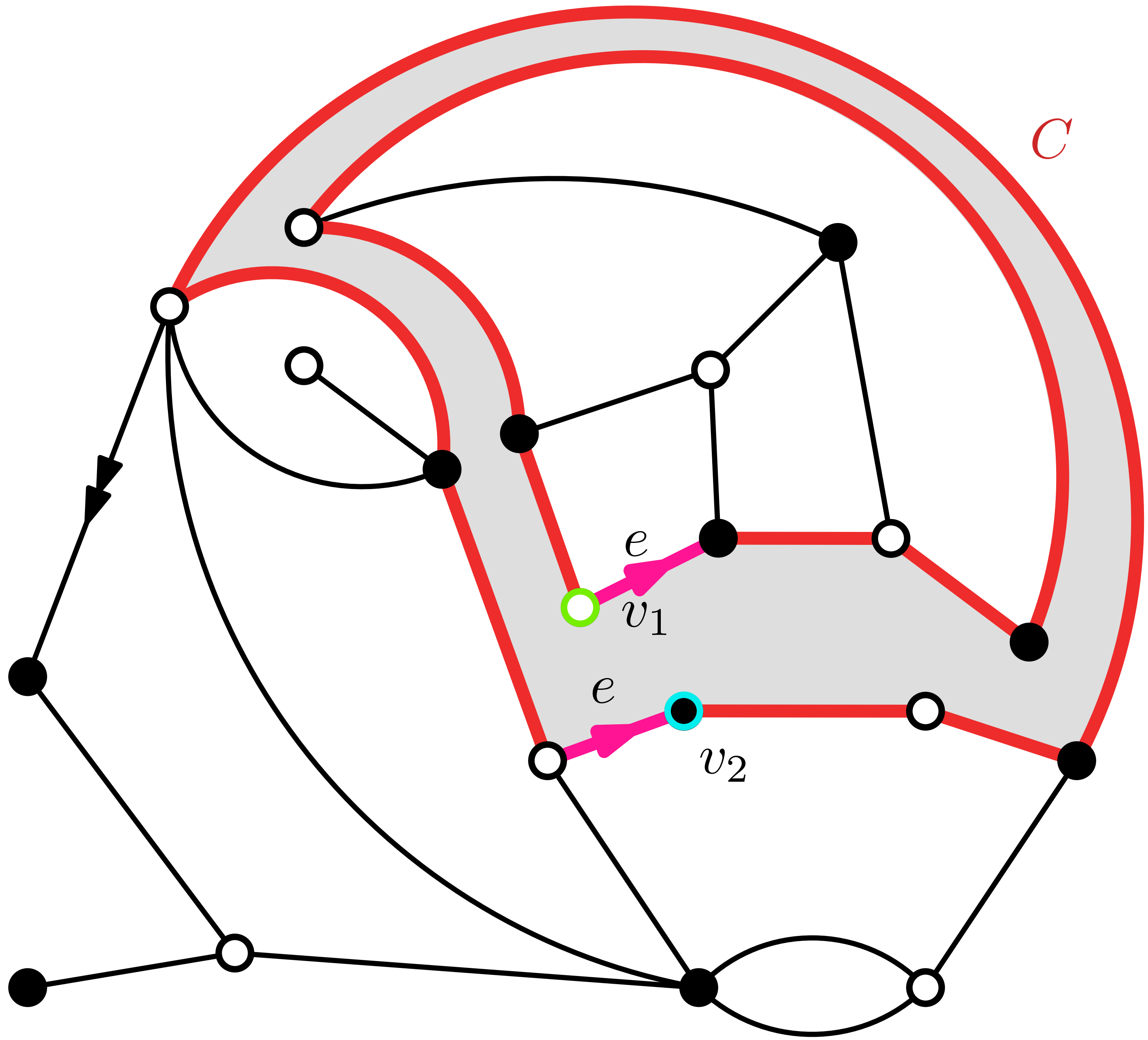


Cas général : coupe

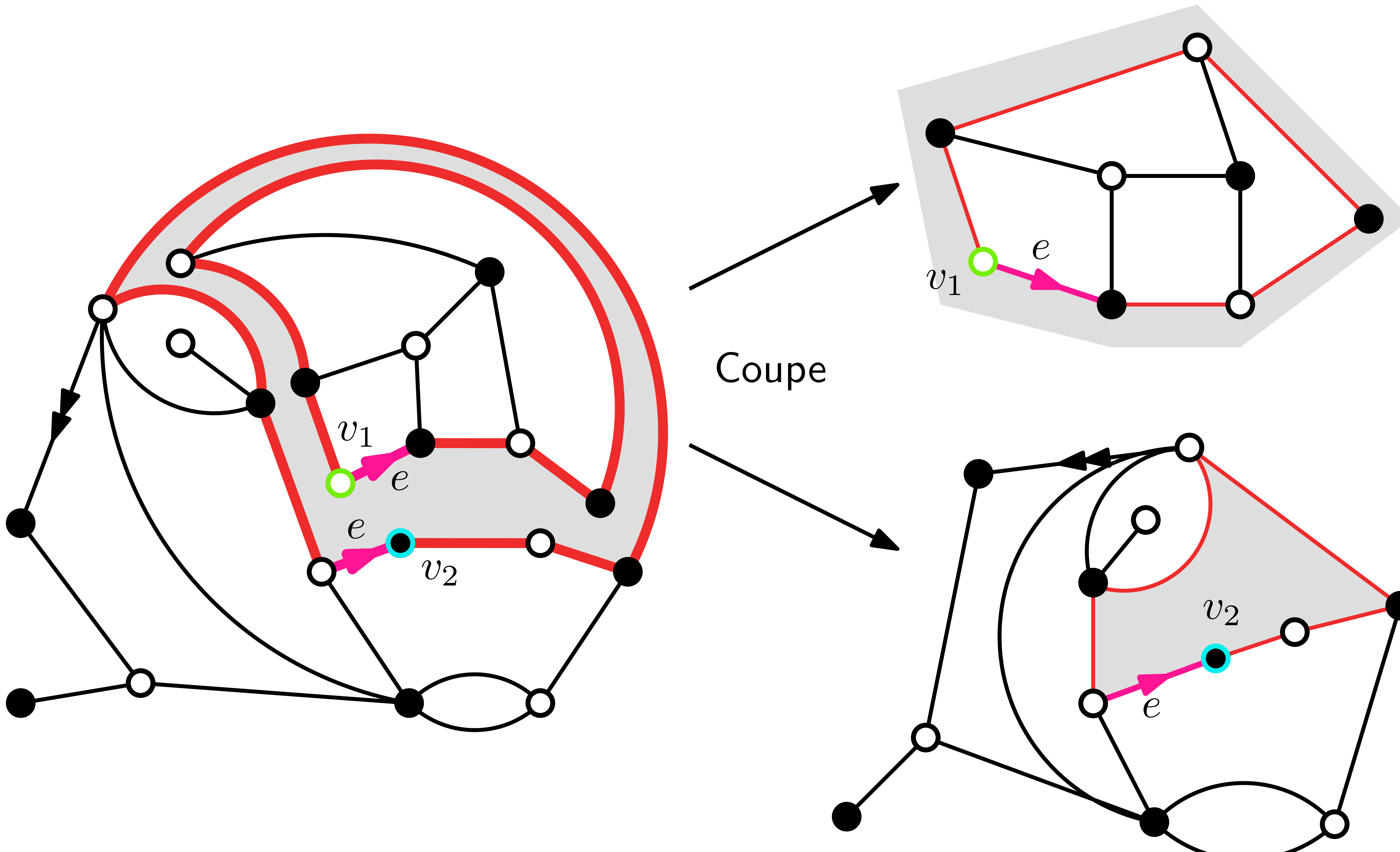
$(M, -)$



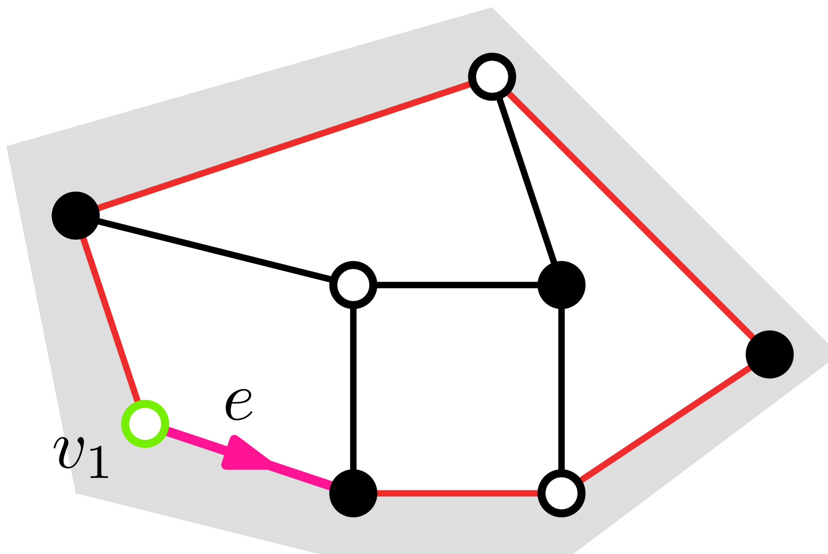
Cas général : coupe

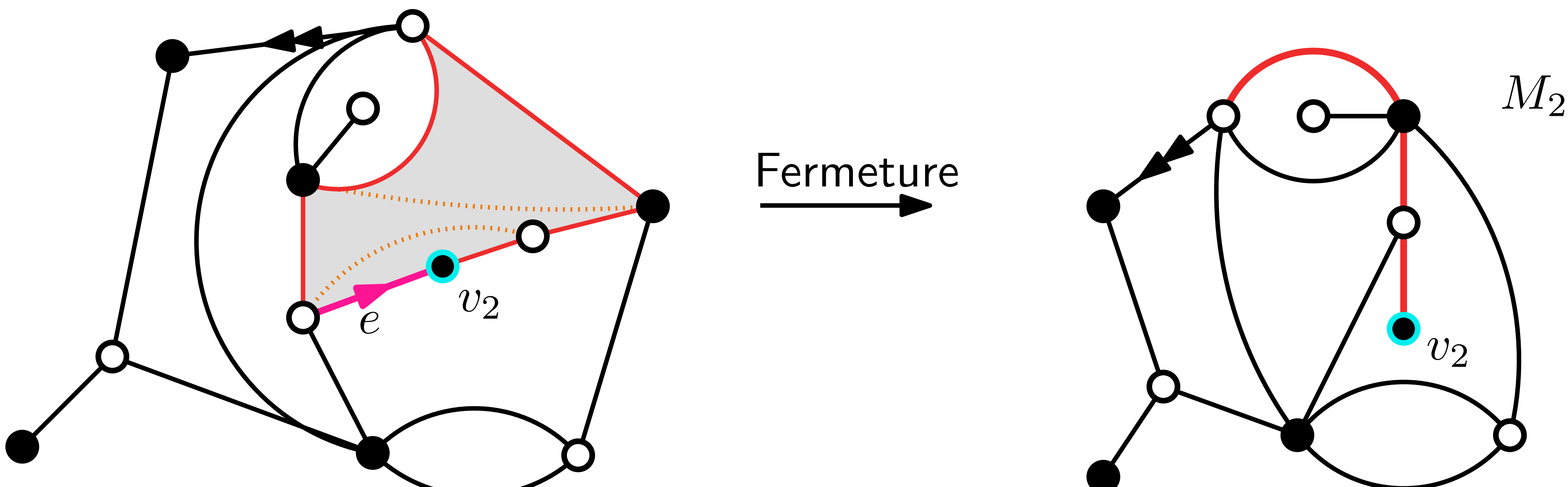


Cas général : coupe

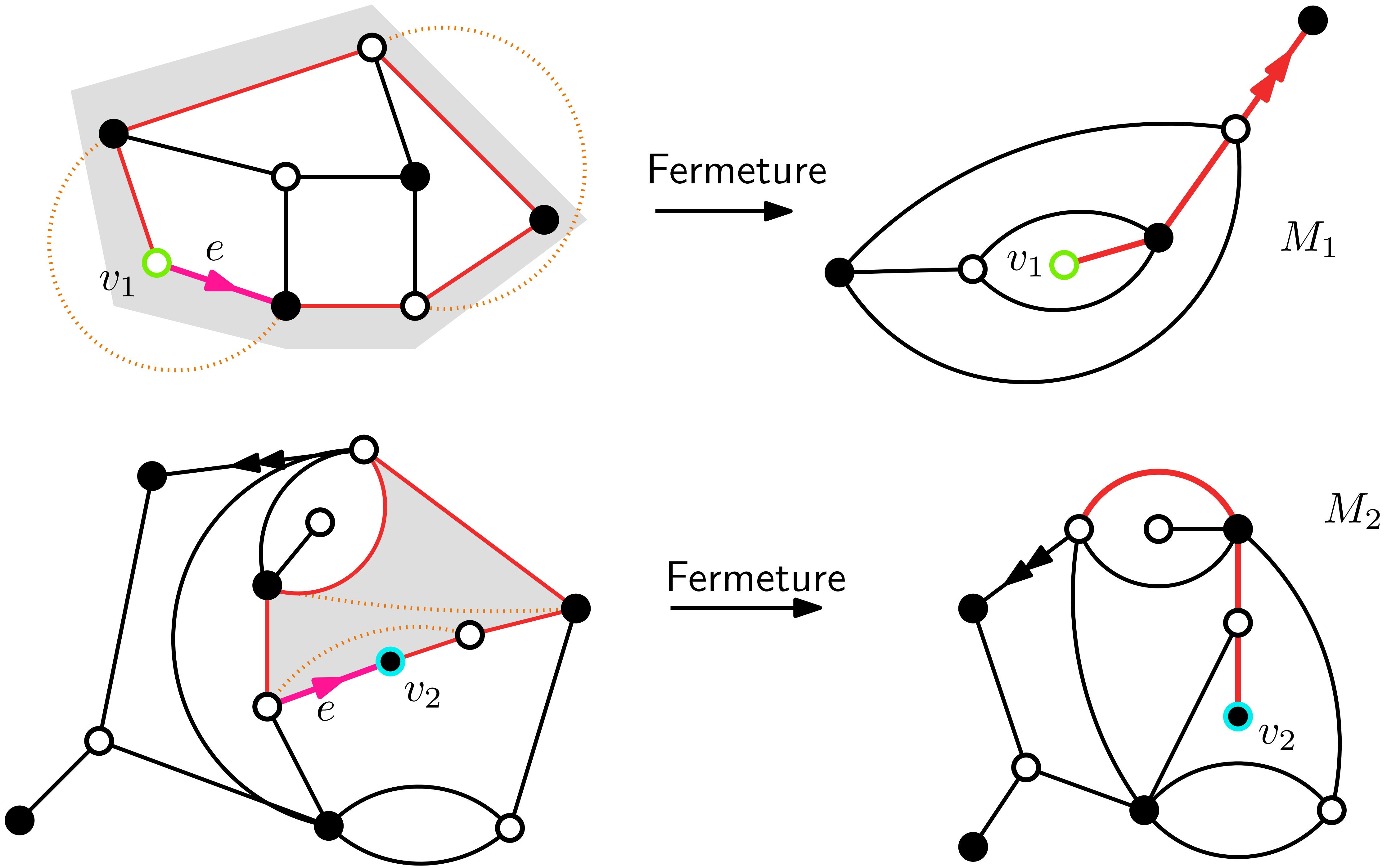


Cas général : coupe

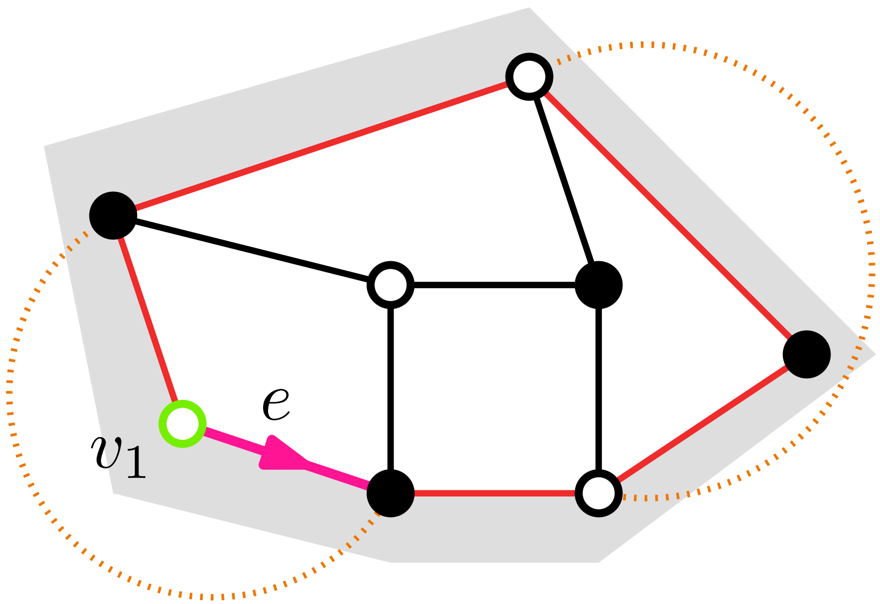




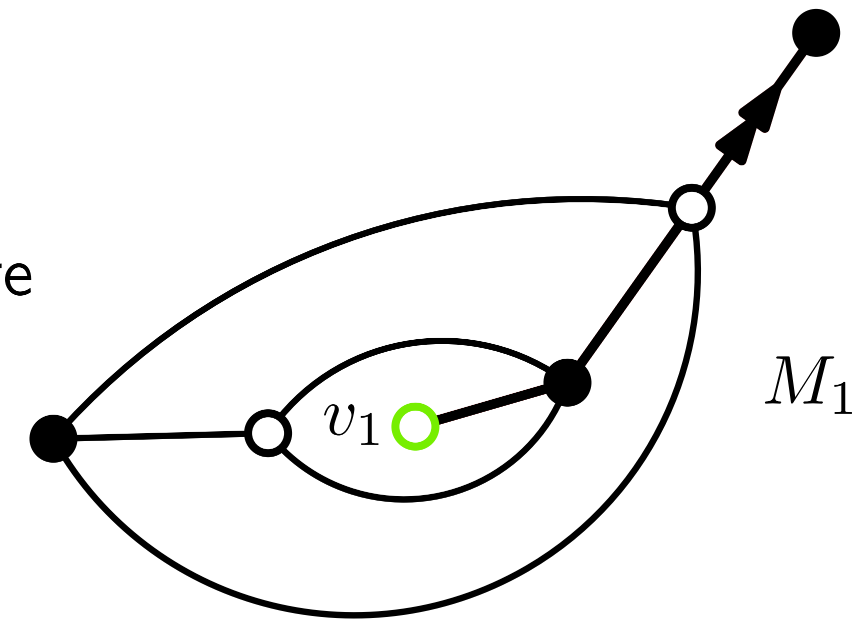
Cas général : coupe

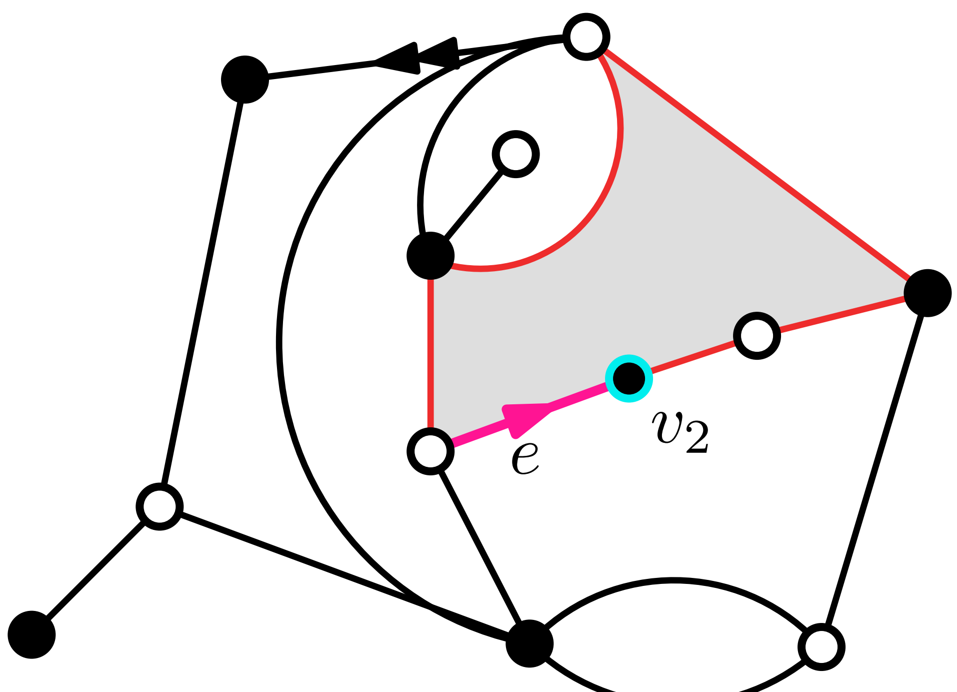


Cas général : coupe

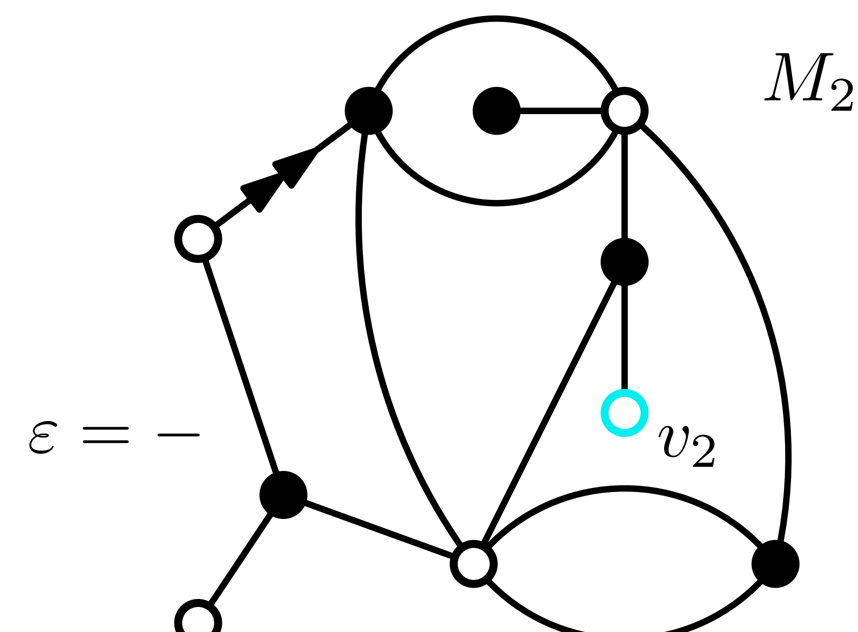


Fermeture

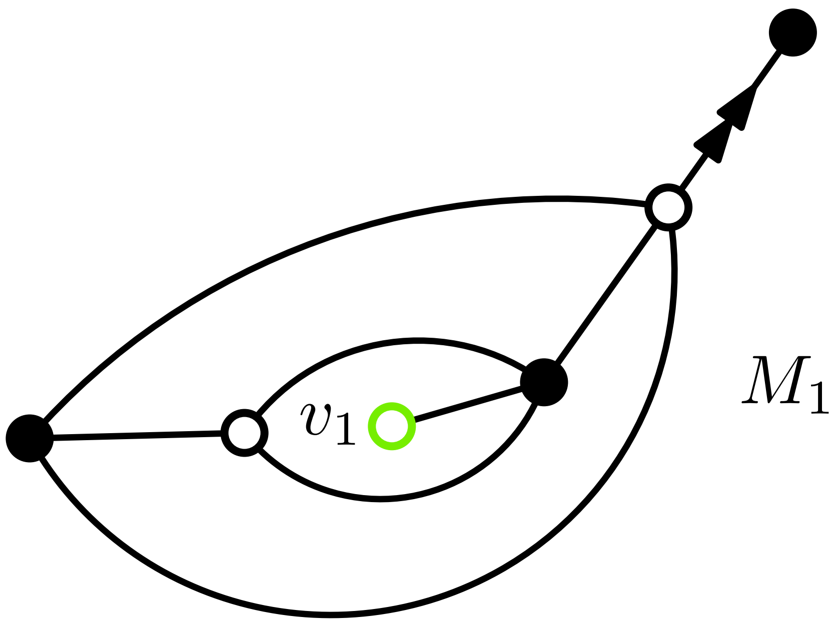


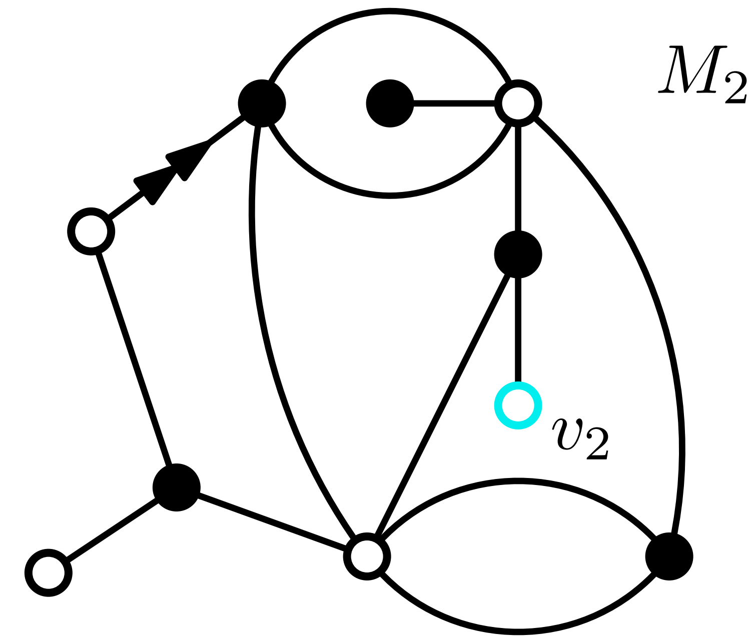


Fermeture

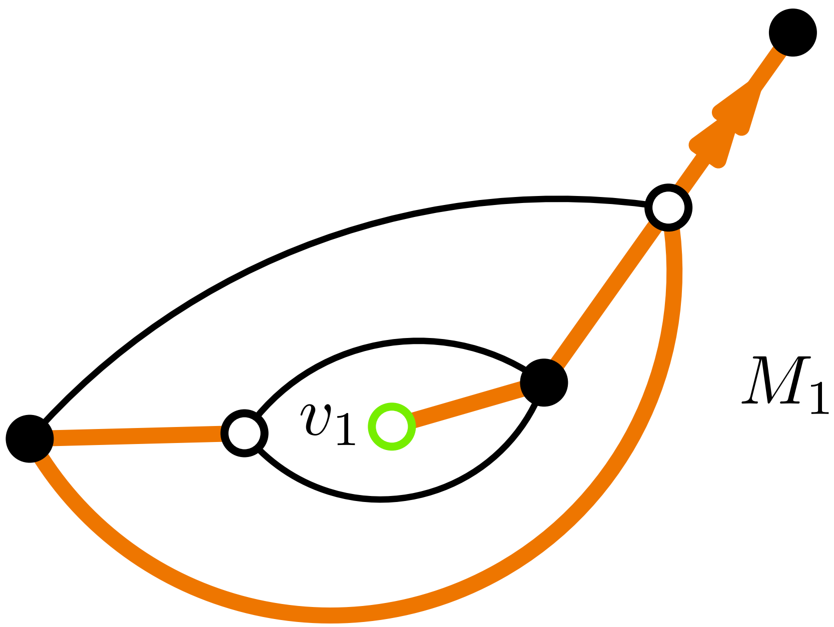


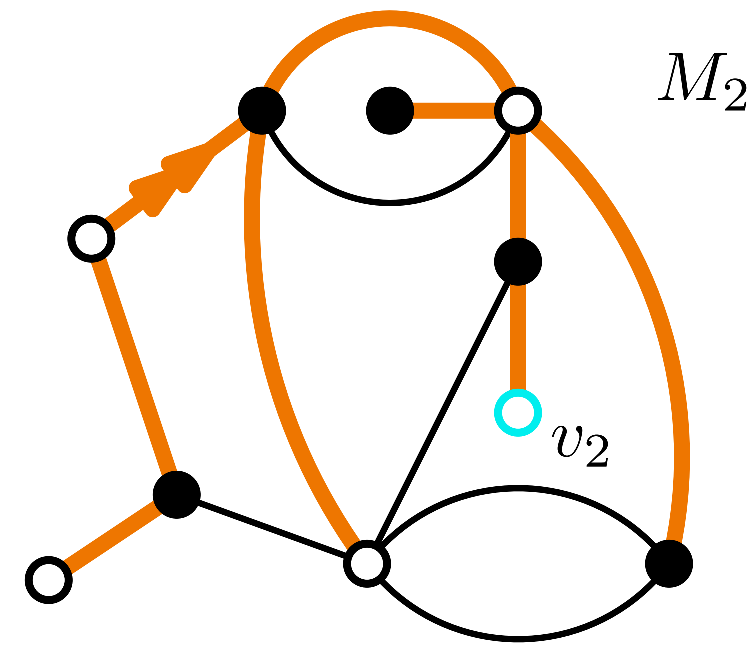
Cas général : collage



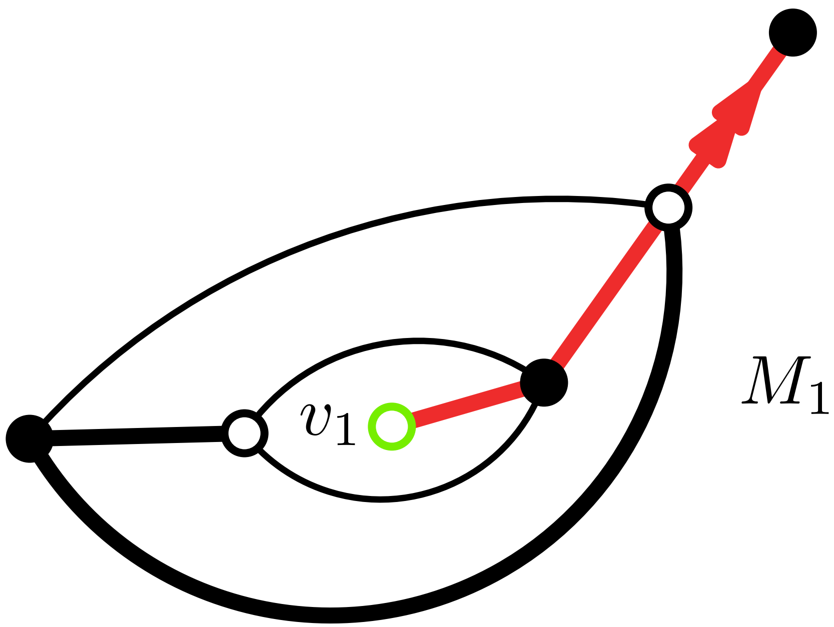


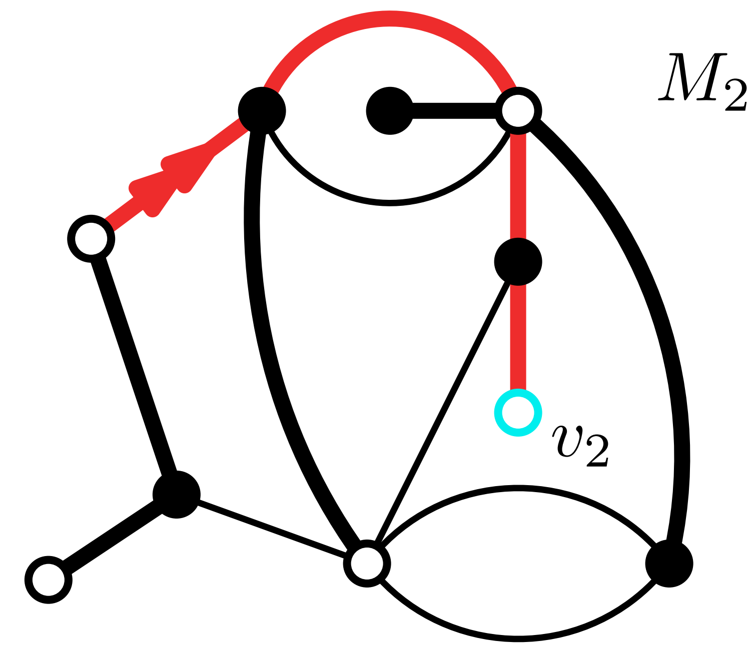
Cas général : collage



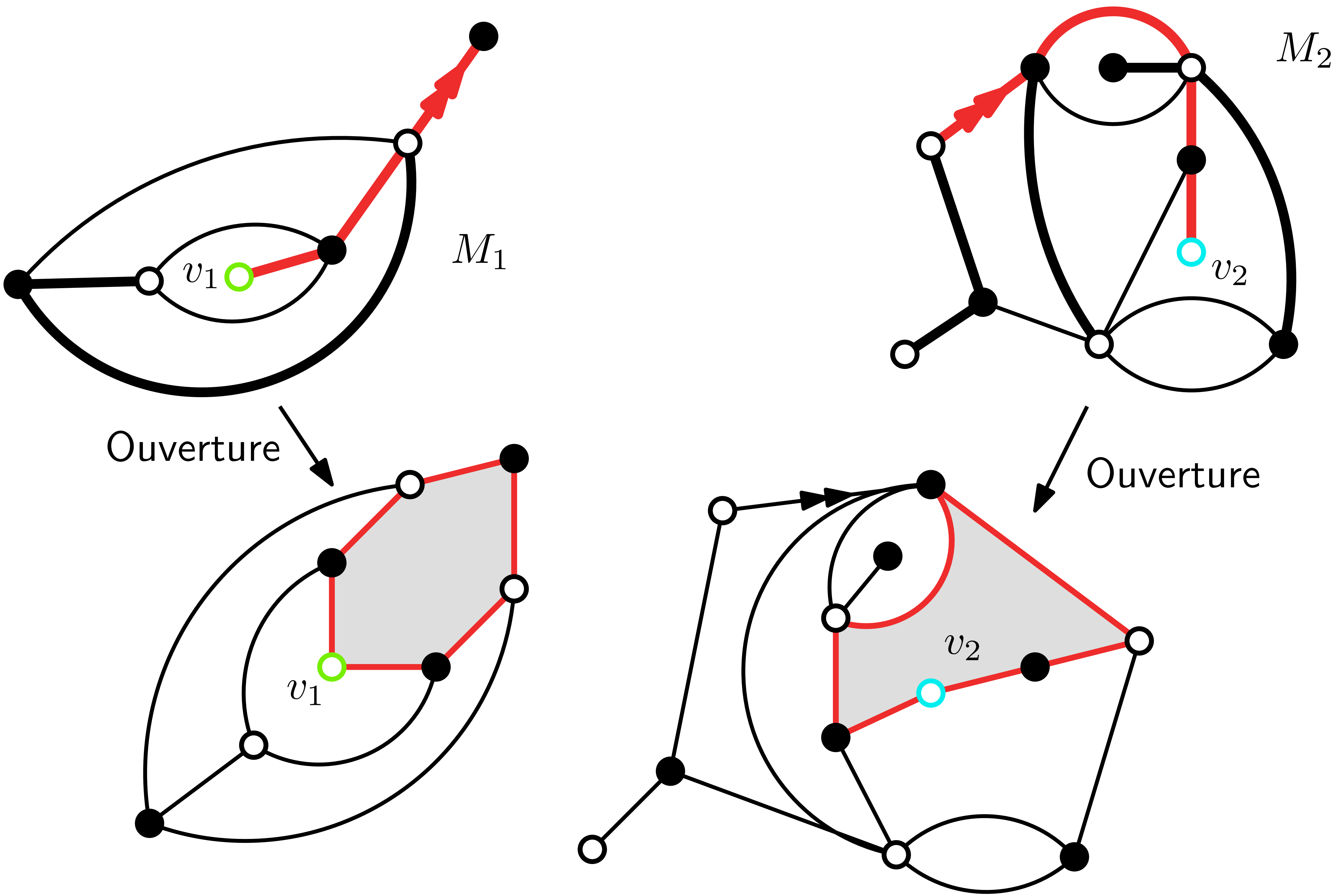


Cas général : collage

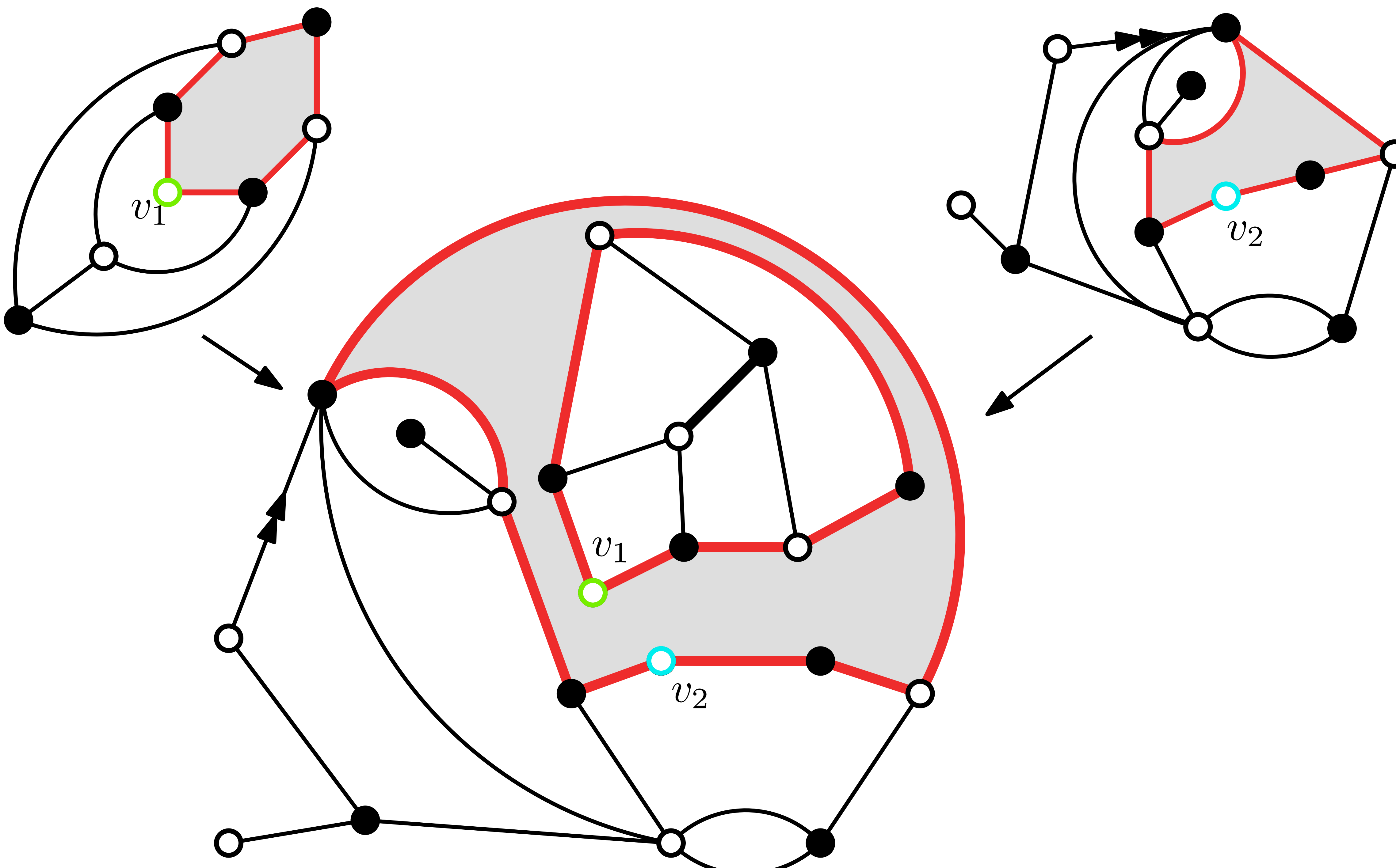




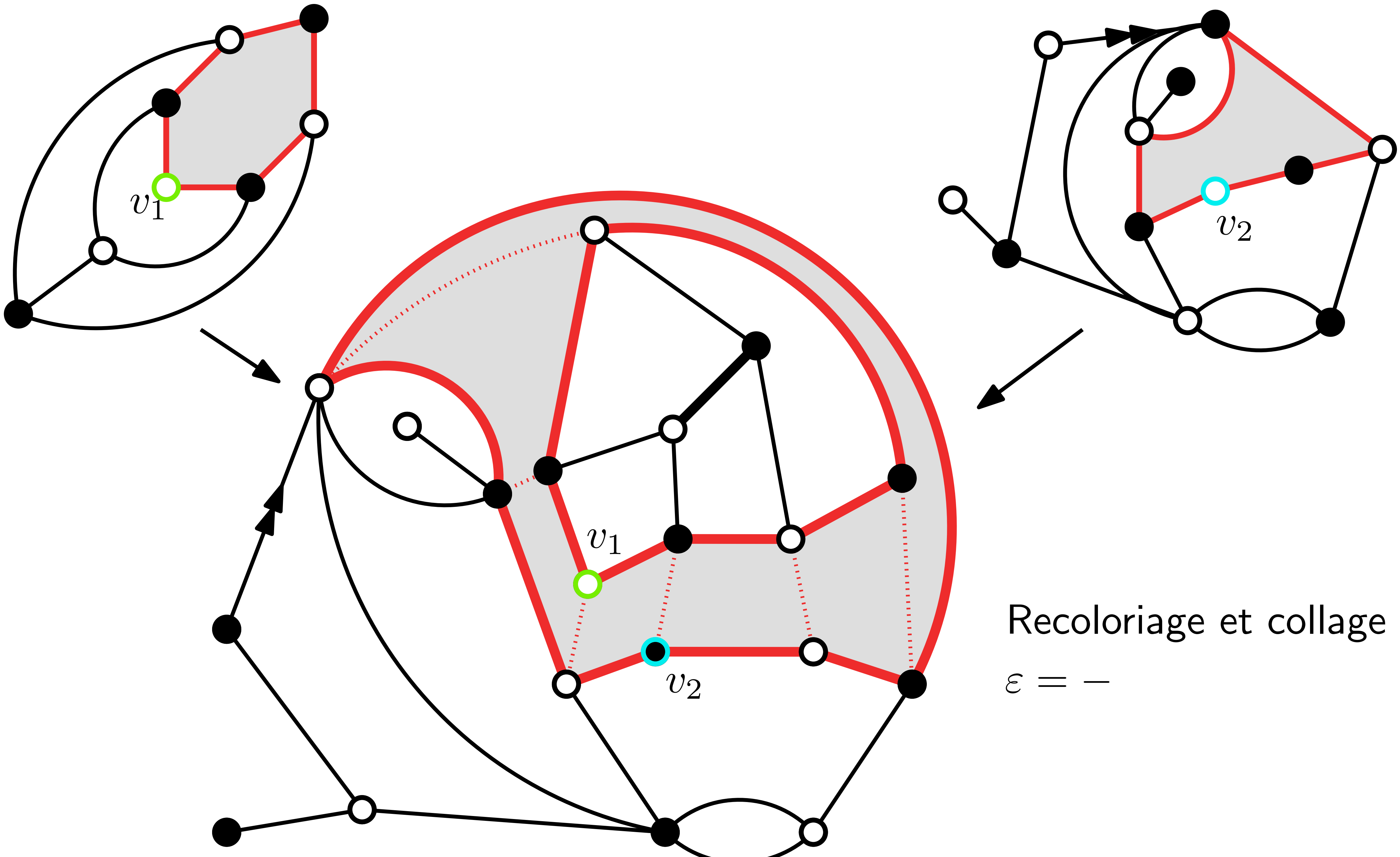
Cas général : collage



Cas général : collage



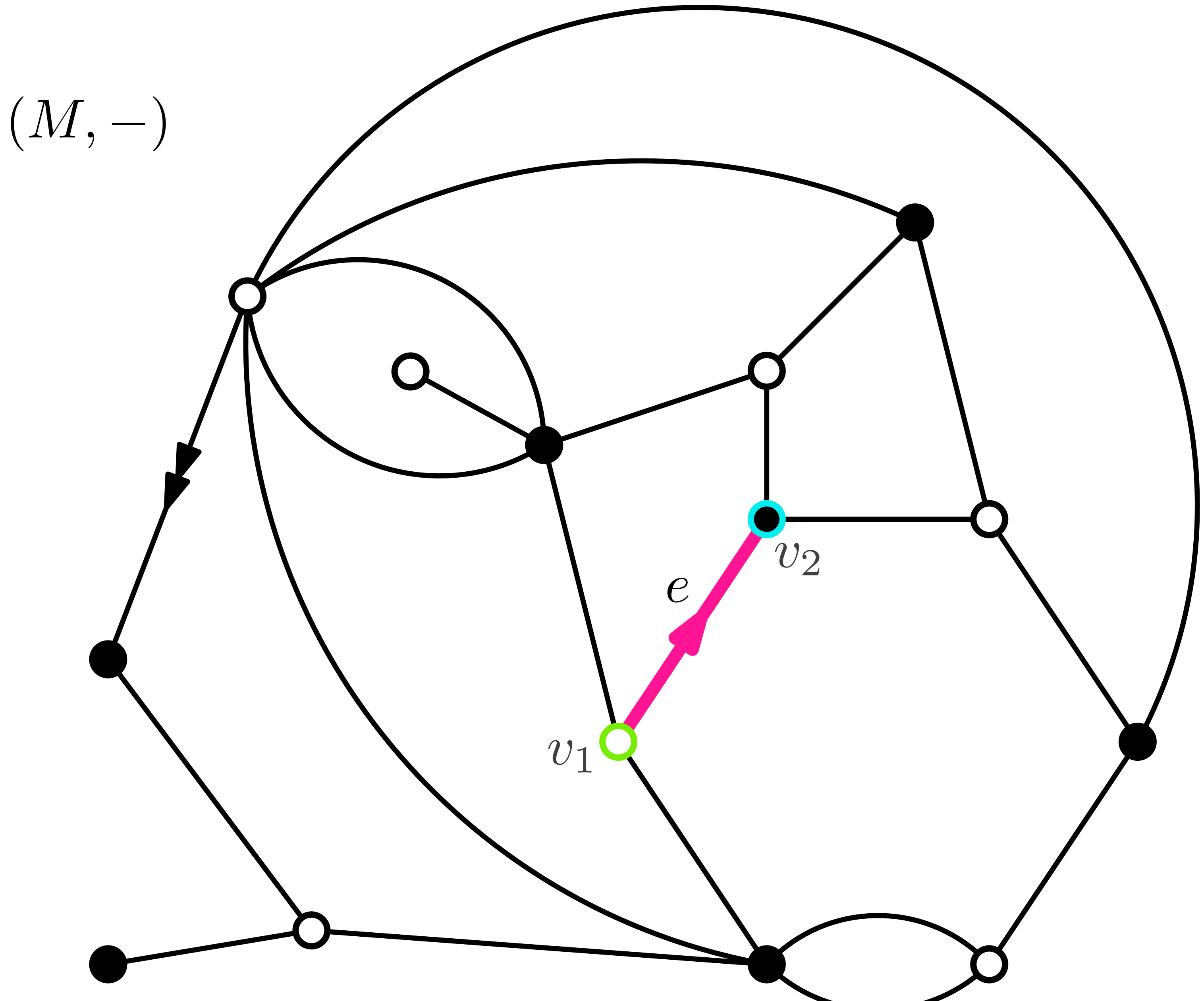
Cas général : collage



Recoloriage et collage

$\varepsilon = -$

Cas général : collage

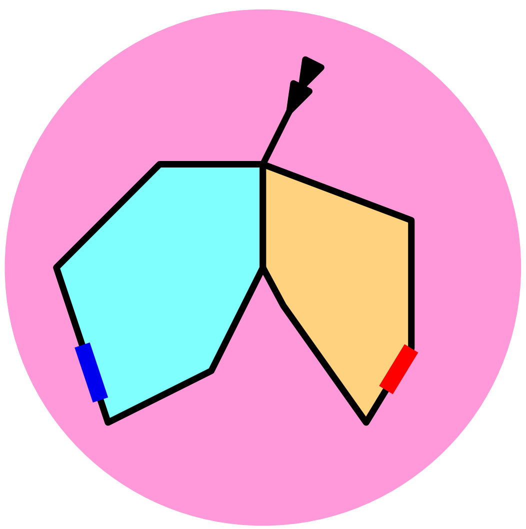


Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d})-1)(f(\mathbf{d})-2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t})-1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

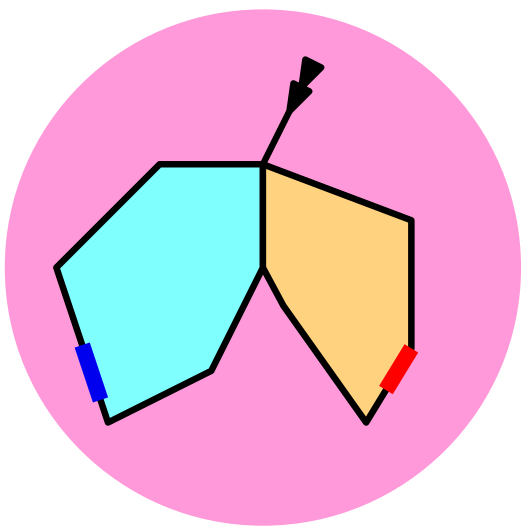
Seconde bijection

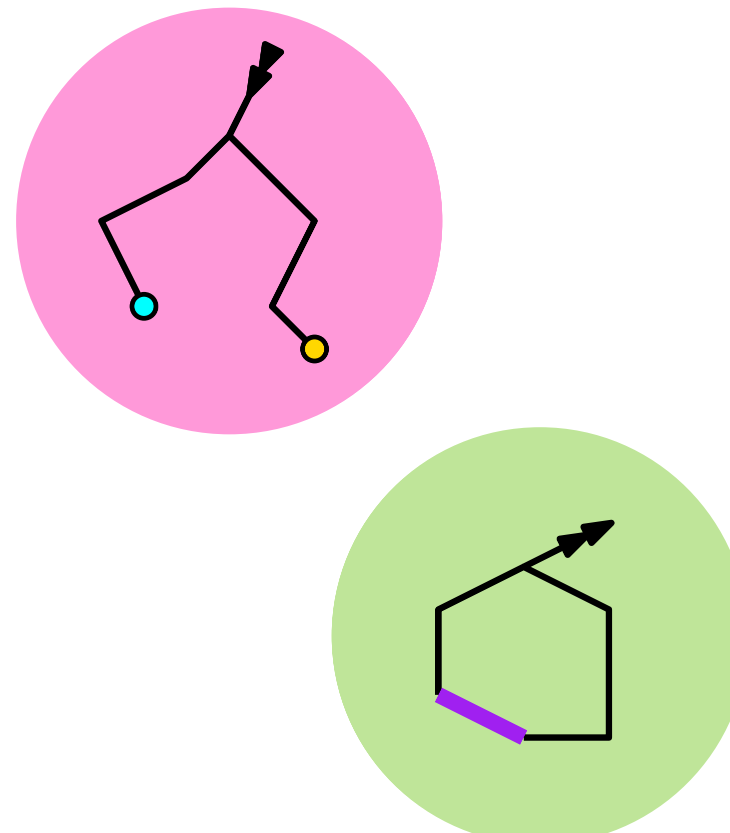
$$(f(\mathbf{d})-1)(f(\mathbf{d})-2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t})-1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$



Seconde bijection

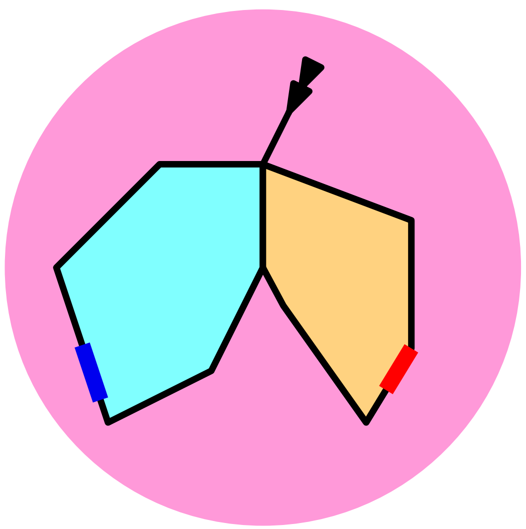
$$(f(\mathbf{d})-1)(f(\mathbf{d})-2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t})-1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

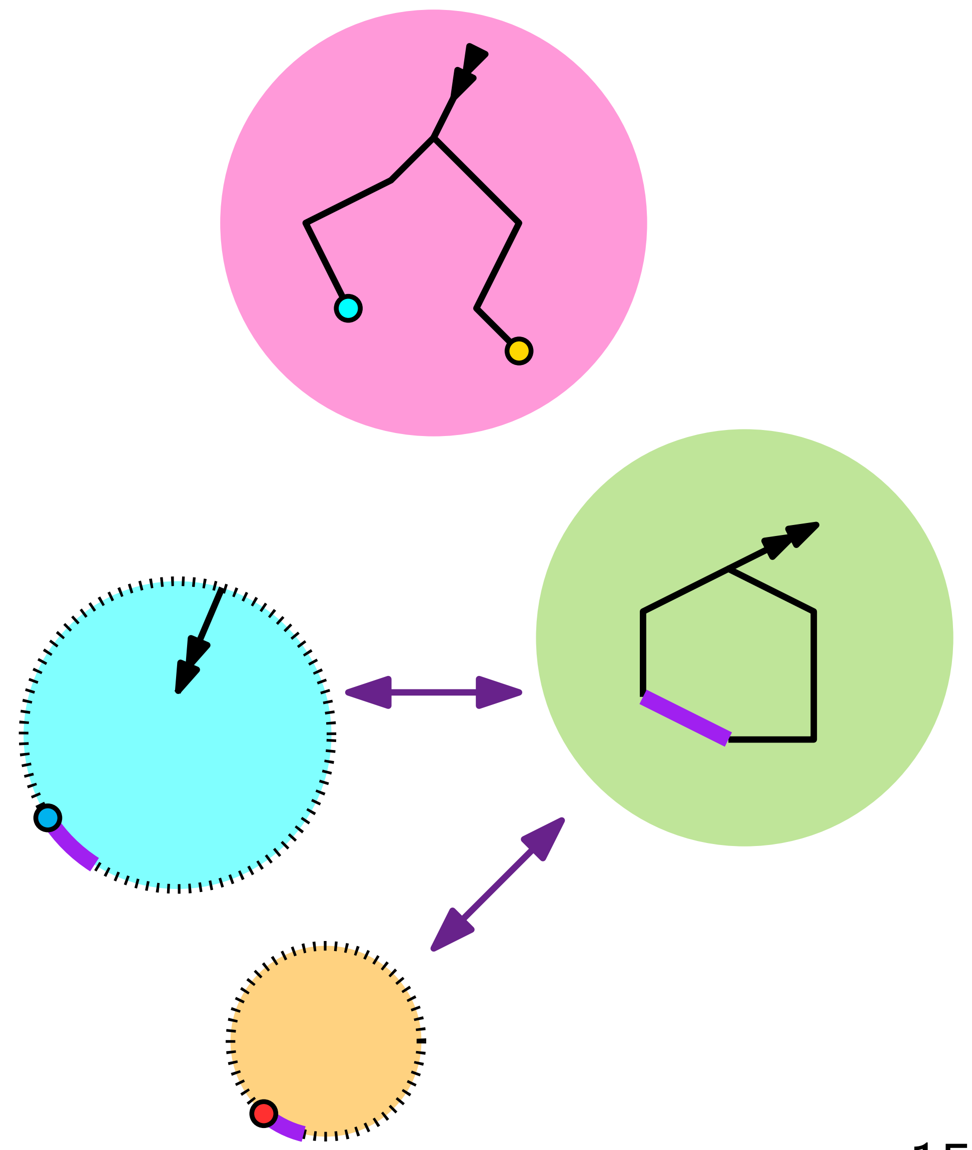




Seconde bijection

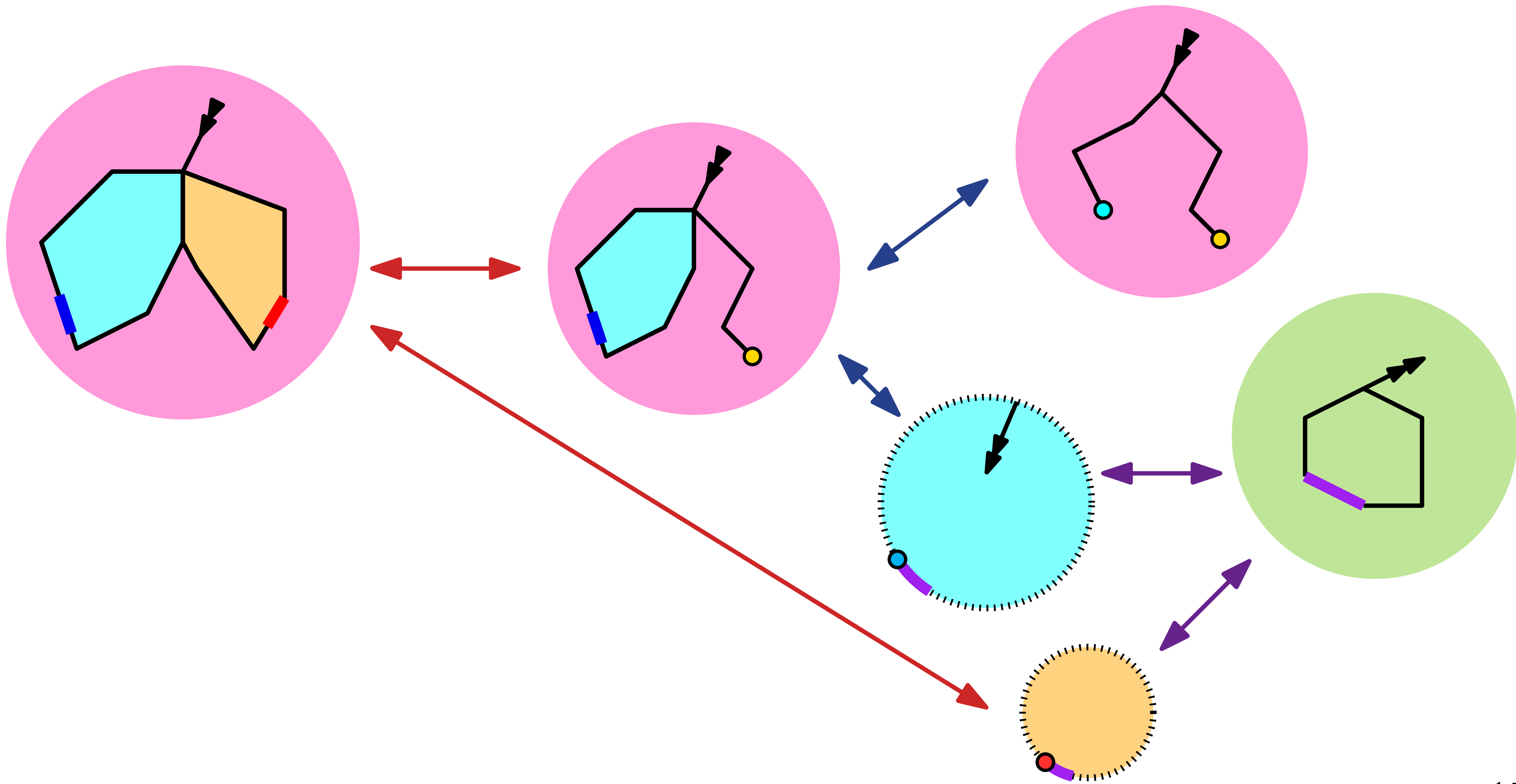
$$(f(\mathbf{d})-1)(f(\mathbf{d})-2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t})-1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$





Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d})-1)(f(\mathbf{d})-2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s})-1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t})-1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$



Perspectives

- Cas unicellulaire de la formule de Louf :

$$\binom{n+1}{2} B_g(n) = \sum_{g^* \geqslant 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} B_{g-g^*}(n).$$

- Formule de Tutte pour les triangulations q-coloriées :

$$\begin{aligned}(n+3)(n+2)T(n+1) &= 2(q-4)(3n+1)T(n) \\ &+2\sum_{k=0}^{n}(3k+1)T(k)(n-k+2)(n-k+1)T(n-k).\end{aligned}$$

- Cas général d'autres formules issues de KP (Goulden-Jackson, Carrell-Chapuy).

Perspectives

- Cas unicellulaire de la formule de Louf :

$$\binom{n+1}{2} B_g(n) = \sum_{g^* \geqslant 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} B_{g-g^*}(n).$$

- Formule de Tutte pour les triangulations q-coloriées :

$$\begin{aligned}(n+3)(n+2)T(n+1) &= 2(q-4)(3n+1)T(n) \\ &+2\sum_{k=0}^{n}(3k+1)T(k)(n-k+2)(n-k+1)T(n-k).\end{aligned}$$

- Cas général d'autres formules issues de KP (Goulden-Jackson, Carrell-Chapuy).

Merci !